

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $16875 = 3^3 \cdot 5^4 \Rightarrow$ в числе могут быть только следующие цифры: 1, 3, 5, 9. Иначе в произведение войдут другие простые множители и оно не будет равно 16875.

Далее ясно, что 5 должно быть 4 раза. Имеем также не более одной 9, иначе их произведение даст 3^4 .

1) В числе есть 9. Тогда число состоит из следующих цифр: 5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1.

Количество перестановок последних четырех равно $\frac{4!}{2!}$, где $4!$ - число перестановок четырех цифр, а $2!$ появилось из-за наличия двух единиц, которые можно менять местами, тем самым получая одинаковые числа.

Далее имеем пять промежутков между цифрами, в которые нужно как-то расположить 5. При этом кол-во промежутков не меняется, $\square 9 \square 3 \square 1 \square 1 \square$

если 5 поставить в крайний правый или левый (т.к. следующую можно поставить снова крайней или перед предыдущей крайней, но от этого число не меняется, т.е. разницы нет).

Итого $5!$ перестановок.

Всего таких чисел: $\frac{4!}{2!} \cdot 5! = 1440$

2) В числе нет 9. Тогда цифры такие: 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1.

Таких всего: $\frac{4!}{3!} \cdot 5! = 480$

Всего чисел: $1440 + 480 = 1920$.

Ответ: 1920 чисел

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$
 $\cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$; $\sin 7x + \sin 3x = 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x$ $\leftarrow$
 $2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$
 $\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x = (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$
 $(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$;
 $(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - 2 \cos(5x - \frac{\pi}{4})) = 0$;
1) $\cos 5x = \sin 5x \Rightarrow \operatorname{tg} 5x = 1 \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$.
2) $\cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$
 $\begin{cases} 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \\ 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n; \end{cases} \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n; \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$
Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$.

3. $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0; \end{cases}$ Затемним ограничение:
 $y > 0; x < 0$ ($-xy > 0 \Rightarrow x < 0$)

Трансформируем 1-ое ур-ие по осн. 10:

$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\lg y (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x)$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg y \cdot \lg(-x) + \lg^2(-x) = 0;$$

Рассмотрим оба случая по отдельности.

$$(\lg y - \lg(-x)) (2 \lg y - \lg(-x)) = 0;$$

1) $\lg y = \lg(-x) \Rightarrow y = -x$. Подставим во 2-ое ур-ие:

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 2y^2 - 4y = 2y(y - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ — не ур.} \\ y = 2 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

2) $\lg y^2 = \lg(-x) \Rightarrow y^2 = -x$. Подставим во 2-ое ур-ие:

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 \Rightarrow y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0; \quad \because y (y > 0)$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = (y - 2)(y^2 + y - 4) = 0 \quad (y = 2 \text{ — легко угадать})$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2; \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} (y > 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ x = - \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = - \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $(-2; 2); (-4; 2); \left(-\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

4. ~~Отрезки~~ Отрезки касательные, проведённые к сфере из одной точки, равны: $SK = SL = SM$

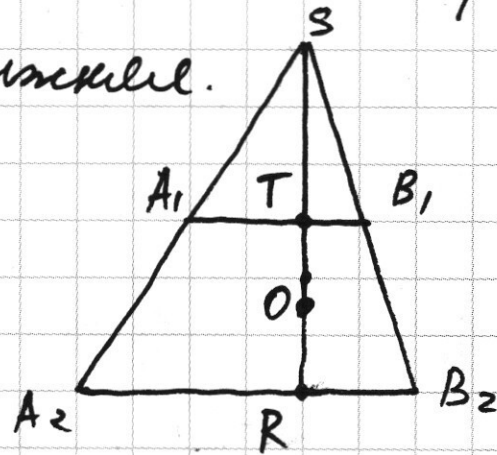
1) Пусть α и β — меньшее и большее плоскости касания со сф. $\alpha \perp SO, \beta \perp SO$ (по усл.) $\Rightarrow \alpha \parallel \beta$. Ясно, что плоскости сечений α и β трёхгранного угла — треугольники.

А т.к. $\alpha \parallel \beta$, эти Δ -ки ~~параллельны~~ подобны. Пусть k — коэф. их подобия. Тогда $\frac{S_\alpha}{S_\beta} = k^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \boxed{k = \frac{2}{3}}$

Теперь рассмотрим сечение пр. угла плоскостью, проходящей через SO . Т — верхнее т. касание, R — нижнее.

$A_1B_1C \subset \alpha, A_2B_2C \subset \beta \Rightarrow \Delta SA_1B_1 \sim \Delta SA_2B_2$
($A_1B_1 \parallel A_2B_2$) Коэф. подобия равен

также $k = \frac{2}{3}$, т.к. A_1B_1 и A_2B_2 лежат в Δ -ах, касающихся сферы.



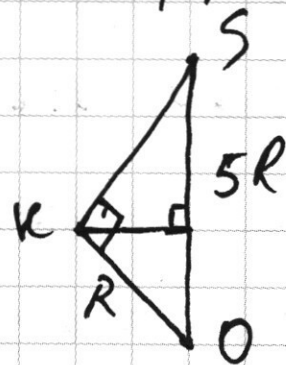
$$\frac{ST}{SR} = \frac{ST}{ST+2R} = \frac{2}{3} \Rightarrow ST = 4R \quad (R - \text{радиус сферы}).$$

Рассм. сечение угла KSO :

$SK \perp OK$ как касат. радиусу

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5};$$



2) $SK = SL = SO$ и $OK \perp SK, OL \perp SL, OM \perp SM$.

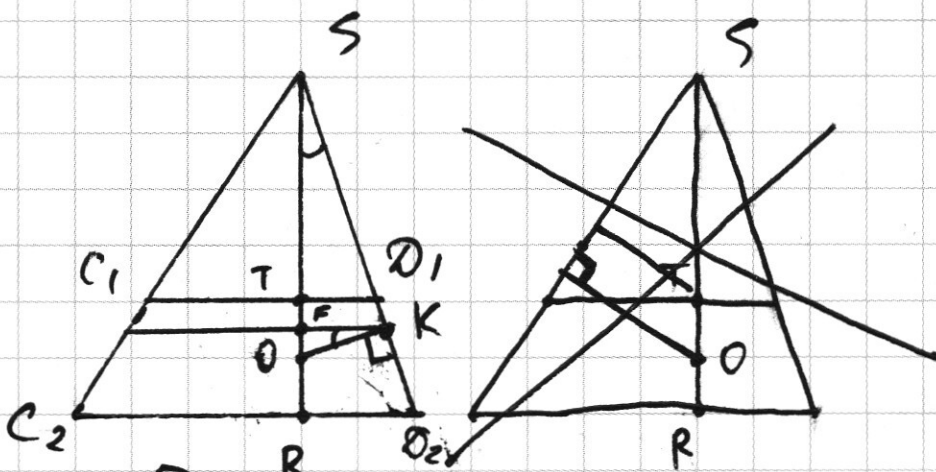
Если вращать ΔSKO вокруг SO , то точка K проходит ровно через L и M . Т.е. Эти 3 точки лежат в плоскости, ~~параллельной~~ γ такой, что $\gamma \perp SO$.

Т.О. $\alpha \parallel \beta$. Рассмотрим сечение π угла через т. (КСО):
 Из Т. К проведем $\perp$ к SO
 $KF \perp SO$, ~~$FE \perp SO$~~ . $FE \perp SO$.

$$OF = OK \sin \angle KSO = \frac{1}{5}R;$$

$$TF = OT - OF = \frac{4}{5}R;$$

$$k_1 = \frac{ST}{SF} = \frac{4R}{4R + \frac{4}{5}R} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6};$$



Т.О. $k_1 = \frac{5}{6}$ - коэф. подобия Δ -ов в сечениях α и γ , где Δ в γ больше Δ в α . S_γ - искомая ^{площадь} ~~площадь~~

$$\frac{S_\alpha}{S_\gamma} = k_1^2 = \frac{25}{36} \Rightarrow S_\gamma = \frac{36}{25} S_\alpha = \frac{36}{25} \cdot 4 = \frac{144}{25}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$; $S_{\text{сеч}} = \frac{144}{25}$.

5.
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12; \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a; \end{cases}$$

1-ое ур-е ~~невозможно~~ задаёт квадрат с вершинами в точках $(12; 6)$, $(12; -6)$, $(0; 6)$, $(0; -6)$ (сторона - 12). Это невозможно показать, раскрыв модуль в 4х случаях.

2-ое ур-е задаёт 4 окружности с центрами $(6; 8)$, $(-6; 8)$, $(-6; -8)$ и $(6; -8)$. Действительно, если бы модулей не было, имели бы одну окружность. Модуль позволяет числам x и y быть как положительными, так и отрицательными.

Однако они накладывают ограничение. Проанализируем окружности в соответствии с четвертями, в которых лежат их центры. Рассмотрим окр-ту 1. При радиусах $R \geq 3$ части этой окр-ты выходят в другие четверти. Эти части уже

не ур-но 2 системы, т.к. в них число, ~~стоящее~~ ~~в модуле~~ $(|x| \text{ или } |y|)$ должно носить знак, чтобы не может.

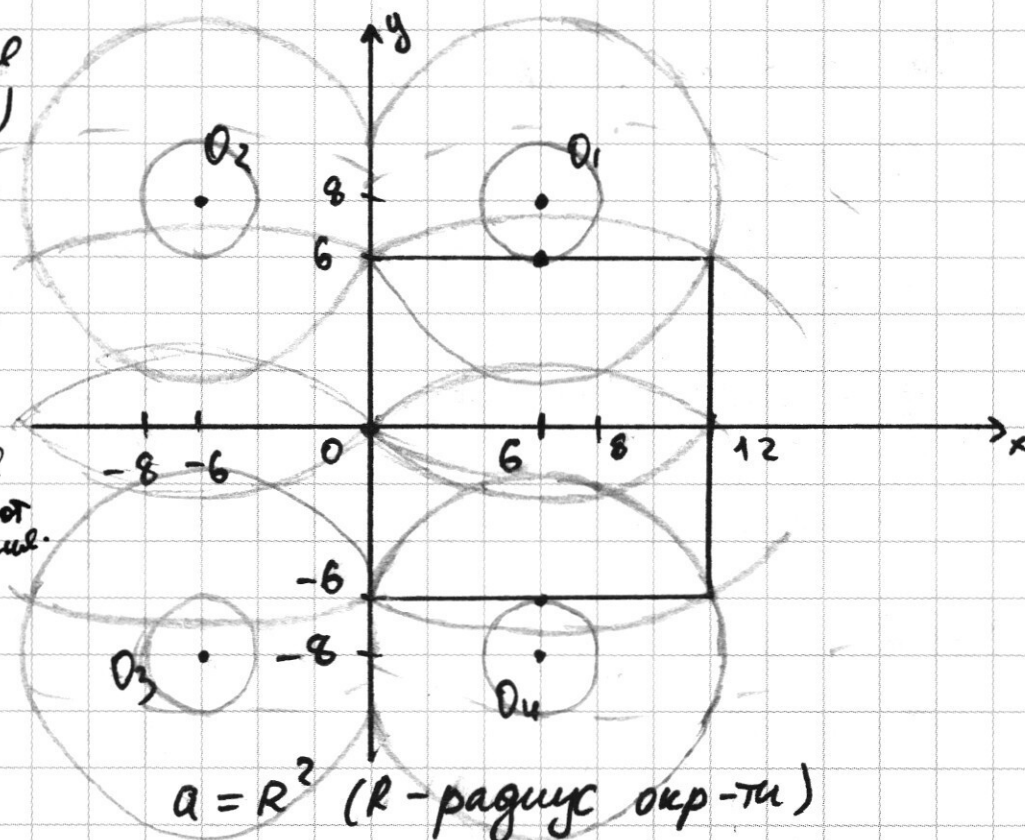
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) При $a_1 = 4$ имеем ровно 2 реш-ия
(касание O_1 и O_4 и O_1 с квадратом)
при $a < 4$ реш-ий нет.

2) Далее имеем ~~4~~ решение ~~до~~
вплоть до $a_2 = 64 + 36 = 100$,
~~при к-ом реш-ие~~
~~вплоть до~~ $a_2 = -14^2 + 36 = 232$ совпадают
и имеем 2 реш-ия.

Далее того, при $a > 232$ далее их
снова 4, а
решений нет. после $a = 232$
реш-ий нет

Ответ: $a = 4$, $a = 100$.



$$7. \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}; \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x; \end{cases} \quad 3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + x(3^{81} - 1)$$

1) Обозначим: $f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$; $g(x) = x(3^{81} - 1) + 85$;

$g(x)$ — прямая, $f(x)$ — показательная ф-ция.

$$g(0) = 85; \quad f(0) = 4 \cdot 3^{81} + 1 > 85 = g(0)$$

Нарисуем примерное расположение
ф-ий.

Заметим, что $x_1 = 4$, $x_2 = 85$.

Действительно:

$$f(4) = 3^4 + 4 \cdot 3^{81} = 4 \cdot 3^{81} + 81; \quad (= y_1)$$

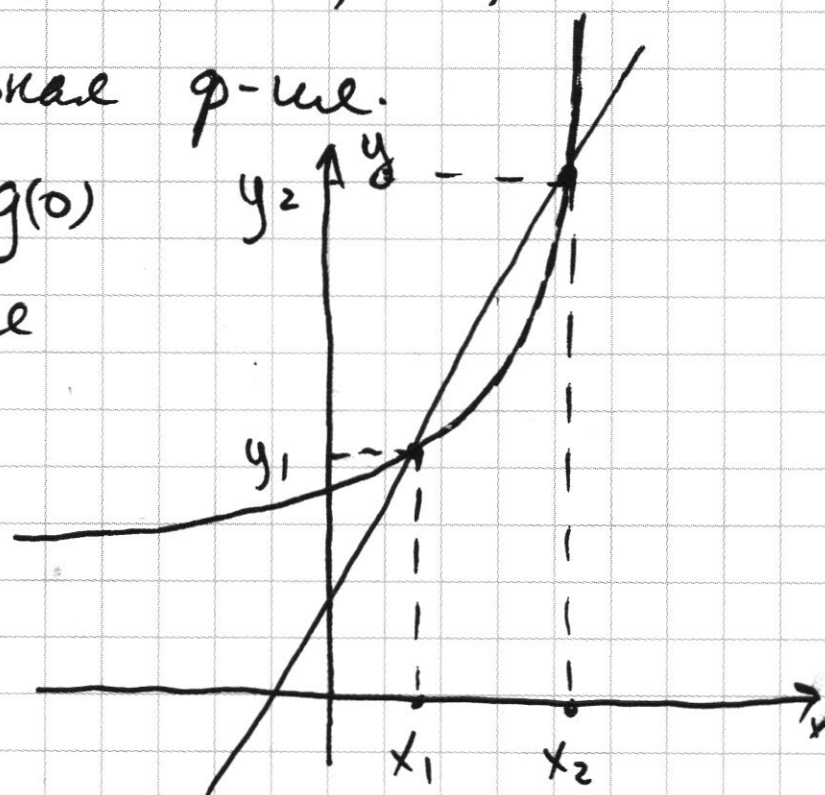
$$g(4) = 4 \cdot 3^{81} + 85 - 4 = 4 \cdot 3^{81} + 81$$

$$\text{и } f(85) = 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 3^{81} \cdot (4 + 81) = 85 \cdot 3^{81} \quad (= y_2)$$

$$g(85) = 85 \cdot 3^{81} + 85 - 85 = 85 \cdot 3^{81}$$

При x_1 и x_2 условие системы не выполняется.

Всего имеем 80 целых x , которые могут удов. системе.



2) Далее, рассмотрим целое x_i : $f(x_i) \in \mathbb{Z}$, $g(x_i) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y_i \in [g(x_i); f(x_i)]$, при этом $y_i \in \mathbb{Z}$;

Тогда кон-во y_i равно: $(f(x_i) - 1) - (g(x_i) - 1) = f(x_i) - g(x_i)$

Кон-во пар также равно $f(x_i) - g(x_i)$

Тогда всего пар: $N = f(5) - g(5) + f(6) - g(6) + \dots + f(84) - g(84)$.

3) Введём ф-ию $F(x) = f(x) - g(x) = 85 + x(3^{81} - 1) - 3^x - 4 \cdot 3^{81} =$

$$= 85 - x + 3^{81}(x - 4) - 3^x$$

$$N = F(5) + F(6) + \dots + F(84);$$

Заметим, что наша сумма N ~~превращается~~ ^{сводится} к сумме

трёх прогрессий: $S_1 = 80 + 79 + \dots + 1 = \frac{81}{2} \cdot 80 = 40 \cdot 81 = 3240$

$$S_2 = 3^{81} \cdot 1 + 3^{81} \cdot 2 + \dots + 3^{81} \cdot 80 = \frac{3^{81} \cdot 81}{2} \cdot 80 = 3^{81} \cdot 3240$$

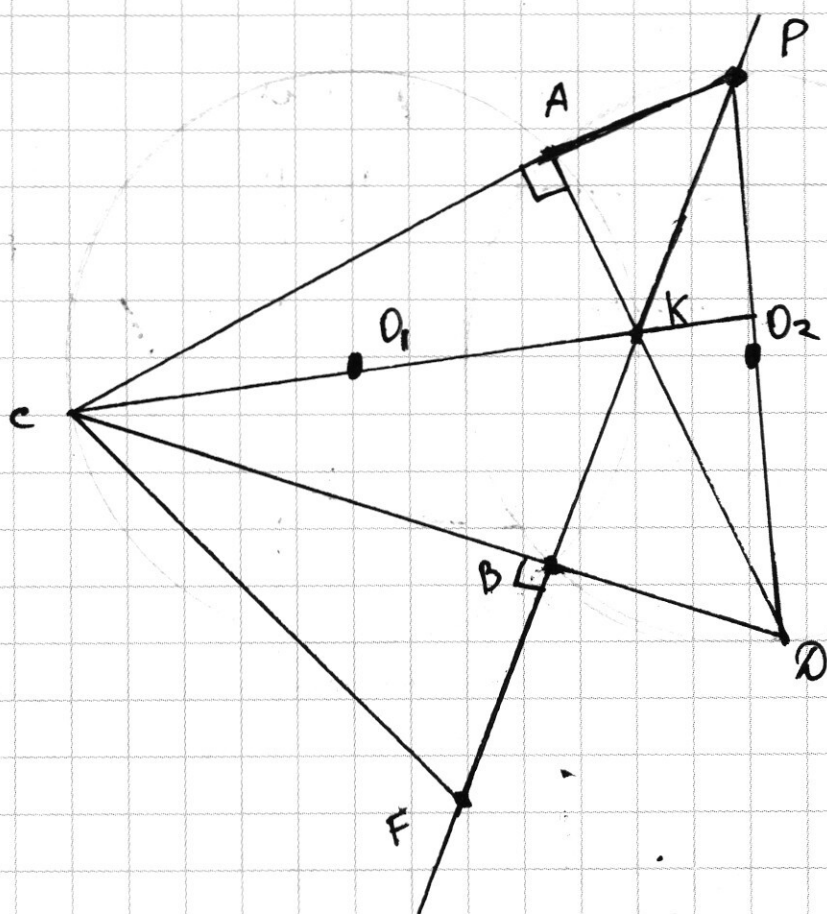
$$S_3 = (-3^5) + (-3^6) + \dots + (-3^{84}) = -(3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84}) = -\frac{3^5 \cdot (3^{80} - 1)}{2}$$

$$N = 3240 + 3^{81} \cdot 3240 - \frac{243}{2} (3^{80} - 1) = 3^{80} \left(3 \cdot 3240 - \frac{243}{2} \right) + 3240 + \frac{243}{2} =$$

$$= 3^{80} \cdot \frac{19197}{2} + \frac{6723}{2}$$

Ответ: $3^{80} \cdot \frac{19197}{2} + \frac{6723}{2}$

6.



Дано: $\angle CAD = 90^\circ$;

$BF = BD$; $R_1 = R_2 = 13$;

а) Найти: CF ;

б) Найти: $S(ACF)$, $BC = 10$.

а) $K = AD \cap BF$;

Заметим, что СВКА-
впис. чур, а значит
К лежит на дуге
окружности (на K -ой
лежат А В и С), значит
св.

СК-диаметр, т.к. $\angle CAK = 90^\circ$

$$\Rightarrow CK = 2R = 26;$$

Аналогично, $P = BF \cap CA$ лежит на второй окр-ти; $DP = 2R = 26$;

Тогда К-ортоцентр ΔCPD , т.к. $DK \perp CP$ и $PB \perp CD \Rightarrow CK \perp PD$;

из частного случая, когда $\angle O_2 C K O_1$ лежит на одной прямой: $CF = 26$

Ответ: а) $CF = 26$. Умнйвал, что ответ один для всех случаев.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$$\cos 10x = \cos(7x + 3x) = \cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 7x \cdot \sin 3x;$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = \sqrt{2} \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x = \cos(7x + 3x)$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta;$$

$$\cos(5x + 2x) + \cos(5x - 2x) = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x;$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos^2 5x - 1;$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0;$$

1) $\cos 5x = \sin 5x \Rightarrow \operatorname{tg} 5x = 1 \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$

2) $x \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 2 \cdot \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$

$$\begin{cases} 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

3.1. $16875 = 27 \cdot 5^4 = 3^3 \cdot 5^4$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ 1 \overline{) 16875} \\ \underline{16} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 4375 \\ \underline{4375} \\ 1250 \\ \underline{1250} \\ 16875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 135 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$16875 = 3^3 \cdot 5^4$; Т.О. в числе могут быть только числа: 3, 5, 9, 1.
 Более того, должно быть ^{ровно} 4 пятёрки. Если в числе есть 9,
 в числе не более 1 девятки.

1) есть 9: $5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1$. $\frac{4!}{2!} \cdot 5! = 12 \cdot 120 = 1440$

2) нет 9: $5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1$ $\frac{4!}{3!} \cdot 5! = 4 \cdot 120 = 480$

$$\begin{array}{r} 1440 \\ - 480 \\ \hline 1920 \end{array}$$

Итого: 1920

3. $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$; $y^2 - 8y + 16 - 16$
 $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$, $x + 4x$

$xy < 0 \Rightarrow x < 0$;
 $\neg x < 0 \Rightarrow x > 0$
 $-x > 0 \Rightarrow x < 0$
 $y < 0$; $y > 0$.

$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \lg(-x)$

$\lg y \cdot (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x)$

$4 \lg(-x) \cdot \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg y$

$2 \lg^2 y - 3 \lg(-x) \lg y + \lg^2(-x) = 0$; $\frac{1}{\lg(-x)}$

$2\left(\frac{\lg y}{\lg(-x)}\right) - 3\left(\frac{\lg y}{\lg(-x)}\right) + 1 = 0$; $2t^2 - 3t + 1 = 0$;

$(\lg y - \lg(-x))(2 \lg y - (\lg(-x))) = 0$; $(t-1)(2t-1) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} \lg y = \lg(-x) \\ 2 \lg y = \lg(-x) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} y = -x \\ y^2 = -x \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 2x^2 + 4x = 2x(x+2) = 0 \\ 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0; \end{array} \right.$

2) $y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$, $y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$, $0 = 1 + 4 \cdot 4 = 17$;
 $y(y-2)(y^2+y-4) = 0$, $y^3 - y^2 - 6y + 8$

$y = 0 \emptyset$

$y = 2$
 $y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$;

$y = 2 \Rightarrow x = -4$

$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Rightarrow x = -\frac{18-2\sqrt{17}}{4}$

$8 - 4 - 12 + 8 = 16 - 16 = 0$;

$\frac{-y^3 - y^2 - 6y + 8}{y^3 - 2y^2} \Big| \frac{y-2}{y^2+y-4}$

$\frac{-y^2 - 6y}{y^2 - 2y} = 4y + 8$
 $\frac{-4y + 8}{-4y + 6} = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. $SK = SL = SM$; $\angle KSO = ?$; $S = p \cdot R$

$\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$;

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9} = k^2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

$3h_1 = 2h_1 + 4R$

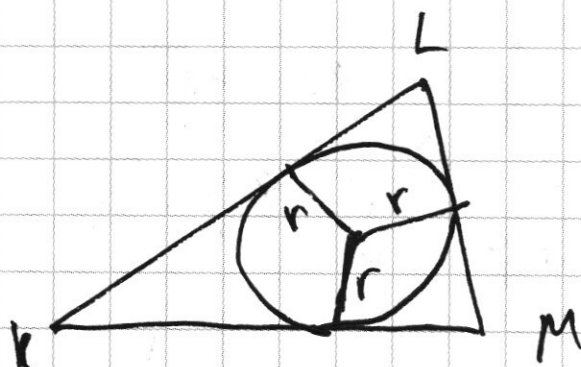
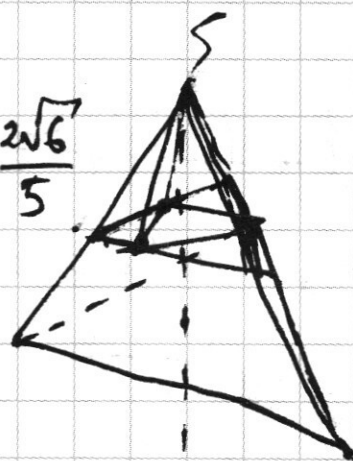
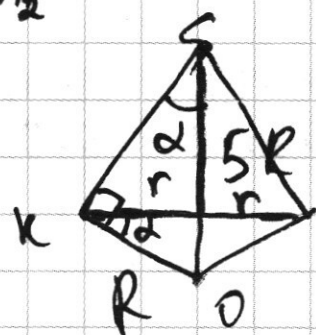
$h_1 = 4R$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\sin \alpha = \frac{1}{5}$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$;

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1}{h_1 + 2R} = \frac{2}{3}$;

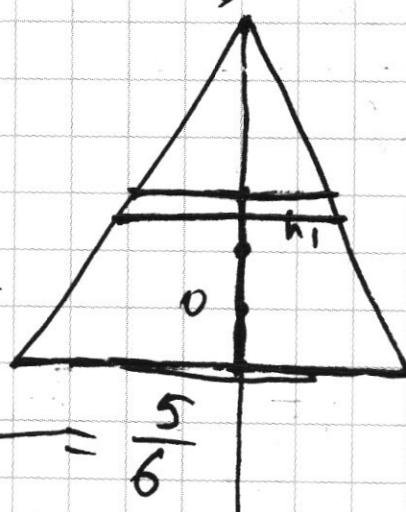


$r = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{5R}{2\sqrt{6}}$

$R - R \sin \alpha = R(1 - \sin \alpha)$

$36 \cdot 4 = 120 + 24 = 144$

$\frac{ST}{SF} = \frac{4R}{4R + RF} = \frac{4R}{4R + R(1 - \sin \alpha)} = \frac{4}{4 + 1 - \frac{1}{5}} = \frac{20}{20 + 5 - 1} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$



5. $\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12; \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a; \end{cases}$

- ровно 2 решения;

1) $2x - 12 = 12 \Rightarrow x = 12$

2) $2x + 12 = 12 \Rightarrow x = 0$

3) $x - 6 - y \geq 0, y \leq x - 6$

$x - 6 + y \geq 0, y \geq -x + 6$

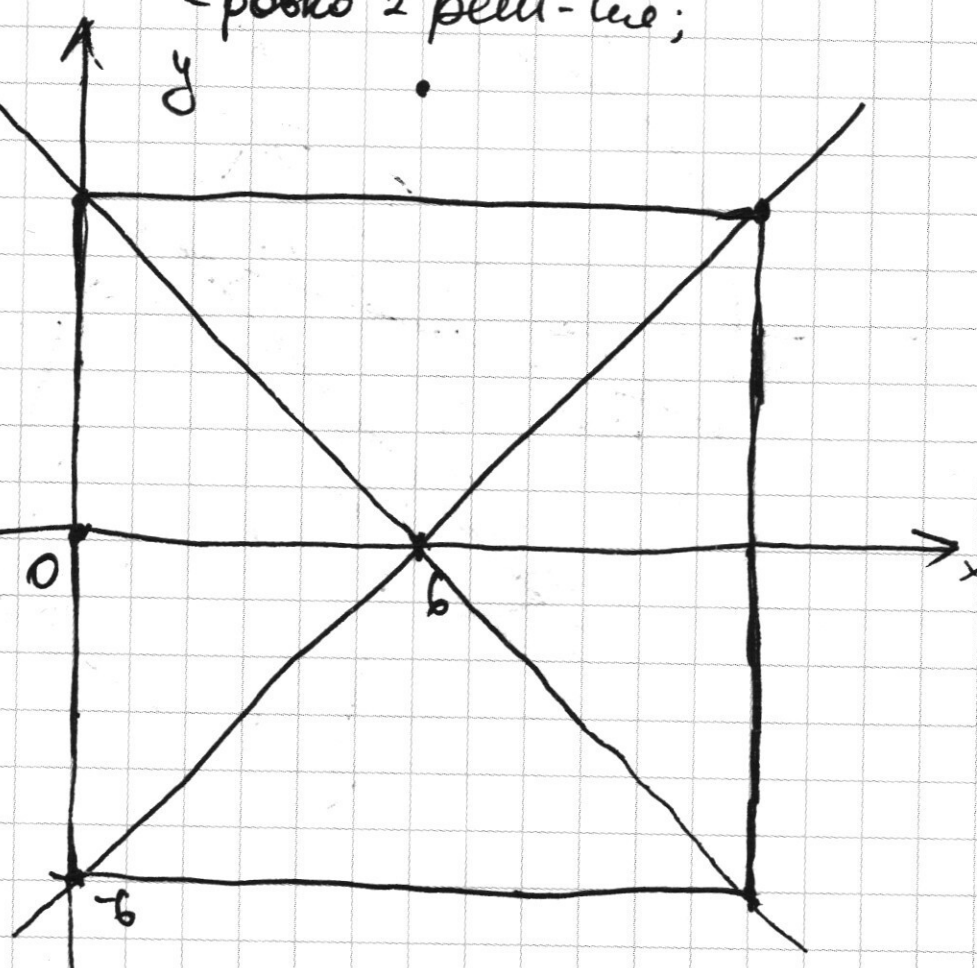
$x - 6 - y - x + 6 + y = 12$

$-y = 6$

$y = -6$

$-x + 6 + y + x - 6 + y = 12$

$y = 6$;



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$FK^2 = CF^2 + CK^2 - 2CF \cdot CK \cdot \cos \alpha; \quad CF = x;$$

$$26^2 = 400 + 240 + 46 = 676$$

$$FK^2 = x^2 + 676 - 52x \cos \alpha; \quad CT = 26 \cos \alpha;$$

$$7. \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{Z};$$

$$y < x(3^{81} - 1) + 85;$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < x(3^{81} - 1) + 85;$$

$$(3^x)' = \frac{3^x}{\ln 3}$$

$$x = 81: \quad 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} = 5 \cdot 3^{81};$$

$$81 \cdot 3^{81} - 81 + 85 = 81 \cdot 3^{81} + 4;$$

$$x = 80: \quad 3^{80}(1 + 4 \cdot 2) = 13 \cdot 3^{80}$$

$$x = 40: \quad 3^{40}(1 + 4 \cdot 3^{41})$$

$$x = 79: \quad 3^{79}(1 + 36) = 37 \cdot 3^{79}$$

$$(x=4): \quad 4 \cdot 3^{81} + 3^4 = 4 \cdot 3^{81} + 81; \quad (4 \cdot 3^{81} + 81)$$

$$x = -4: \quad -4 \cdot 3^{81} + 85; \quad x = -81$$

$$3^{-81} + 4 \cdot 3^{81} = 3^{81} \left(\frac{1}{3^{81}} + 4 \right);$$

$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}; \quad g(x) = x(3^{81} - 1) + 85$$

$$f'(x) = \frac{3^x}{\ln 3}; \quad g'(x) = 3^{81} - 1 \div \text{const},$$

$$x_1 = 4;$$

$$3^x = \ln 3 (3^{81} - 1)$$

$$x = \log_3 (\ln 3 (3^{81} - 1))$$

$$f(0) = 4 \cdot 3^{81} + 1; \quad g(0) = 85$$

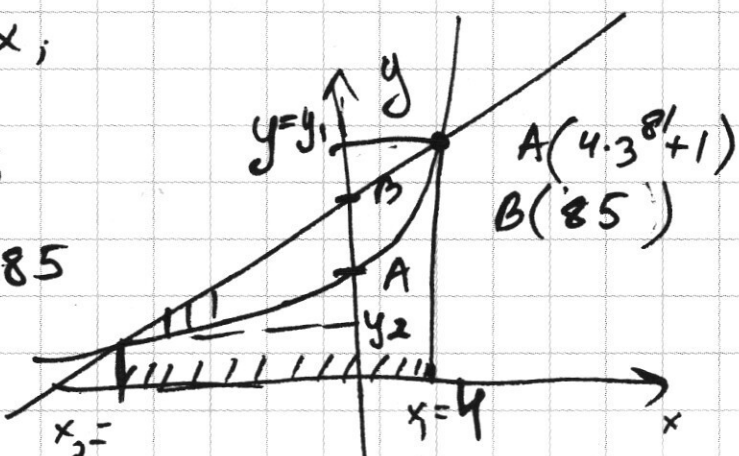
$$x = 85; \quad f(85) = 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 3^{81} (3^4 + 4) = 85 \cdot 3^{81};$$

$$g(85) = 85 \cdot 3^{81}$$

$$85 \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81} - 81 = 81 \cdot 3^{81} - 81 = 81(3^{81} - 1)$$

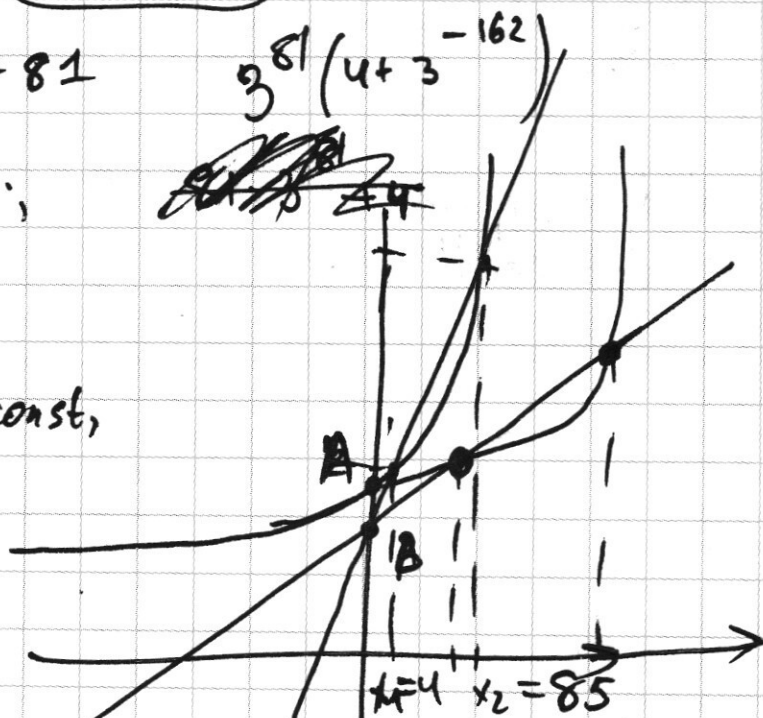
$$f(x_1) - g(x_1) + f(x_2) - g(x_2) + f(x_3) - g(x_3) + \dots + f(x_n) - g(x_n) =$$

$$\Rightarrow f(5) - g(5) + f(6) - g(6) + \dots + f(84) - g(84)$$



$$x = 80: \quad 80 \cdot 3^{81} - 80 + 85$$

$$x \cdot 3^{81} + (85 - x)$$



$$F(x) = f(x) - g(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81} - 85 - x \cdot (3^{81} - 1) = 3^{81}(4-x) + 3^x - 85 + x$$

$$5: 3^{81}(-1) + 3^5 - 80$$

$$81 \cdot 40 = 3240$$

$$6: 3^{81}(-2) + 3^6 - 8079$$

$$\begin{array}{r} 3^{81} \\ 40 \\ \hline 3240 \end{array}$$

$$3^5 \cdot (3^{80} - 1)$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ \hline 3240 \\ \times 3 \\ \hline 9720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9720 \\ \times 2 \\ \hline 19440 \\ - 243 \\ \hline 19200 \\ 19197 \end{array}$$

7:

$$\frac{3^{81} \cdot 81}{2} \cdot 80 = 3^{81} \cdot 3240$$

$$3^5 = 81 \cdot 5 = 243$$

$$3240(8) - 3240(3^{81} + 1) - \frac{243}{2}(3^{80} - 1) =$$

$$= 3^{80} \left(3 \cdot 3240 - \frac{243}{2} \right) + 3240 + \frac{243}{2} =$$

$$3240 \cdot 3 = 9720$$

$$19440 - 243 = 19200 - 3 = 19197$$

$$6480 + 243 = 6680 + 43 = 6720 + 3 = 6723 \quad 9720 \cdot 2 = 19440 + 100 = 19540$$

$$\frac{16}{25} = \frac{S_8}{9} \Rightarrow S_8 = \frac{16 \cdot 9}{25} = \frac{144}{25}$$

$$\frac{DK}{CD} = \frac{DB}{DK} = \frac{BK}{AC}$$

$$\Delta CAD \sim \Delta KBD$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DK} = \frac{AC}{BK}$$

$$DK^2 = DB \cdot CD$$

$$CF = CB^2 + BF^2$$

$$DK \cdot DA = DB \cdot DC$$

$$BK \cdot PK = AK \cdot DK$$

$$FB \cdot FK = FT \cdot FC$$

$$\frac{DK \cdot DA}{FT \cdot FC} = \frac{DC}{FK}$$

$$\frac{AK}{PK} = \frac{BK}{DK}$$

$$CD = CB^2 + DB^2 + 2CB \cdot BD = CB^2 + BF^2 + 2CB \cdot BD$$

$$CM \cdot MK = AM \cdot MB$$

$$CD - CF = 2CB \cdot BD$$

$$\triangle CDP \sim \triangle KAP$$

$$CM(2B - CM) = AM^2$$

$$\frac{CB}{AK} = \frac{CP}{KP} = \frac{BP}{AP}$$