

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\underline{22}$
 $6875 = 625 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$. Существует единственная
 на 5 цифр, кратная 5 и не равная 0.
 Цифры не равны нулю, т.к. произведение
 цифр ненулевое. Поэтому, в нашем
 восьмизначном числе обязательно будет
~~хоть~~ ^{хоть} одна ~~цифра~~ ^{цифра} 5. Значит, у нас осталось
 4 цифры, дающие в произведении 27.
 Это либо 3, 3, 3, 1 в какой-то порядке,
 либо 9, 3, 1, 1. Очевидно, что других
 вариантов нет. Итак, у нас есть 8
 мест, нужно в них расставить 3 тройки,
 4 единицы и одну 5. Это $C_8^4 \cdot C_4^3$ способов.
 $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \cdot 4 = 280$ способов. Аналогично
 считаем кол-во способов расставить
 4 единицы, 2 тройки, 1 дватку и 1
 единицу: $C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 =$
 $70 \cdot 6 \cdot 2 = 70 \cdot 12 = 840$. Всего получаем
 $280 + 840 = 1120$ способов. Других способов
 не существует. Ответ: 1120 способов.

№3

Решим скаляр $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$:

$$(2y + x)(y - x) - 4(x + 2y) = 0.$$

$$(2y + x)(y - x - 4) = 0.$$

1) Если $x = -2y$. Тогда, в первой строчке имеем:

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}. \text{ Кропотарифируем по основанию 10, зная, что } y > 0.$$

$$\begin{aligned} \lg(16y^2) \cdot \lg y &= \lg(2y) \cdot \lg(2y^2) \\ (\lg 16 + 2 \lg y) \cdot \lg y &= (\lg 2 + \lg y)(\lg 2 + 2 \lg y) \\ \lg y \cdot \lg 16 + 2 \lg^2 y &= \lg^2 2 + 3 \lg 2 \cdot \lg y + 2 \lg^2 y \end{aligned}$$

$$\lg y \cdot \lg 16 - \lg 8 \cdot \lg y = \lg^2 2$$

$$\lg y \cdot \lg 2 = \lg^2 2 \quad | : \lg 2 \neq 0$$

$$\lg y = \lg 2 \Rightarrow y = 2 \quad \text{и } x = -4 \leftarrow \text{первое решение}$$

2) Если $y - x - 4 = 0 \Rightarrow y = x + 4$. Тогда в первой строчке условие имеем:

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}$$

Кропотарифируем по основанию 10, помня, что $x+4 > 0$ и $-x > 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$.

$$\lg\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) \cdot \lg(x+4) = \lg(-x) \cdot \lg(-x(x+4)).$$

Положим $\lg(-x) = a$, $\lg(x+4) = b$. Имеем:

$$(4a - 2b) \cdot b = a \cdot (a + b) \Leftrightarrow 4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 2b)(a - b) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{или} \\ \text{или} \end{matrix}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13 продолжение

1) $a = b$

или

2) $a = 2b$

Если $a = b$, т.е. $\lg(-x) = \lg(x+4)$, то $-x = x+4 \Rightarrow$
 $x = -2$, и это решение, т.к. $x \in (-4; 0)$ и $y = 2$

Если $a = 2b$, т.е. $\lg(-x) = 2 \lg(x+4)$, то ~~то~~
 $-x = (x+4)^2 \Rightarrow x^2 + 9x + 16 = 0$. Корни равны:

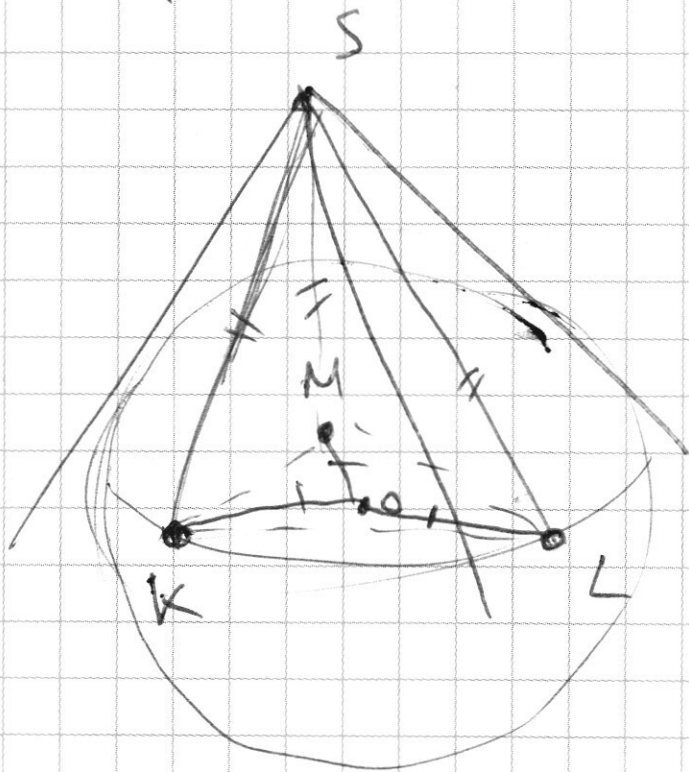
$$\frac{-9 \pm \sqrt{81 - 64}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \text{ не подходит,}$$

т.к. $x \in (-4; 0)$. Но $x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$ подходит,

y при таком x равен $-\frac{-9 + \sqrt{17}}{2} + 4 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$.

Итак ответ: ответ: $(-4; 2)$, $(-2; 2)$, $(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2})$

14



1) Покажем, что $SO \perp KML$.
Поймем, что $ГМ$ точек,
таких, что они

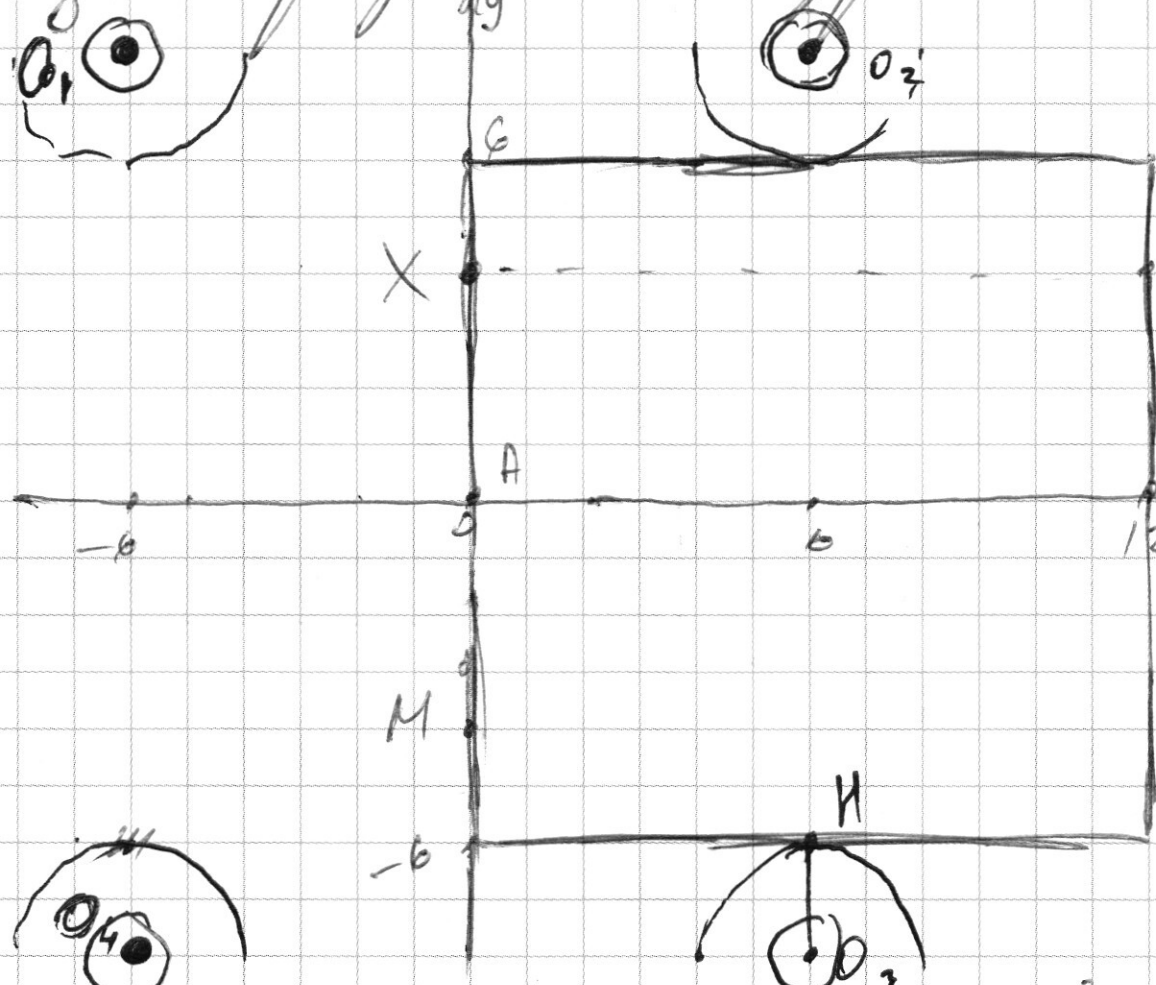
равноудалены от K, M, L
является прямой, проходя-
щая через центр
вписанной окружности
 KLM и перпендикулярная

ее. тогда, т.к. $OK = OM = OL$, из св-ва окру-
жности (радиусы равны) и $SK = SL = SM$ -
равенство касательных. И следует перпендикулярность ^(по теореме 3.14)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на продолжение
на плоскости квадрат, (в этом несложно
убедиться, рисуем графки $y=x$, $y=-x$ и
соединим 3-е значениями
Квадрат в том плане,
что это 4 отрезка
AB, BC, CD, DA. Итак, $|x-6-y| + |x-6+y|=12$
То же задает квадрат, т.к. сделав замену,
 $a=x-6$ получим $|a-y| + |a+y|=12$, про это
мы уже знаем, что это квадрат. Значит,
это просто сдвинутый квадрат с центром
в точке 6, стороной 12 и сторонами,
параллельно осям координат.
Далее, найдем про 2 уравнения,
 $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 9$ задает окружность с
центром в 9 и радиусом 3. Но,
т.к. у нас ~~квадрат~~ есть модули, то
 $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9$, то если нам подойдет
точка $(x; y)$, лежащая в каком-то
своем квадрате ($\frac{1}{4}$ плоскости, примем
такое обозначение за $\frac{1}{4}$ плоскости). То теперь
будут подходить точки $(-x; y); (x; -y); (-x; -y);$
 $(x; y)$. Т.е. можно отметить точки $(6; 8); (6; -8);$

$(-6; 8), (6; -8)$ и строить для каждой свою окружность, не выходящую за пределы квадрата. Нарисуй АЮ:



линии выходя за пределы квадрата.

черном-центры окружностей.

O_1, O_2, O_3, O_4 - центры окружностей квадратов

1) Если O_1 пересекает квадрат, то и O_4 пересекает квадрат в точке, симметричной X относительно OA . А так же, если $O_1X = O_2X$, то и O_2 пересекает квадрат в т.ч. Y , т.к. $O_2X = O_2Y$ (см. картинку). Это когда-бы 3 точки, так быть не может. Поэтому, X и M совпадают. и действительно, если $O_1A = O_4A = O_2B = O_2A = O_3A = O_3B$, то такое бывает и получается ровно 2 точки пересечения, откуда $O_1 = O_4 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

(далее на стр. 7)

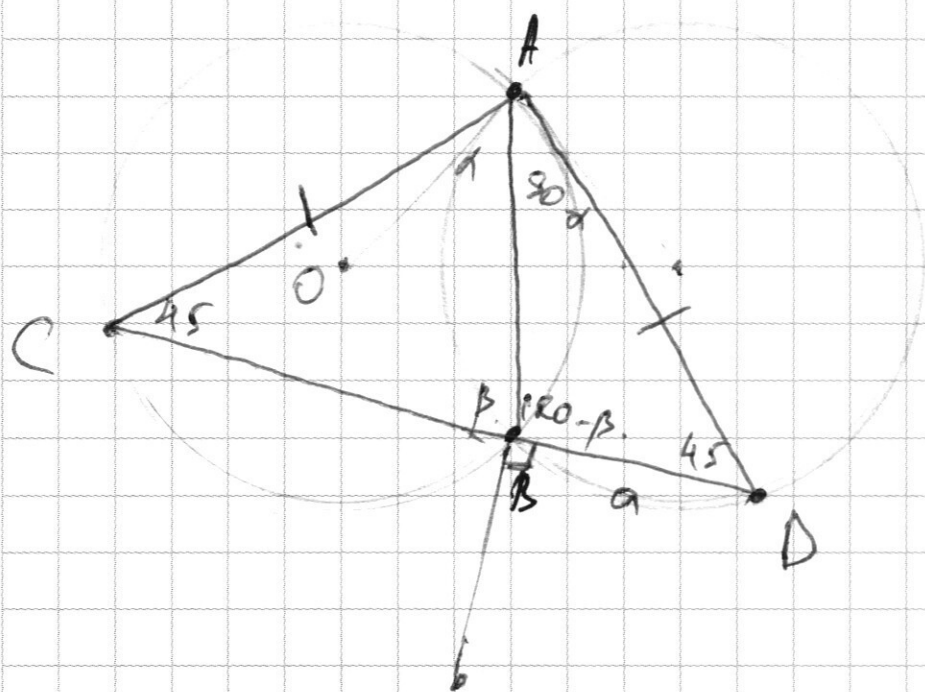
2) Если же O_1 не пересекает квадрат, то O_4 не пересекает квадрат, тогда O_2 и O_3 должны пересекать в квадрате по одной точке. Очевидно, такое бывает.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и продолжение

и только когда радиус окружностей
равен 2, в противном случае
окружность с центром в O_3 или O_2
пересекает квадрат по 2 точкам, сим-
метричными O_2, O_3 . Откуда $r^2 = 4$ и $a = 4$.
Ответ: $a = 4, a = 100$.

№ 6



Итак, пусть $\angle CAB = \alpha^\circ \Rightarrow$
 $\angle BAD = (90 - \alpha)^\circ$. Пусть
 $\angle ABC = \beta^\circ$, тогда
 $\angle ABD = (180 - \beta)^\circ$ как
смежные.

Тогда, т.к. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB}$ в
первой и второй окру-
жностях, то $\angle ACB = \angle ADB$

(В силу того, что окружности имеют
одинаковые радиусы, то хорды их
пересечения симметричны относительно
их радиусов $\Rightarrow$ дуги равны:)

$$\text{Значит, } 180 - \alpha - \beta = 180 - (90 - \alpha) - (180 - \beta) = \alpha + \beta - 90.$$

Откуда $2\alpha + 2\beta = 270 \Rightarrow \alpha + \beta = 135 \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$
 $= 45^\circ$ и $\triangle CAD$ равнобедренный. Найдем
длину CD

№6 АВ, зная, что $\angle ACB = 45^\circ$. Очевидно, что $\angle AOB = 90^\circ$, тогда $AB = \sqrt{2} \cdot 13$ по т. Пифагора в $\triangle AOB$. Тогда, пусть $BD = BF = a$, ~~$CB = b$~~ . По т. Синусов в $\triangle ABD$: $\frac{BD}{AB} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{1/\sqrt{2}}$

$$\frac{a}{\sqrt{2} \cdot 13} = \sin(90^\circ - x) \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{26} = \sin(90^\circ - x). \text{ Откуда}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{26} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{26}\right)^2}, \text{ t.k. } \alpha < 90.$$

Тогда, по т. синусов для $\triangle ABC$:

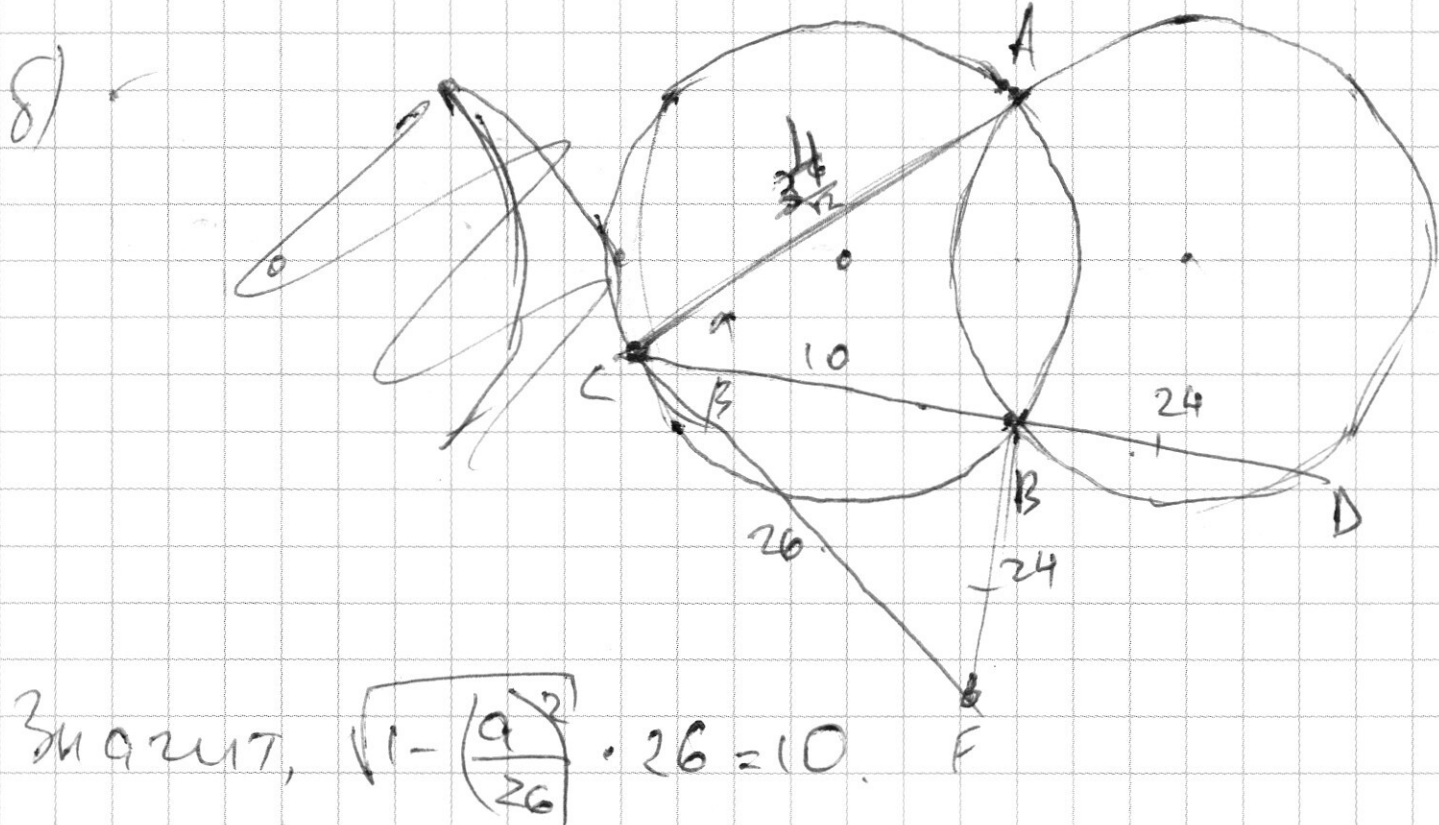
$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin \alpha}{\sin 45} = \frac{\sin \alpha}{1/\sqrt{2}} \quad \frac{BC}{\sqrt{2} \cdot 13} = \sin \alpha \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{26}\right)^2} \cdot 26.$$

$$\text{Total}, (BC)^2 + (BF)^2 = CF^2 + e$$

$$\left(1 - \frac{a^2}{2G^2}\right) \cdot 2G^2 + a^2 = CF^2$$

$$26^2 - a^2 + a^2 = CF^2 \Rightarrow CF = 26.$$



Как мы
уже
сказали,

$$BC = \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{26}\right)^2} \quad \therefore 26$$

29e $a = BD$

Значит, $\sqrt{1 - \frac{a^2}{z_0^2}} \cdot 26 = 10$.

$$26^2 - a^2 = 100$$

$a^2 = 576 \Rightarrow a = 24$, т.к. $a > 0$. АС тогда $= AD =$
 $= \frac{34}{\sqrt{2}} \Rightarrow CF = 26$. Каналы стр. 9

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итак, $S_{\Delta ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2}$

Найдем $\sin \angle ACF$: (х и в из картичке)
 $\sin(\angle ACF) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$,

$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \beta = \frac{5}{13}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$.

Значит, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) = \frac{17}{13\sqrt{2}}$.

Итак, $S_{\Delta ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2} = \frac{34}{\sqrt{2}} \cdot 26 \cdot \frac{17}{13\sqrt{2}} =$
 $= \frac{17 \cdot 34 \cdot 2 \cdot 17}{4} = 17 \cdot 17 = 289$

Ответ: 26, 206. Далее на стр. 14

22

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2 \cos 5x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \sin 2x$.

$2 \sin 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$.

$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \sin 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$.

1) Пока оставим случай равенства 0
левой скобки, разберем его позже.

Разбираемся сначала с правой скобкой:

$2 \sin 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$2 \sin 2x - \sqrt{2} (\sin 5x + \sin(\frac{\pi}{2} - 5x)) = 0$

$2 \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \cdot 2 = 0$. Далее на стр. 10

$$\sin 2x - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Итак, $\sin 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ - первая скобка,
которая может равняться 0 и $\cos 5x - \sin 5x = 0$
- второй случай равенства 0 у скобки.
т.е. решением уравнения является решение
системы:

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \text{ т.к. были совершены} \\ \sin 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 & (2) \text{ равносильные преобразо-} \\ & \text{вания} \end{cases}$$

$$(1): \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) - \sin 5x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0.$$

$$\text{т.е. } \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0. \sin \alpha = 0 \text{ при } \alpha = \pi k, \text{ значит,}$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \sin 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \Leftrightarrow$$

$$2 \sin\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} - 1,5x\right) = 0.$$

$$\text{Откуда } 3,5x - \frac{\pi}{8} = \pi k \Leftrightarrow 3,5x = \pi k + \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{2} \cdot k + \frac{\pi}{28} \quad x =$$

$$\text{Или } \frac{\pi}{8} - 1,5x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow -1,5x = \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.е. } 1,5x = -\frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, мы получили три серии решений:

$$x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k, \quad x_2 = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} k, \quad x_3 = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Проверим серии на совпадение:

$$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} s \quad | \cdot 28 \cdot 5$$

$$8\pi + 28\pi k = 5\pi + 40\pi s$$

$$3\pi = 28\pi k + 40\pi s \leftarrow \text{не бывает, т.к. } \times 4.$$

$$\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} k = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi s \quad | \cdot 28 \cdot 3$$

$$3\pi + 24\pi k = 21\pi + 56\pi s$$

$$-18\pi = 24\pi k + 56\pi s \leftarrow \text{не бывает, } \times 4$$

галочка
на стр 11

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

И последнее: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi s \quad | \cdot 20 \cdot 3$

$$3\pi + 12\pi k = 15\pi + 40\pi s$$

$$-12\pi + 12\pi k = 40\pi s \quad | : 4\pi$$

$$\cancel{3k} = 40s \quad 3k - 3 = 10s \quad (\text{или при } s:3)$$

Откуда при $k = 10s - 1$ получается, что
одни и те же решения были получены
дважды. Ответ:

$$x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k, \quad x_2 = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{7}k, \quad x_3 = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}s, \quad \text{где } s:3.$$

27

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$$

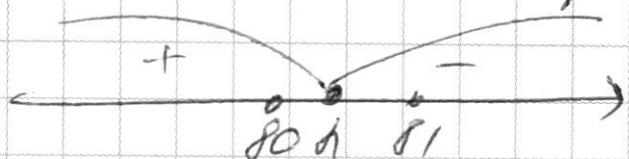
Не строго говоря, это
 $y < 85 + (3^{x-1} - 1)x$. две каких-то графиков
функций $f(x)$ и $g(x)$ и нам нужно найти
кол-во точек в области, ограниченной
ими двумя.

$$1) \quad 3^x + 4 \cdot 3^{x-1} \leq y < 85 + (3^{x-1} - 1)x$$

Рассмотрим функцию $F(x) = 85 + (3^{x-1} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{x-1}$. И рассмотрим, так же, $F'(x)$:

$$3^{x-1} - 1 = 3^x \cdot \ln 3. \quad \text{Производная берет себя}$$

так:



Очевидно, что у этой
функции один корень.

И он заключен
между значениями 0 и 1, т.к.

Значит из стр 12

ln 3 ^{не произведение} это практически 1. Если у производной есть 1 корень, то корней у нее не более двух. Найдем эти корни!

$$85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} = 0.$$

~~Убедимся~~ Убедимся, что $x=4$ и $x=85$ — корни этой функции. При $x=4$:

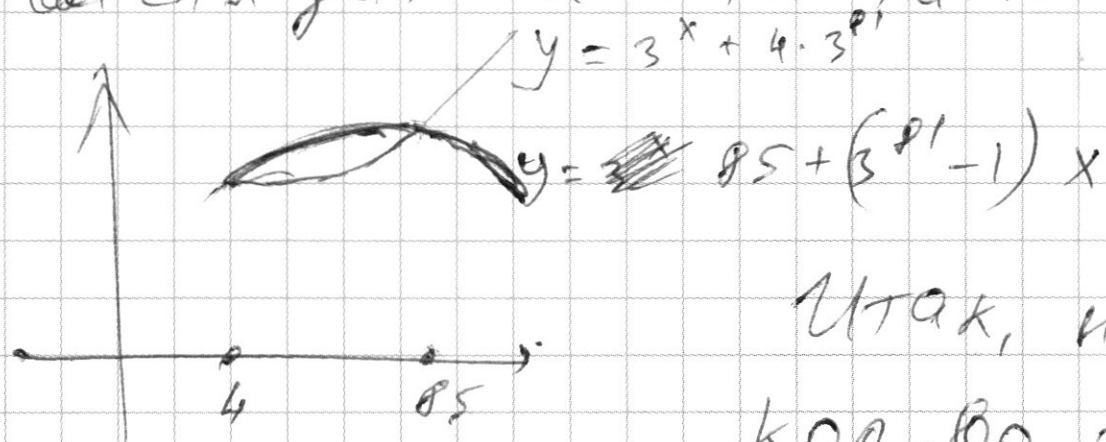
$$85 + 3^{81} \cdot 4 - 4 - 3^4 - 4 \cdot 3^{81} = 0 \leftarrow \text{верно.}$$

При $x=85$:

$$85 + 3^{81} \cdot 85 - 85 - 3^{85} - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 3^{81} \cdot 85 - 3^{81} (81 + 4) = 0 \leftarrow \text{верно. т.е. это}$$

верно! Значит как-то так:



Итак, нам нужно найти кол-во точек между ними

причем $y < 85 + (3^{81} - 1)x$ мы пересечем

в $y \leq 84 + (3^{81} - 1)x$, т.к. функции $f(x)$ и $g(x)$

принимают целочисленные значения, то я могу так сделать. Значит, нам нужно найти следующее число:

$$\sum_{4}^{85} 84 + (3^{81} - 1)x - (3^x + 4 \cdot 3^{81}) + 1 \quad (+1 \text{ в конце,}$$

т.к. если $f(x) = g(x) = a - b$, то нам подойдут

$a - b + 1$ точка.) значения целочисленные потому что каждое слагаемое в сумме будет целочисленным

Горелов 18 стр. 13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и будет показывать то, что нам нужно.

Итак,

$$\sum_{k=4}^{85} 85 + (3^{81} - 1)k - (3^{k+4} \cdot 3^{81}) =$$

$$85 \cdot 82 + 3^{81} (4 + 5 + \dots + 85) - (4 + 5 + \dots + 85) -$$

$$- (3^4 + 3^5 + \dots + 3^{85}) - 4 \cdot 3^{81} \cdot 82 =$$

$$= 85 \cdot 82 - 4 \cdot 3^{81} \cdot 82 + 3^{81} \cdot \left(\frac{85 \cdot 86}{2} - 6 \right) - \left(\frac{85 \cdot 86}{2} - 6 \right) -$$

$$= \left(\frac{3^{86} - 1}{2} - 40 \right) - 4 \cdot 3^{81} \cdot 82 =$$

$$= 85 \cdot 82 - 4 \cdot 3^{81} \cdot 82 + 3^{81} \cdot 43 \cdot 85 - 6 \cdot 3^{81} - 43 \cdot 85 + 6$$

$$- \frac{3^{86} - 1}{2} + 40 \Rightarrow \text{(сначала считаем маленькие слагаемые, а потом уже ит } 3^{81})$$

$$= 85 \cdot 82 - 43 \cdot 85 + 6 + 40 = 33 \cdot 85 + 46 = 3561$$

А теперь и большие:

$$3^{81} \cdot 43 \cdot 85 - 4 \cdot 82 \cdot 3^{81} - 6 \cdot 3^{81} - \frac{3^{86} - 1}{2} =$$

$$= 3^{81} (3655 - 328 - 6) - \frac{3^{86} - 1}{2} = 3^{81} \cdot 3221 - \frac{3^{86} - 1}{2}$$

Итак, найдем значение числа 25 (удвоенной суммы):

$$7122 + 3^{81} \cdot 6442 - 3^{86} + 1 = 7123 + 3^{81} (6442 - 243)$$

$$= 7123 + 3^{81} (6442 - 243) = 7123 + 3^{81} \cdot 6199 = \text{здесь на стр 14}$$

~~А/~~ И т.к. мы получили убоику
 ширину, то искомого числа это
 $\frac{7123 + 3^{81} \cdot 6199}{2}$. Это число действительно
 целое, т.к. в числителе два четных числа.

≈ 6
 Но так же $S_{\Delta ACF} = \frac{DA \cdot AC}{2}$, т.к.
 $DE \parallel AC$ и $DA \perp DE$
 Откуда $S = \frac{\frac{34}{\sqrt{2}} \cdot \frac{34}{\sqrt{2}}}{2} = 17^2 = 289$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2y+x)(y-x)-4(x+2y)$$

$$(xy+x)(y-x-4)$$

$$y=-x$$

$$x=-2y$$

$$\left(\frac{xy}{y^2}\right) \lg y = (xy)$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^4}{(x+4)^2}} \lg(x+4) = (-x) \lg(x(x+4))$$

$$y = x^{\frac{2}{3}} \lg(x+4) - \lg\left(\frac{x^2}{x+4}\right) = \lg(-x)$$

$$\lg(x+4) \left(\lg\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) - \lg(-x)\right) = \lg^2(-x)$$

$$\lg(x+4) = a = \lg\left(\frac{x^3}{(x+4)^2}\right) = \lg^2(-x)$$

$$\lg(-x) = a = \lg(x+4) = 2b$$

$$\lg(x+4) = b$$

$$x = -2$$

$$(x+4)^2 = -x$$

$$x^2 + 8x + 16 = -x$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$b \cdot (3a - 2b) = a^2$$

$$3ab - 2b^2 = a^2$$

$$0 = a^2 - 3ab + 2b^2$$

$$(a-2b)(a-b) = 0$$

$$1) a = b$$

$$2) a = 2b$$

58

11, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 15 \\ \hline 150 \\ \times 10 \\ \hline 1500 \\ \hline 1650 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2540 \\ \times 68 \\ \hline 16280 \\ \times 1520 \\ \hline 38560 \\ \hline 171880 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times 43 \\ \hline 174 \\ \times 20 \\ \hline 1160 \\ \hline 2514 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3220 \\ \times 32 \\ \hline 6440 \\ \times 960 \\ \hline 30880 \\ \hline 104540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 129 \\ \times 10 \\ \hline 1290 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 5 \\ \hline 305 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 12 \\ \hline 250 \\ \times 100 \\ \hline 12500 \\ \hline 15000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times 43 \\ \hline 174 \\ \times 20 \\ \hline 1160 \\ \hline 2514 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 80 \\ \hline 640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times 15 \\ \hline 990 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations on grid paper:

Factorizations: $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$

Binomial coefficients: $C_8^3 \cdot C_5^1 + C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$

Calculus: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot 5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 \cdot 3$

Trigonometric identities:

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Substitution and simplification:

$$\cos 0 + \cos 0 = 2 \cos 0 \cdot \cos 0$$

$$\cos \pi + \cos 0 = 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos$$

$$\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y =$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

~~$$2y^2 - y^2 - xy^2 - 4y - 8y$$~~

$$x = -2y$$

$$2y^2 - 2y^2 - 4y^2 - 8y$$

$$(x+2y)$$

$$(2y+x)(y-x) - 4(x+2y) = 0$$

$$(x+2y)(y-x-4) = 0.$$

~~$$x = -2y$$~~

$$\lg y$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right) \lg y$$

$$= (-2y) \lg(-2y^2)$$

$$y = (x+4)$$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) \lg(x+4) = (-x) \lg(-x(x+4))$$

$$2y^2 - x = 0$$

$$y = 2, 1$$

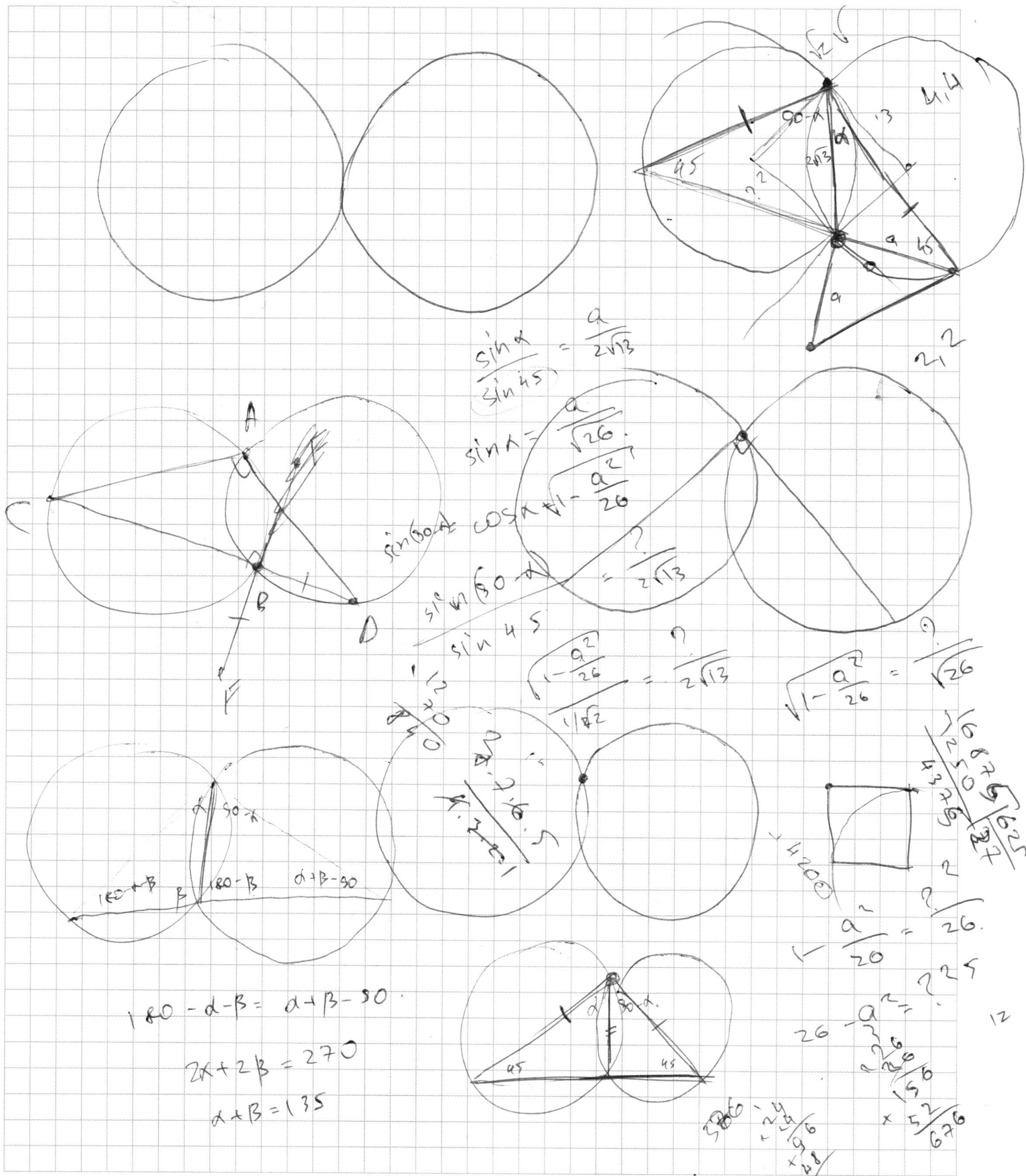
$$2y^2 + 2y^2 - 4y^2 - 8y - 8y$$

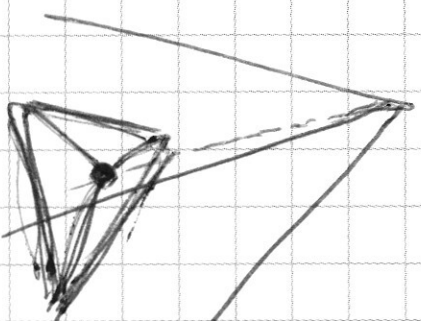
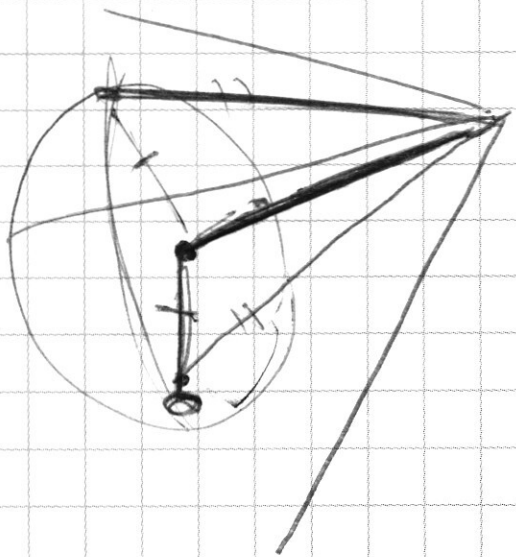
$$(2^4) \lg$$

$$\lg_{10} y = a$$

$$\begin{aligned} & 2 \lg y \cdot \lg\left(\frac{x^2}{y}\right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x) \\ & \lg y \cdot 2 \cdot \left(\lg \frac{x^2}{y}\right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x) \\ & \lg y \cdot 2 \cdot (\lg x^2 - \lg y) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x) \\ & \lg y \cdot 2 \cdot (2 \lg x - \lg y) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x) \\ & \lg y \cdot (4 \lg x - 2 \lg y) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x) \end{aligned}$$

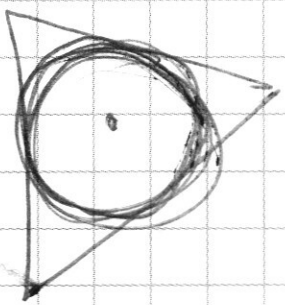
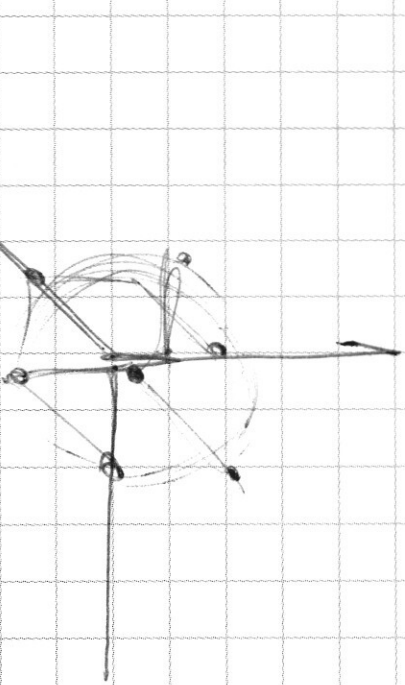
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$y_{07} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} (16y^2) \cdot 19y &= 19(2y^2) \cdot 19y \\ 19(16y^2) \cdot 19y &= 19(2y^2 + 19y) \\ 19(16 + 2 \cdot 19y) \cdot 19y &= 19(2 + 19y) \end{aligned}$$



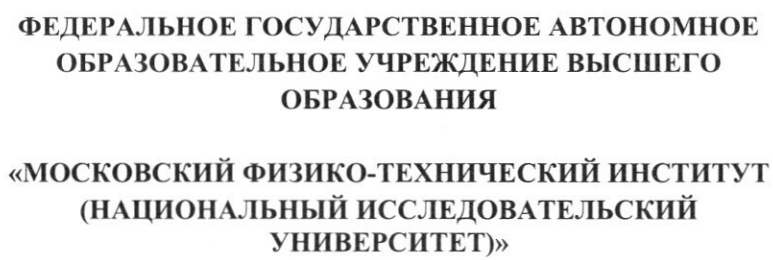
$$19y \cdot 19(16 + 2 \cdot 19y) = 19^2 + 3 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 19y + 2 \cdot 19^2 y$$

$$19y(19 \cdot 16 - 3 \cdot 19^2) = 19^2 \cdot 2$$

$$19y = \frac{19^2 \cdot 2}{19 \cdot 16 - 3 \cdot 19^2} = \frac{19^2 \cdot 2}{19 \cdot 16 - 19^2} = 19^2$$

$$19^2 = 2 \cdot 19^4$$

$$(2^2) \cdot 19^2 = (-2) \cdot 19$$



$$\cos 7x + \cos 3x = \cancel{\cos 5x} = 2 \cos 5x \sin 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cancel{\sin} \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\therefore (\cos 5x - \sin 5x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten work on a grid background, including mathematical derivations, a geometric diagram, and a coordinate plot.

Top Left: $y \geq 3x + 4 - 301$

Top Middle: $85 + (301 - 1)x > 3x + 4 - 301$

Top Right: $85 + (301 - 1)x > 3x + 4 - 301$

Middle Left: $(301 - 1)x - 3x + 85 - 4 - 301$

Middle Center: $301 - 1 - 3x \cdot \ln 3 = 0$

Middle Right: $301 - 1 = 3x \cdot \ln 3$

Bottom Left: $y \geq 3x + 4 - 301$

Bottom Middle: $y \geq 85 + (301 - 1)x$

Bottom Right: $y \geq 5 - 301$

Geometric Diagram (Left): A triangle with vertices labeled A , B , and C . A point D is marked on the side BC . A line segment AD is drawn. A horizontal line segment is labeled a .

Coordinate Plot (Right): A graph showing a curve and a line. The curve is labeled $x = 81$. The line is labeled $x = 80$. The intersection point is labeled 81 .

$$\frac{1}{1} + \frac{5}{1} = \frac{8}{1} \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} \quad \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$7 + 28k = 1 + 40m$$

$$20.3 \cdot \frac{11}{5} + \frac{11}{2} \cdot 7 = 20.3 \cdot \frac{11}{5} + \frac{11}{2} \cdot 7$$

$$3\pi + 24\pi k - 21\pi + 18\pi + 24\pi k = 56\pi \frac{1}{2}$$

$$\frac{28}{11} + \frac{2}{11}k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2} - \frac{28}{11} = -\frac{53}{22}$$

$$58 + 3(-x)$$

$$y_2 = 3x + 4.381$$

$x = 3$
 $x = 4.3$
 $x = 81$

381 = 9

3x + 4

$$3\pi + 12k = 15\pi + 40\pi$$

12TK = 40TS

43

$$5818 = 2 \cdot 2909$$

$$\sin^2 u_1 - \sqrt{2} \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x - \sqrt{2} \cdot \left(\sin 5x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) \right) = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sin \frac{\pi}{2} = C$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

5 4 3 2 1

$$y^{2,3} + 4.8^{18} \times (1 - 1.1) \times y^{2,85} + (3 - 1) \times$$

$$x = 4$$

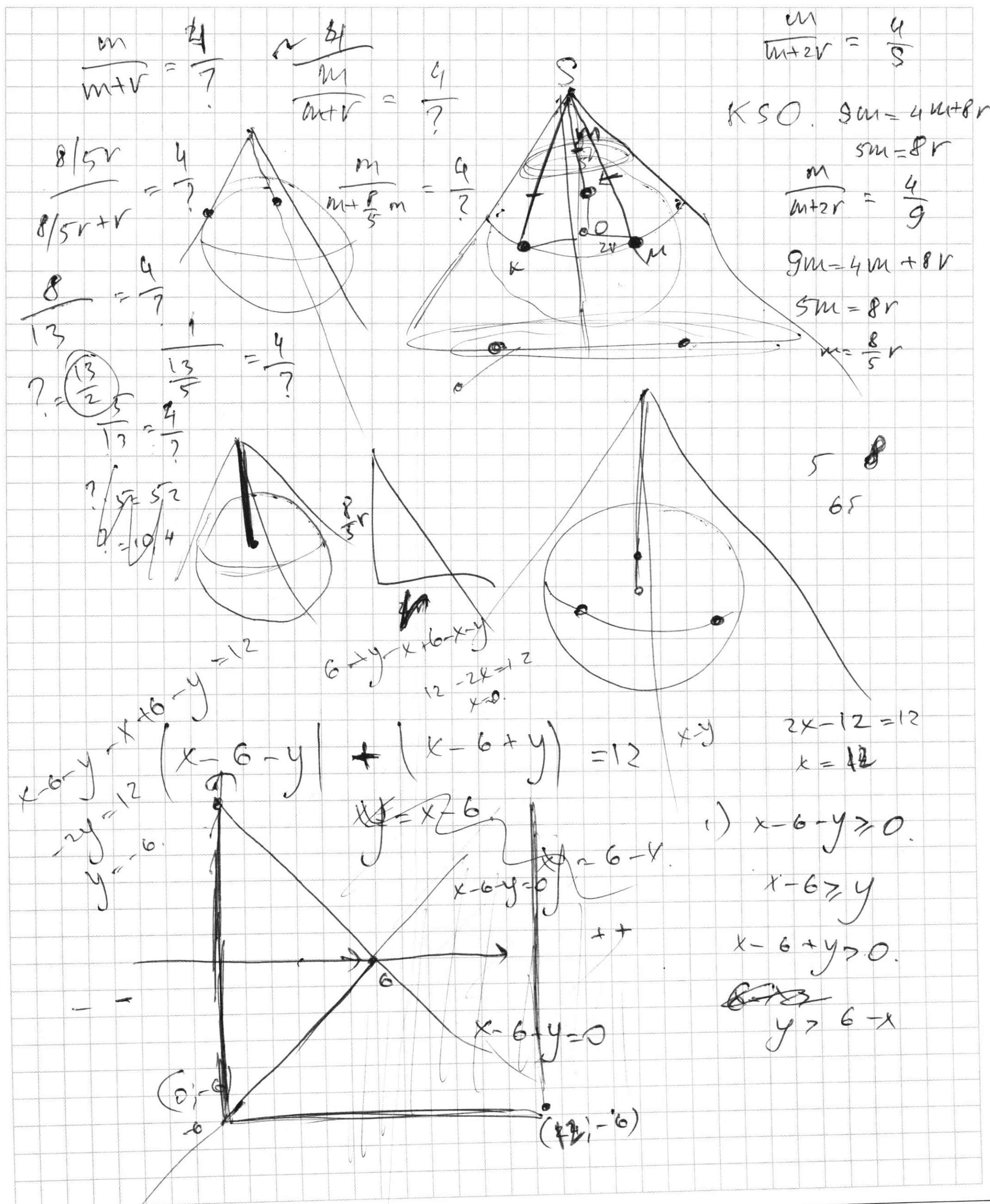
$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\cos 5x \cdot \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sin 5x \cdot \sin 2x$$

$$\begin{pmatrix} \sin u_1 \\ \sin u_2 \\ \sin u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 5x - \sin 5x \\ \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x) \\ \cos 5x + \sin 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$) \cos x = \sin x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12.$$

$$1) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq y+6 \\ x \geq 6-y \end{cases} \Rightarrow x \geq 12$$

$$|x-y| + |x+y| = 12$$

$$x-6-y=0.$$

$$y=x-6.$$

$$x-6+y=0.$$

$$x+y=6.$$

$$(x-6)^2 - (y-6)^2 = 4$$

$$1) x-6 \geq y$$

$$\Rightarrow 2x-12=12$$

$$y \geq 6-x.$$

$$x=12$$

$$x-6-y=0$$

$$x-6-y-x+6-y=12$$

$$-2y=12$$

$$-y=6.$$

$$y=-6.$$

$$12 - x + 6 + y - x - y + 6 = 12$$

$$-2x=0.$$

$$x=0$$

$$-x+6+y+6-x-y=12$$

$$12-2x=12$$

$$x=0$$