

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$

$\underline{a_1} \ \underline{a_2} \ \underline{a_3} \ \underline{a_4} \ \underline{a_5} \ \underline{a_6} \ \underline{a_7} \ \underline{a_8}$ — искоемые числа

Рассмотрим, сколькими способами можно расставить четвёрки 5 в этом числе:

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

После этого у нас останется 4 места. Среди них мы сможем расставить тройки 3:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1} = 4 \text{ — способами.}$$

И на оставшемся месте будет 1, $\Rightarrow C_1^1 = 1$ способ

$$N = C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = 70 \cdot 4 \cdot 1 = \underline{280}$$

Ответ: 280 чисел

②
$$\begin{cases} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \\ \cos 10x = \sin(2(\frac{\pi}{4} - 5x)) = 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) \\ \sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x \\ \cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x \end{cases}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\begin{cases} 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - 2\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) = 0 \\ \cos 5x - \sin 5x = \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) + \sin(-5x) = 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \end{cases}$$

$$\cos 2x \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) - \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 5x) (\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)) = 0$$

$$\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi + \frac{\pi}{4}}{4} - 5x\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{5\pi}{8}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cos\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{5\pi}{8}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{3}{2}x\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{5\pi}{8}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 5x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{7}{2}x - \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{7}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \right\}$

③ $\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$

$\frac{x^4}{y^2} \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y \geq 0 \quad \forall \text{ решения} \Rightarrow (-x) \lg(-xy) \geq 0 \quad \forall \text{ решения} \Rightarrow$

$y \neq 0$ (из знаменателя)
 $y > 0$ (из логарифма) $\Rightarrow \boxed{y > 0} \Rightarrow -x \geq 0$, но $x \neq 0$ (из логарифма)
 Пусть $x = -x, x \geq 0$ $\Rightarrow \boxed{-x > 0}$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = x \lg(xy)$$

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y$$

$$x^4 \lg y - 2 \lg y = x \lg x \cdot x \lg y$$

$$\begin{cases} x = 10^{\lg x} \\ y = 10^{\lg y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 10^{3 \lg y \lg x} \cdot 10^{-2 \lg^2 y} &= 10^{\lg^2 x} \\ 10^{3 \lg y \lg x - 2 \lg^2 y} &= 10^{\lg^2 x} \\ \uparrow \\ 3 \lg y \lg x - 2 \lg^2 y &= \lg^2 x \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

По т. Виета:

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \lg y^2 \\ \lg x = \lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 & (1) \\ x = y & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение:

1) При $x = -y^2$

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y(y-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 - \text{не удовл. исходному} \\ y=2 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \left(\frac{1}{y^2} \text{ не сущ. при } y=0 \right)$$

$$\underline{(x; y) = (-2; 2)}$$

2) При $x = -y^2$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y(y-2)(y^2+y-4) = 0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow \underline{(x; y) = (-4; 2)}$$

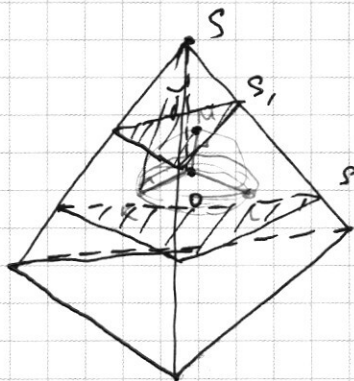
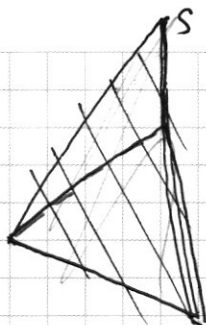
$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 - \text{не удовл. исходному} \\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = -\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 \end{cases} \left(\lg y \notin \mathbb{R} \text{ при } y < 0 \right)$$

$$\underline{(x; y) = \left(-\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2, \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)}$$

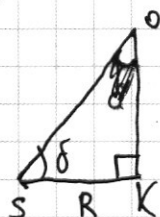
Ответ: $(x; y) \in \{(-2; 2); (9-\sqrt{17}, \frac{\sqrt{17}-1}{2}); (-4; 2)\}$

④



S_1, S_2 - образованные сечения

Рассмотрим $\triangle SKO$:



$$\cos \delta = \frac{R}{SO}$$

Рассмотрим теперь пирамиды $S-S_1$ и $S-S_2$. $S_1 \parallel S_2$, т.к.

$S_1 \perp SO$ и $S_2 \perp SO$

$S-S_1$ и $S-S_2$ - гомотетичны (подобны)

Пусть $SO \cap S_1 = O'$
 $SO \cap S_2 = O''$

$$\Rightarrow \left(\frac{SO'}{SO''} \right)^2 = \frac{S_1}{S_2}$$

$$\frac{SO-R}{SO+R} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$$

$$\frac{1-\cos \delta}{1+\cos \delta} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{2}{3}$$

$$3-3\cos \delta = 2+2\cos \delta$$

$$\cos \delta = \frac{1}{5} \Rightarrow \delta = \arccos \frac{1}{5}$$

(KLM) - посередине между S_1 и $S_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ среднее сечение усеч. пирамиды S_1+S_2

$$S(KLM) = \frac{4+9}{2} = \frac{13}{2}$$

⑤ Рассмотрим ~~первое~~ уравнение:

$$|x-6+y| + |x-6-y| = 12$$

$$1) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \Rightarrow |x-6-y| = x-6-y \\ x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq 6-x \Rightarrow |x-6+y| = x-6+y \end{cases}$$

$$12 = 2(x+6) \Rightarrow \boxed{x=12}$$

при $y \in [-6; 6]$

$$2) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \Rightarrow |x-6-y| = x-6-y \\ x-6+y \leq 0 \Rightarrow y \leq 6-x \Rightarrow |x-6+y| = 6-x-y \end{cases}$$

$$-2y = 12 \Rightarrow \boxed{y=-6}$$

при $x \in [0; 12]$

$$3) \begin{cases} x-6-y \leq 0 \Rightarrow y \geq x-6 \Rightarrow |x-6-y| = y+6-x \\ x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq 6-x \Rightarrow |x-6+y| = x-6+y \end{cases}$$

$$2y = 12 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

при $x \in [0; 12]$

$$4) \begin{cases} x-6-y \leq 0 \Rightarrow y \geq x-6 \Rightarrow |x-6-y| = y+6-x \\ x-6+y \leq 0 \Rightarrow y \leq 6-x \Rightarrow |x-6+y| = 6-y-x \end{cases}$$

$$2(6-x) = 12 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

при $y \in [-6; 6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

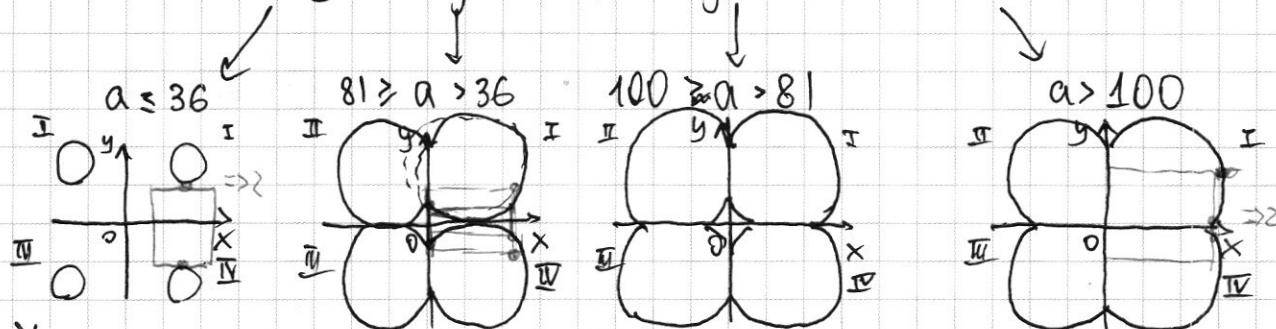
↓
Это квадрат ~~по~~ по $y \in [-6; 6]$
по $x \in [0; 12]$ (1)

Рассмотрим второе уравнение:

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

Без модулей это была бы окружность радиуса $\sqrt{a}$.

Но при учёте модулей мы должны отразить её отн. Ox, Oy, O



У квадрата никогда нет общих точек с II и III

1) $a \leq 36$

Если у квадрата нет общих точек с I $\Rightarrow$ нет и с IV

Если у квадрата 2 общих с I $\Rightarrow$ 2 общих с IV

Квадрат должен касаться I снизу $\Rightarrow 8 - a = 6$

$$\boxed{a=2}$$

2) ~~Нам не подходит, $81 \geq a > 36$~~

~~2 корня будет~~ Нам этот случай не подходит, т. к. если $y_I(x=0) \leq 6$,

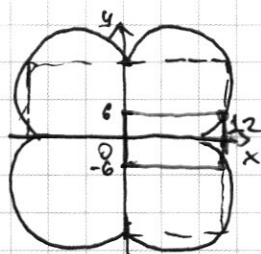
Если $y_I(x=0) > 6$, $y_I(x=12) > 6$,
то 2 корня между (0 и 12)

То же и на IV $\Rightarrow$ 4 корня

то $y_I(x=12) \leq 6$
↓
4 { 2 корня на I части
2 корня на IV части

3) Аналогично с 12

4) $a \geq 100$



$\Rightarrow$ на I одно из решений для y при $x=12$ должно быть >0 и ≤ 6

$$(12-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$|y|-8 = \pm \sqrt{a-36}$$

$$|y| = 8 \pm \sqrt{a-36}$$

$$y > 0 \Rightarrow y = 8 \pm \sqrt{a-36}$$

$$y < 0 \Rightarrow 8 - \sqrt{a-36} < 6$$

$$2 < \sqrt{a-36} \quad a > 40$$

$$8 - \sqrt{a-36} > 0$$

$$\sqrt{a-36} < 8$$

$$a-36 < 64$$

$$a < 100, \text{ но } a \geq 100 \Rightarrow \text{нет.}$$

$\Downarrow$

Ответ: $a=2$

7) $\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + x(3^{81} - 1) \end{cases} \Leftrightarrow y \in [a; 6)$

Если $a \geq b$, то $\nexists y \in [a; 6)$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + x \cdot 3^{81} - x \quad \text{— условие существования } y$$

$$3^x + (4-x) \cdot 3^{81} < 81 + (4-x)$$

$$(3^x - 3^4) + (4-x)(3^{81} - 1) < 0$$

$$3^4(3^{x-4} - 1) < (x-4)(3^{81} - 1)$$

При $x < 4 \Rightarrow$ неверно. ~~так как $3^{x-4} < 1$ и $3^{81} - 1 > 0$~~

$$x=4 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow \text{неверно}$$

$$x=5 \Rightarrow \text{верно} \Rightarrow x_{\min} = 5$$

При $x=84 \Rightarrow$ равенство $(3^4 \cdot (3^{81} - 1)) \Rightarrow$ неверно

$$x=86 - \text{неверно}$$

$$x \in [5; 84]$$

Между этими числами график равенств не могло быть, т.к. обе функции монотонно растут

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \in [a; b) \Rightarrow N_y = b - a = 85 + x \cdot 3^{81} - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$$

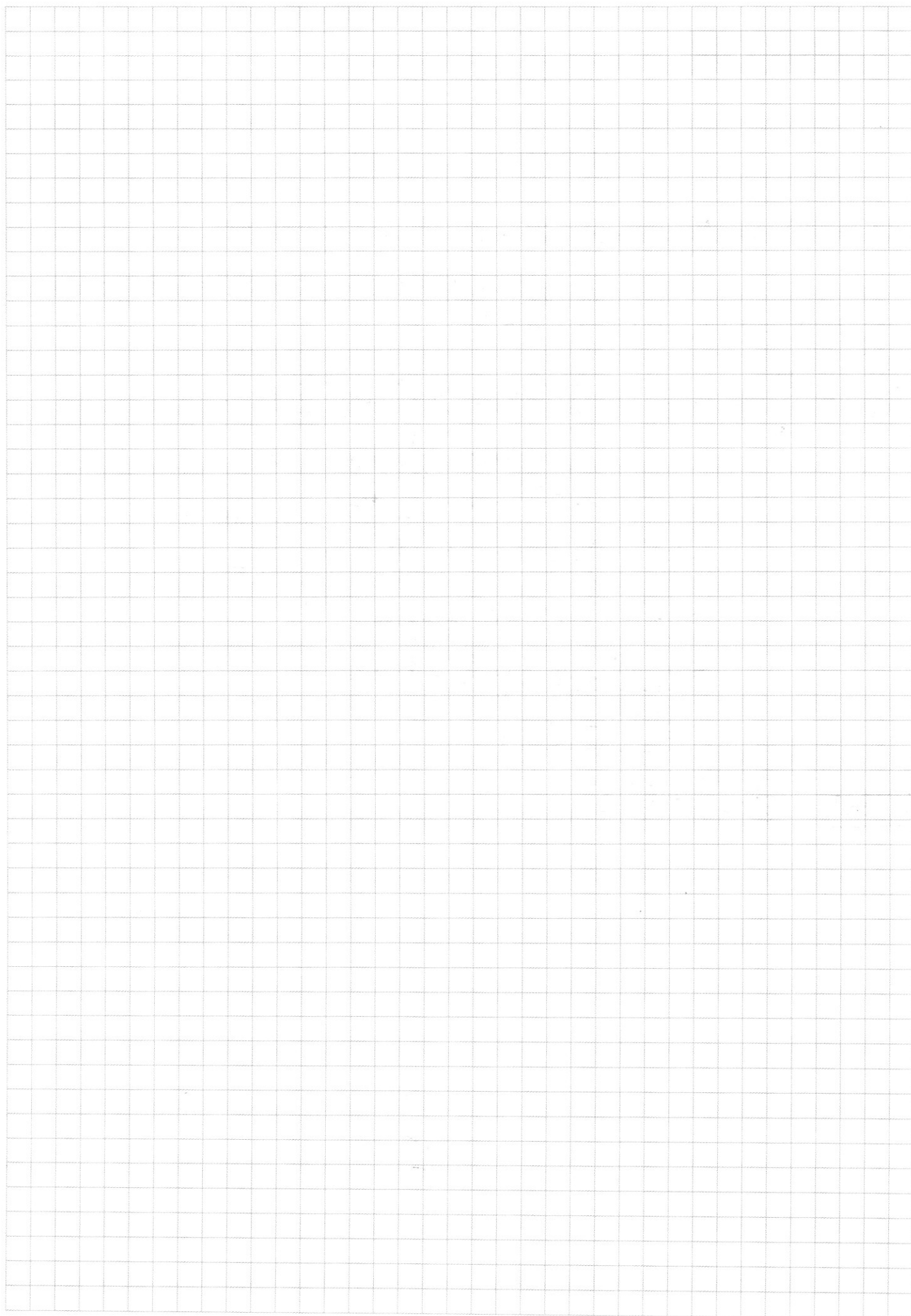
кол-во y , удовлетворяющих системе при данном x

$$N_y = (3^{81} - 1)(x - 4) - 3^x + 3^4$$

$$\boxed{N_{\text{рез}}} = \sum_{x=5}^{84} N_y = (3^{81} - 1) \sum_{x=5}^{84} (x - 4) - \sum_{x=5}^{84} 3^x + 3^4 \sum_{x=5}^{84} 1 =$$

$$\begin{aligned} & \text{арифм. прогр.} \quad \text{геом. прогр.} \quad \text{кол-во} \\ & = (3^{81} - 1) \cdot \frac{1 + 80}{2} \cdot 80 - \frac{3^{85} - 3^5}{3 - 1} + 3^4 \cdot 80 = \\ & = (3^{81} - 1) \cdot 81 \cdot 40 - \frac{3^{85}}{2} + \frac{3^5}{2} + 3^4 \cdot 80 = \\ & = (3^{81} + 1) \cdot 81 \cdot 40 - \frac{3^{85}}{2} + \frac{3}{2} \cdot 81 = 2 \cdot 81 \cdot 40 \\ & = 40 \cdot 3^{85} + 40 \cdot 3^4 - \frac{3^{85}}{2} + \frac{3}{2} \cdot 3^4 = \\ & = \boxed{\frac{79}{2} \cdot 3^{85} + \frac{83}{2} \cdot 3^4} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{79}{2} \cdot 3^{85} + \frac{83}{2} \cdot 3^4$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \\ x = -y^2 \\ x = -y \end{cases}$$

$$I \quad 2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y(y - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ — нет} \\ y = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (x; y) = (-2; 2) \end{cases}$$

$$II \quad 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 8y^2 + 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 8y + 8) = 0$$

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 8y + 8 \\ \underline{y^3 - 2y^2} \\ 8y - 16 \end{array}$$

$$8y - 16 - 16 + 8 = 0$$

$$y = 2 \text{ — корень}$$

$$y(y - 2)(y^2 + y - 4) = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

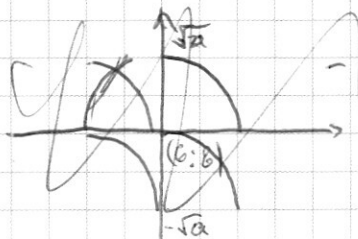
$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ — нет} \\ \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \quad | y - 2 \\ \underline{y^3 - 2y^2} \\ y^2 - 6y + 8 \\ \underline{y^2 - 2y} \\ -4y + 8 \\ \underline{-4y + 8} \\ 0 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (x; y) &= (-2; 2) \\ (x; y) &= \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right) \end{aligned}}$$

$$5) \begin{cases} |x-y-6| + |x+y-6| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

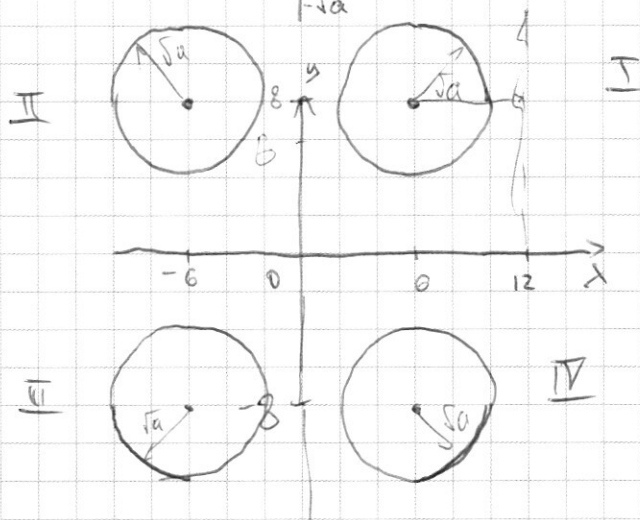
График (2):



$$|y|-8 = \sqrt{a}$$

$$|y| = 8 + \sqrt{a}$$

- 4 четверти окружности



- 4 ~~четверти~~ окружности, если $\sqrt{a} < 6$
 $a < 36$

$$|x-6|-y + |(x-6)+y| = 12$$

Рассмотрим по четвертям:

I: $x > 0, y > 0$

$$x < 6 \Rightarrow -(x-6) - y$$

$$1) x > 6 \Rightarrow x-6 > 0 \Rightarrow |x-6|+y = (x-6)+y$$

$$\begin{cases} y > (x-6) \Rightarrow (x-6)-y < 0 \Rightarrow |(x-6)-y| = y-(x-6) \\ y < (x-6) \Rightarrow (x-6)-y > 0 \Rightarrow |(x-6)-y| = (x-6)-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 12 \Rightarrow y = 6, x < 12 \\ (x-6) = 12 \Rightarrow x = 12, y < 6 \end{cases}$$

II: $x < 0, y > 0$

$$(x-6) < 0 \Rightarrow |x-6|-y = y-(x-6)$$

$$y > 6-x \Rightarrow |x-6|+y = (x-6)+y$$

$$y < 6-x \Rightarrow |(x-6)+y| = (x-6)-y$$

$$2y = 12 \Rightarrow y = 6, x < 0 \text{ нет}$$

$$0 = 12 - \text{нет}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Как не подходит, т.к. на $x=0$ не делится
Корень $x=0$ должен лежать между -6 и 6
2 корня y -я (1)

$$36 + (y-8)^2 = a$$

$$|y-8| = \sqrt{a-36}$$

$$|y| = 8 \pm \sqrt{a-36}$$

$$y = \pm(8 \pm \sqrt{a-36})$$

$$36 + (y-8)^2 = a$$

$$y-8 = \pm\sqrt{a-36}$$

$$y = 8 \pm \sqrt{a-36} > 0 < 6$$

$$2 \begin{cases} 8 - \sqrt{a-36} \geq 0 \\ 8 - \sqrt{a-36} \leq 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{a-36} \leq 8$$

$$a-36 \leq 64$$

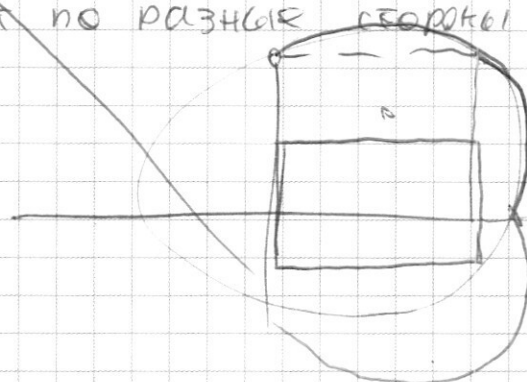
$$a \leq 100$$

Если y_1 и y_2 лежат в $(-6; 6)$, то y_3 и y_4 не лежат по разные стороны от $y=0$
Только y_3, y_4

$$8 - \sqrt{a-36} < 6$$

$$2 < \sqrt{a-36}$$

$$4 < a-36$$



2) Как не подходит, т.к. всегда $x=0$ либо 2, либо 4 корня

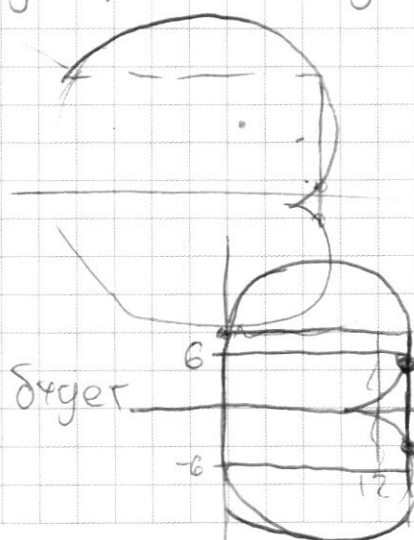
$x=0$ и $x=12$

будут лежать в $(-6; 6)$

и $x=0$ аналогично
либо 0, либо 4, либо 8

3) Аналогично (2)

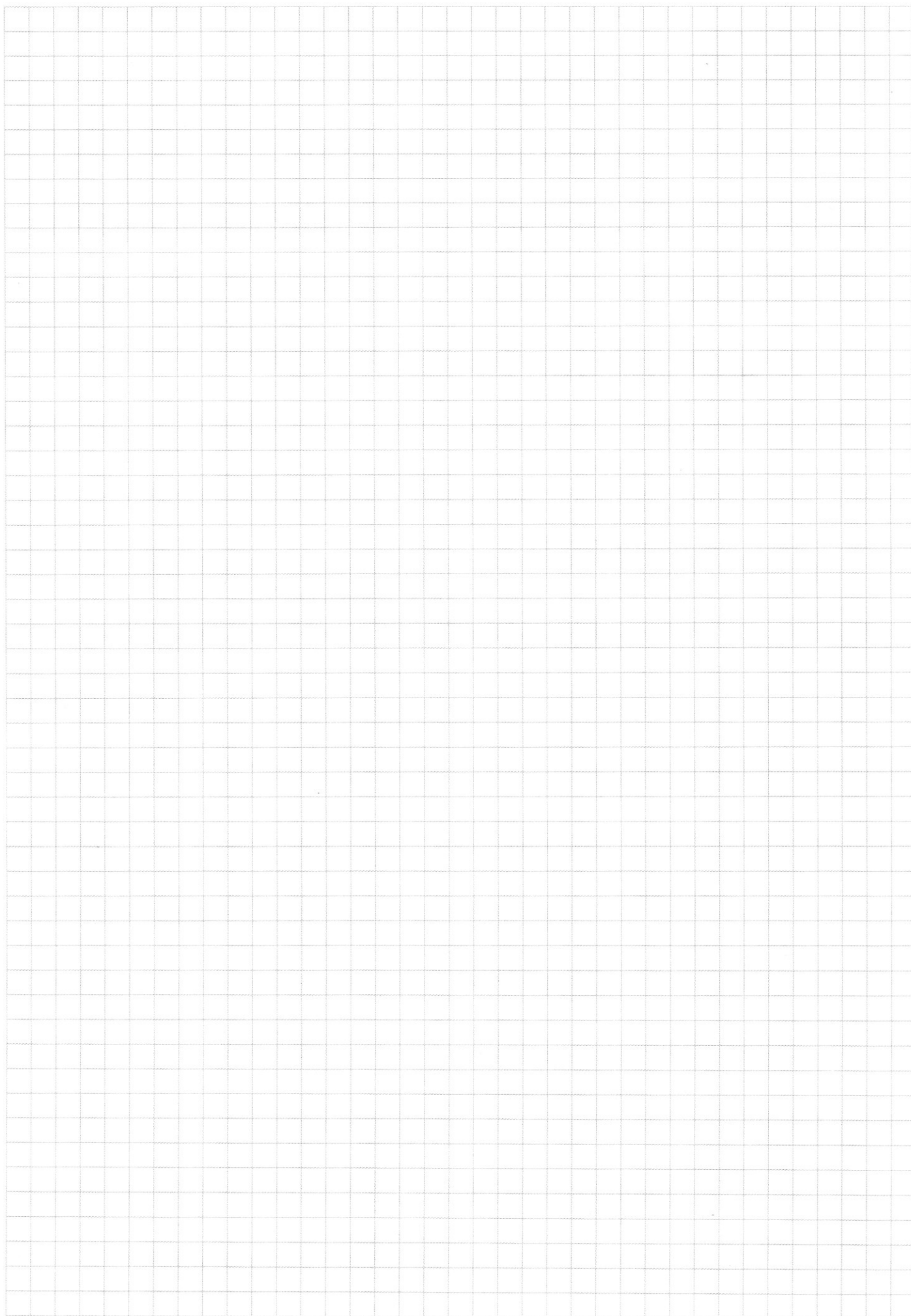
4) Тогда y нас будет



на $x=12$ 2 точки

$$4 < a-36$$

$$a > 40, a > 100 \Rightarrow a > 100$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right) - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x + \sin(-5x)) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + \sin(-5x)$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \sin\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cos 2x \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos 10x = \sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) (\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{7}{2}x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2}x\right)$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 5x = \pi n \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7}{2}x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{7}{2}x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2 - \cos \beta &= \cos \alpha + \sin(\pi + \beta) = \\ &= \cos \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}}{2}\right) = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x &= \frac{\pi}{4} + \pi n \\ \frac{7}{2}x &= \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x &= \frac{\pi}{4} + \pi n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n \\ x &= \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7} n, n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} n \end{aligned}$$

$$① \quad 16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$$

$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 - \text{КОЛ-ВО ВАРИАНТОВ ЧЕТВЕРЕК}$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 - \text{КОЛ-ВО ВАРИАНТОВ ТРОЕК}$$

$$\frac{C_8^4}{C_8^3} = \frac{70}{56} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ \hline 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$C_8^0 = 1$$

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

$$C_8^1 = 8$$

$$C_8^3 = 56$$

$$C_8^4 = 70$$

$$C_8^5 = 56$$

$$C_8^6 = 28$$

$$C_8^7 = 8$$

$$C_8^8 = 1$$

$$③ \quad \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$$

$y > 0$
~~По определению лог. функции~~

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{x^4}{y^2} \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y \geq 0$$

$$(-x) \lg(-xy) > 0 \Rightarrow -x > 0$$

$$-x > 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = x \lg(xy) = x \lg x + x \lg y$$

$$\left(\frac{x^3}{y^2}\right) \lg y = x \lg x$$

$$x^3 \lg y - 2 \lg y = x \lg x$$

$$x = 10 \lg x; y = 10 \lg y$$

$$10^3 \lg x \lg y - 2 \lg^2 y = 10 \lg^2 x$$

$$3 \lg x \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0 \quad (1)$$

$$\lg^2 x - 2 \lg y$$

$$(\lg^2 x - 2 \lg y)(\lg x - \lg y) = 0$$

по + Виета

$$0 = 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y \neq 0 = F'$$

$$F' = 2y - x - 8 = 0$$

$$y(2y - x - 8) + C = 0$$

$$2y^2 - x(x+4) - x(x+4) = 0$$

$$2y^2 - 4y = (x+4)(x+4) = 0$$

$$F =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \in [4; 85]$$

$$y \in [a; 6) \Rightarrow N_y = 6 - a = 85 + x \cdot 3^{81} - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 81 + (4 - x) + (x - 4) \cdot 3^{81} - 3^x =$$

$$= (3^{81} - 1)(x - 4) + (3^x - 3^4)$$

$$N_p = \sum_{x=4}^{85} N_y(x) = (3^{81} - 1) \sum_{x=4}^{85} (x - 4) - \sum_{x=4}^{85} 3^x + \sum_{x=4}^{85} 3^4 =$$

$$= (3^{81} - 1) \frac{81 \cdot 41}{2} - \frac{6 \cdot (9^{82} - 1)}{9 - 1} + 3^4 \cdot 82$$

$$\frac{3^4 (3^{82} - 1)}{2}$$

$$= (3^{81} - 1) \cdot 81 \cdot 41 - \frac{81(3^{82} - 1)}{2} + 3^4 \cdot 82$$

$$= (3^{81} + 1) \cdot 81 \cdot 41 - \frac{81(3^{82} - 1)}{2} =$$

$$= 81 \left(3^{81} \cdot 41 + 41 - \frac{3^{82}}{2} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 81 \left(\left(41 - \frac{3}{2} \right) \cdot 3^{81} + 40 \frac{1}{2} \right) =$$

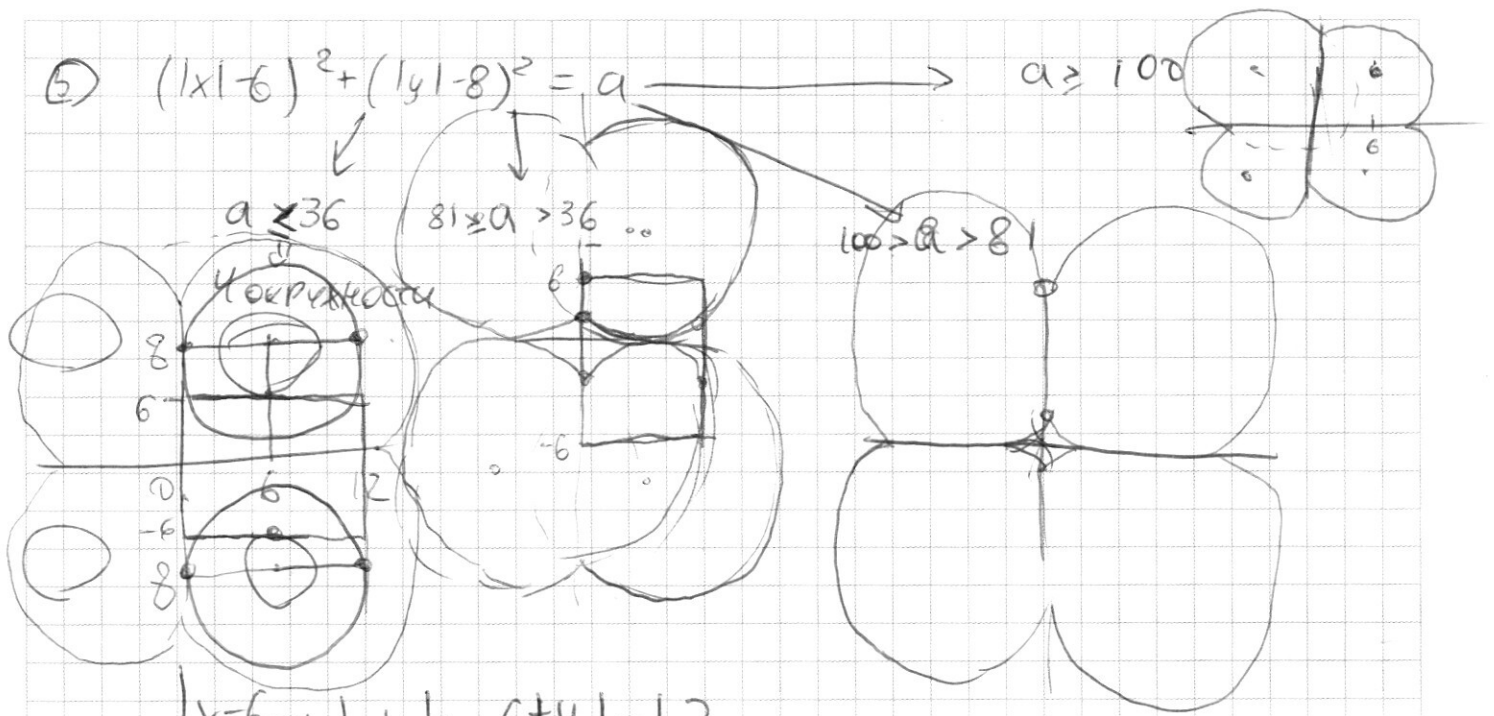
$$N_{\text{рез}} = \frac{81}{2} \cdot 3^{85} - \frac{81}{2} \cdot 3^4$$

Тогда ~~каждая~~ окружность должна касаться $y=6$,

$$\text{а в IV} \rightarrow y=-6$$

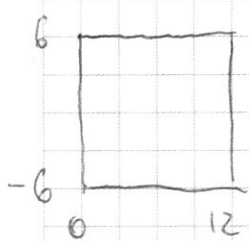
$$R=2 \Rightarrow a=4$$

$$6) (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \rightarrow a \geq 100$$



$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \Rightarrow x-6-y \\ x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq 6-x \Rightarrow x-6+y \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x-6) = 12 \Rightarrow x = 12 \\ -2y = 12 \Rightarrow y = -6 \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \Rightarrow x-6-y \\ x-6+y \leq 0 \Rightarrow y \leq 6-x \Rightarrow 6-x-y \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x-6) = 12 \Rightarrow x = 12 \\ -2y = 12 \Rightarrow y = -6 \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} x-6-y \leq 0 \Rightarrow y \geq x-6 \Rightarrow y+6-x \\ x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq 6-x \Rightarrow x-6+y \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 12 \Rightarrow y = 6 \\ 2(6-x) = 12 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \\ 4) & \begin{cases} x-6-y \leq 0 \Rightarrow y \geq x-6 \Rightarrow y+6-x \\ x-6+y \leq 0 \Rightarrow y \leq 6-x \Rightarrow 6-x-y \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 12 \Rightarrow y = 6 \\ 2(6-x) = 12 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Если $x \in \mathbb{R} \setminus [0; 12] \Rightarrow 0$ решений (а)

$x \in [0; 12] \Rightarrow$ любой y из $[-6; 6]$ (б)

$x \in (0; 12) \Rightarrow y \in \{-6; 6\}$ (в)

1) $a \leq 36 \Rightarrow 4$ окружности $\Rightarrow$ $\begin{cases} 3 \text{ окружности не имеют р-ий, 1 имеет} \\ 2 \text{ окружности имеют по одному р-ию.} \end{cases}$

Из (а) $\Rightarrow$ окружности в I и II не имеют решений

Если окружность в первой касается/пересекает $x=0$ или $x=12$, то и в II тоже $\Rightarrow$ первый в-во.

Если $a=6 \Rightarrow x=0$ и $12 \Rightarrow 4$ корня $\Rightarrow$ нет.

$$\textcircled{7} \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + x \cdot (3^{81} - 1) \end{cases} \quad y \in [a; 6]$$

$$y \in [a; 6]$$

$$y \in [a; 6-1]$$

$$N_y = 6-1-a+1 = 6-a$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + (4-x) \cdot 3^{81} \leq 85 - x$$

$$81 + (4-x)$$

$$3^x + (4-x)(3^{81} - 81) \leq 0$$

$$3^x + 3^4(4-x)(3^{77} - 1) \leq 0$$

$$3^{x-4} + (4-x)(3^{77} - 1) \leq 0$$

$$3^{x-4} \leq (x-4)(3^{77} - 1)$$

$$x=5: 3 < 1(3^{77} - 1)$$

$$x=4: 1 > 0$$

После $x=4$ нет решений.
Рассмотрим

Решения ~~не~~ ^{при} $x \in [5; 80]$,
иначе не будет считывать y .

$$\begin{aligned} N_y &= 85 + x \cdot 3^{81} - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} = \\ &= 85 - x + (x-4) \cdot 3^{81} - 3^x = \\ &= 84 - \end{aligned}$$

$$3^x + (4-x) \cdot 3^{81} \leq 81 + (4-x)$$

$$(3^x - 81) + (4-x)(3^{81} - 1) \leq 0$$

$$3^4(3^{x-4} - 1) \leq (x-4)(3^{81} - 1)$$

$$1 - 3^4 > -4 \cdot 3^{81} + 4$$

$x < 4$ нет (т.к. правая ч. < 0 , а левая > 0)

$$x=4: 3^4(3^0 - 1) \wedge 0(3^{81} - 1) \quad 0 = 0 \Rightarrow \text{да} \quad x=85 \Rightarrow \Rightarrow 99$$

$$3^4 \wedge 3^{79} (3^2 - 1)$$

$$3^{79} < 3^{81} - 3^4$$

$$3^{79} \wedge 79(3^{77} - 1) \approx 3^4$$

$$3^{100} \wedge 100 \cdot (3^{77} - 1) > 3^4 < 3^5$$

$$3^{100} > 3^{82} - 100$$

$$3^{80} < 80$$

$$3^{81} \wedge 81(3^{77} - 1)$$

$$3^{81} < 3^{81} - 3^4$$

$$3^{80} < 80 \cdot 3^{77} - 80$$

$$3^{77}(27-80) \wedge -80$$

$$3^{77} \cdot (-53) <$$

$$81(3^{82} - 1) > 82(3^{81} - 1)$$

$$3^4(3^{80} - 1) \wedge 80(3^{81} - 1)$$

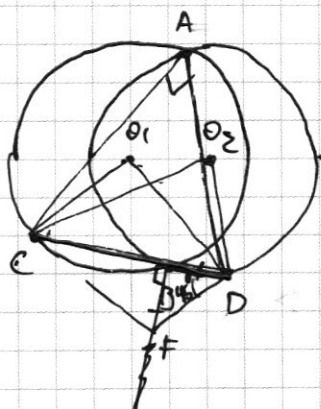
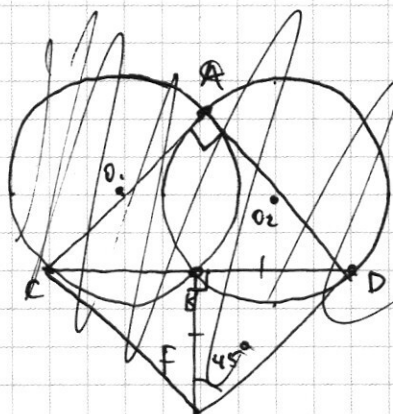
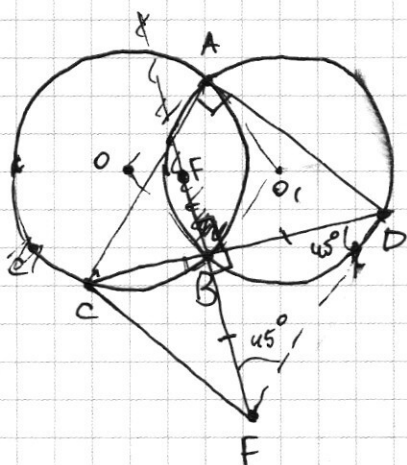
$$81(3^{80} - 1) \wedge 80(3^{81} - 1)$$

$$x=85 \Rightarrow \Rightarrow 99$$

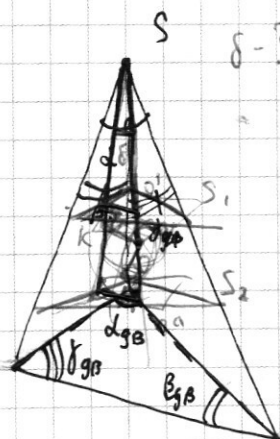
$$x=86 \Rightarrow \text{нет}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



4



$$SO' = SO - R$$

$$SO'' = SO + R$$

$$OK = R$$

$$SO^2 = \sqrt{KS^2 + KO^2}$$

$$KS = \sqrt{SO'^2 - SO''^2}$$

$$\tan \delta = \frac{R}{SO}$$

Пирамиды $S - S_1$ и $S - S_2$ — гомотетичны

$$\frac{SO'}{SO''} = \frac{S_1}{S_2}$$

$$\frac{SO - R}{SO + R} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$$

$$\frac{1 - \tan \delta}{1 + \tan \delta} = \frac{2}{3}$$

$$3 - 3 \tan \delta = 2 + 2 \tan \delta$$

$$1 = 5 \tan \delta$$

$$\delta = \arctan \frac{1}{5}$$