

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Дано:
 $a b c d e f g h$
 $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 16875$
 h - число чисел

Найти:
 h - ?

Решение:

разложение 16875 на множители $\in [1; 9]$.

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ \hline 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow a b c d e f g h$ состоят из чисел:

I. ① 5 5 5 5 3 3 3 1
 II. ② 5 5 5 5 9 3 1 1

I. $a b c d e f g h$

разм. 5: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}$

разм. 3: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$

$$X = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$$

I = 280 чисел

II. $a b c d e f g h$

разм. 5: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}$

продолжение решения с обратной стороны

$$\text{II} \quad \text{разм. 5: } \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}$$

$$\text{разм. 9: } 4$$

$$\text{разм. 3: } 3$$

$$X = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= 42 \cdot 20 = 840$$

$$\text{II} - 840 \text{ чисел}$$

$$\text{всего чисел: } \text{I} + \text{II} = 280 + 840 = 1120.$$

Ответ: 1120.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение 2

$$3. \left(89 \cdot 40 - 80 \cdot 4 - \frac{3}{2} \right) = \frac{8^{81}}{2} \neq \frac{89 \cdot 80 - 80 \cdot 8 - 81}{2} =$$

$$= \frac{3^{81}}{2} (81 \cdot 79) = \frac{3^{85}}{2} \cdot 79$$

$$81 \neq 80 - 1 =$$

$$(80 \cdot 85) - 89 \cdot 40 + \frac{3^5}{2} = \frac{1}{2} (160 \cdot 85 - 89 \cdot 80 + 243) =$$

$$= \frac{1}{2} (87 (80 + 3)) = \frac{87 \cdot 83}{2} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 86(170 - 84) = \\ = 80 \cdot 81 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{*} G = \frac{87 \cdot 83}{2} + \frac{79}{2} \cdot 385$$

$$G = \underline{\underline{3361,5 + 39,5 \cdot 3^{85}}}$$

$$86(170 - 84) = 80 \cdot 81$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 83 \\ \hline 243 \\ 648 \\ \hline 6723 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 3561 \end{array}$$

②

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x = (\cos 5x - \sin 5x) \cdot$$

$$\cdot (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x =$$

$$= 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) \cdot$$

$$\cdot (\cos 5x + \sin 5x) =$$

$$= \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

I
II

I $\sqrt{2} \cos 5x - \sin 5x = 0$

$$\cos 5x \neq \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = 0$$

$$0 = \cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = 2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \neq 0$$

$$\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

II $\sqrt{2} \cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$$\sin 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$$

$$\cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{1 - \frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

продолжение
на стр. 5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② продолжение

$$0 = \cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad 2 \sin \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right)$$

$$\sin \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{7x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi l}{7}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{8} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

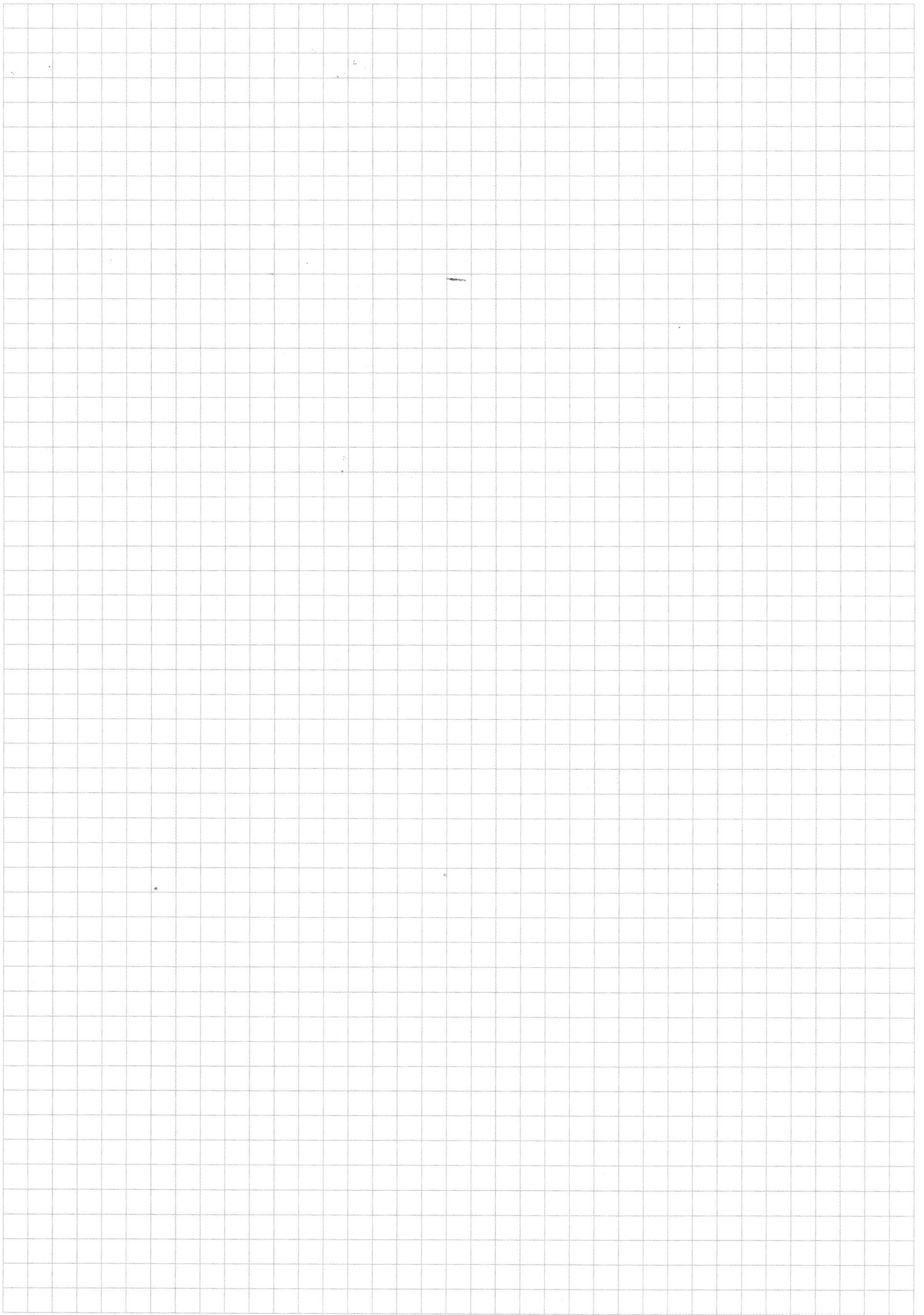
$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z};$

$$\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi l}{7}, \quad l \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \quad \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (3.1) \quad \text{О. Д. 3.}$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (3.2) \\ y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases}$$

разложим 3.2. на множители: $x < 0$

$$2y^2 - (x+8)y - (x^2 + 4x) = 0$$

$$D = (x+8)^2 - 8(-x^2 - 4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

$$y = \frac{(x+8) \pm |3x+8|}{4} = \frac{x+8 + 3x+8}{4} = x+4;$$

$$\Rightarrow \frac{x+8 - 3x-8}{4} = -0,5x;$$

тогда преобразуем 3.2.:

$$(y-x-4)(2y+x)=0$$

||

$$\left. \begin{array}{l} y-x-4=0 \\ 2y+x=0 \\ \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{array} \right\}$$

делаем замену в 3.1.:

$$\lg(-x) = a; \quad -x = 10^a$$

$$\lg(y) = b; \quad y = 10^b$$

продолжение
на обороте

③ продолжение

подставим a и b в 3.1:

$$\left(\frac{10^{4a} b}{10^{2b}}\right) = (10^{a(a+b)})$$

$$(10^{4a-2b})^b = 10^{a(a+b)}$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$a = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 8b^2}}{2} = \frac{3b \pm b}{2}$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \lg(-x) \\ b = \lg(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = 2 \lg(y) \\ \lg(-x) = \lg(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ -x = y \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} y = x + 4 \\ y^2 = -x \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ y^2 = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ y = -x \end{cases}$$

$$y + y^2 = 4$$

$$2y = 4$$

$$y^2 = 2y$$

$$x = 0$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = 0$$

$$D = 1 - 4(-4) = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Т.к. $y > 0$, то

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$-x = y^2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$$

Ответ: $(-2; 2);$

$(-4; 2);$

$(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}),$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤ $\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (5.1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (5.2) \end{cases}$ Найти: a , при которых система имеет два решения.

Раскроем модули в 5.1.; возможны 4 случая:

1) $x-6-y + x-6+y = 12$

$$2x - 12 = 12$$

$$\underline{x = 12}$$

2) $x-6-y - (x-6+y) = 12$

$$x-6-y-x+6-y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$\underline{y = -6}$$

3) $-(x-6-y) + x-6+y = 12$

$$-x+6+y+x-6+y = 12$$

$$2y = 12$$

$$\underline{y = 6}$$

4) $-(x-6-y) - (x-6+y) = 12$

$$-x+6+y-x+6-y = 12$$

$$-2x + 12 = 12$$

$$\underline{x = 0}$$

продолжение
на обороте.

т. (6; -8)

т. (-6; -8)

т. (-6; 8)

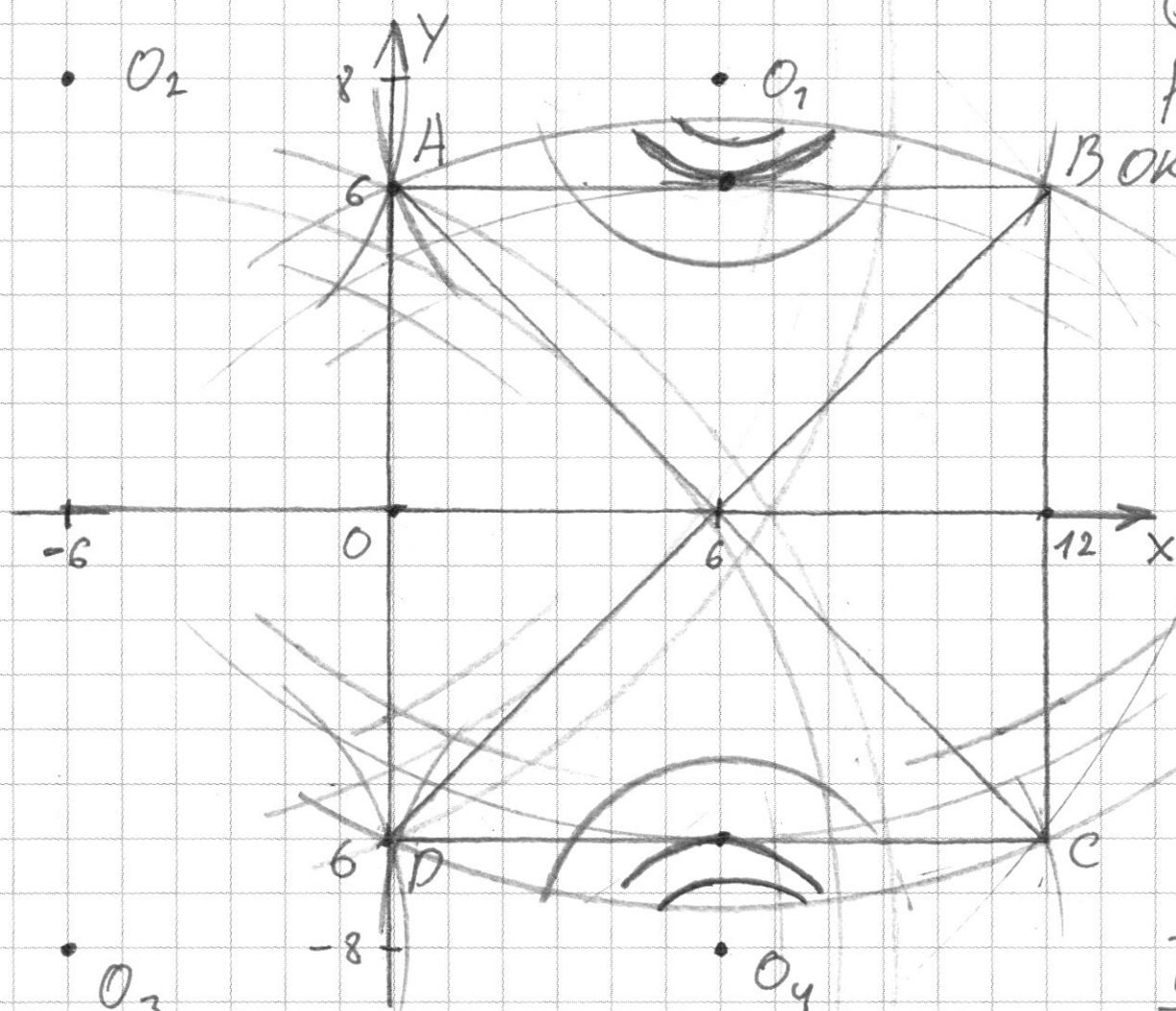
5.2. - это ^{кр-ие} окр-ти с центрами в т. (6; 8)
 $a \geq 0$

5 продолжение

Расставим центры
3 окружностей:

$$O_1 (6; 8); O_2 (-6; 8)$$

$$O_3 (-6; -8); O_4 (6; -8)$$



I. Если $0 \leq a < 4$, то
корней нет

II. Если $a = 4$, то
2 решения. (окр.
 $O_1; O_4$ касаются кв.
ABCD)

III. Если $4 < a \leq 40$,
то - 4 реш.

$\downarrow$
 $O_1 A^2$

IV. Если окр. O_1 проходит через
D и C, то - 6 реш.

V. Если $40 < a \leq 232$, то - 6 реш.

$\downarrow$
 $O_1 D^2$

VI. Если окр. O_2 проходит через B, то -
4 реш.

VII. Если O_2 проходит через C, то - 2 реш.

$$a = O_2 C^2 = 14^2 + 18^2 = 196 + 324 = \underline{\underline{520}}$$

Ответ: 4; 520.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ Дано:

а) O, O_1 - окр.

$$R_O = R_{O_1} = 13$$

$O \cap O_1 = A; B$

$C \in O; D \in O_1$

$B \in CD$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$BF \perp CD$

$$BF = BD$$

Найти:

$$CF = ?$$

б) $BC = 10$

Найти:

$$S_{\triangle ACF} = ?$$

в) По т. Синусов:

$$\triangle ACB: \frac{AB}{\sin \alpha} = 2R = 26$$

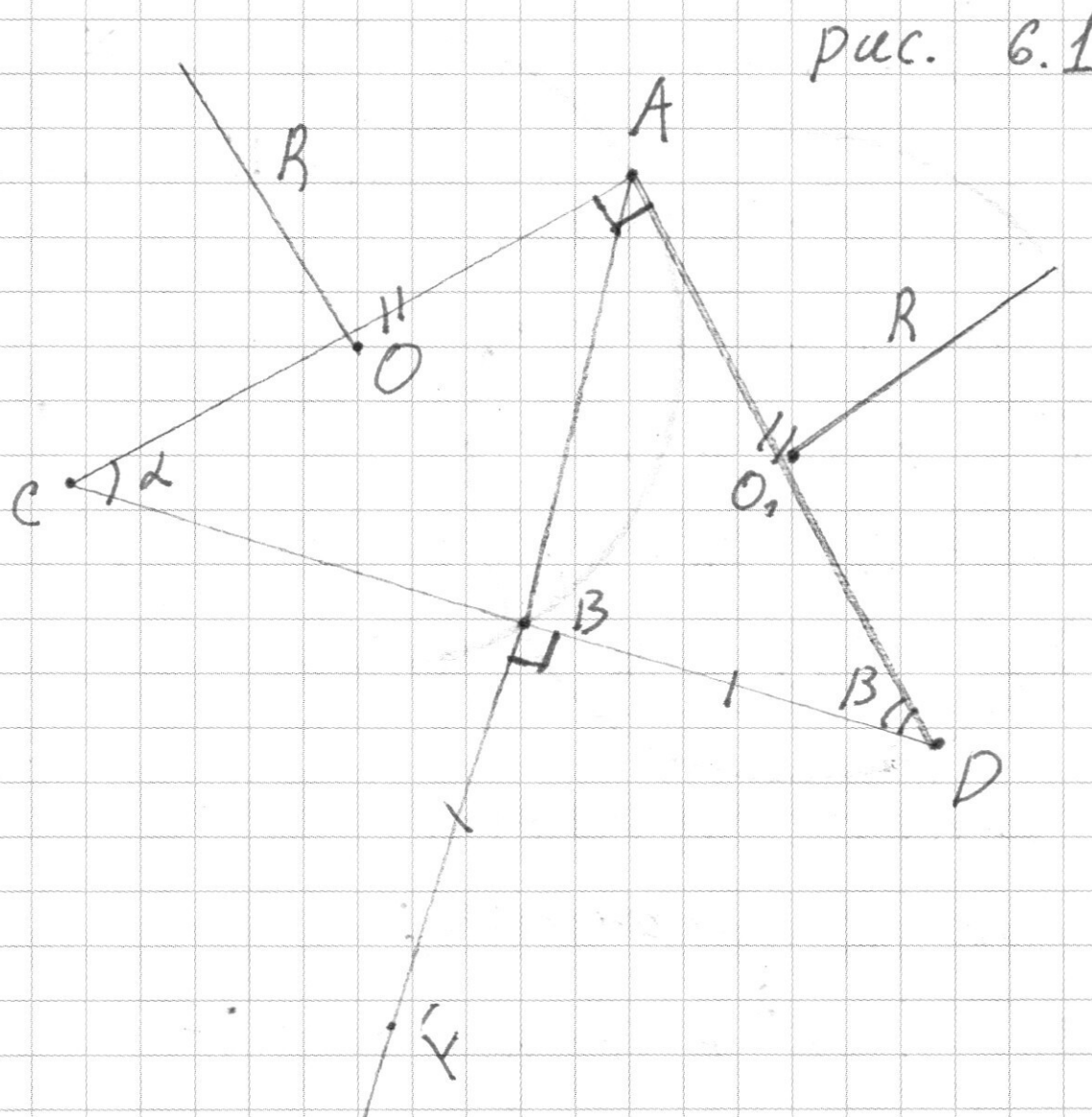
$$\triangle ADB: \frac{AB}{\sin \beta} = 2R = 26$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta = \sin 45^\circ$$

(т.к. $\angle CAD = 90^\circ$ (по усл.))

$$AB = 2R \cdot \sin 45^\circ = \frac{2 \cdot 13 \cdot \sqrt{2}}{2} \quad \triangle ACD = \text{прямоугольный} \Rightarrow CA = AD$$

$$\cdot \sqrt{2} = 13\sqrt{2} = AB$$



Решение:

1) Пров. AB

2) $\angle C = \alpha; \angle D = \beta$

продолжение
решения с обратной
сторону

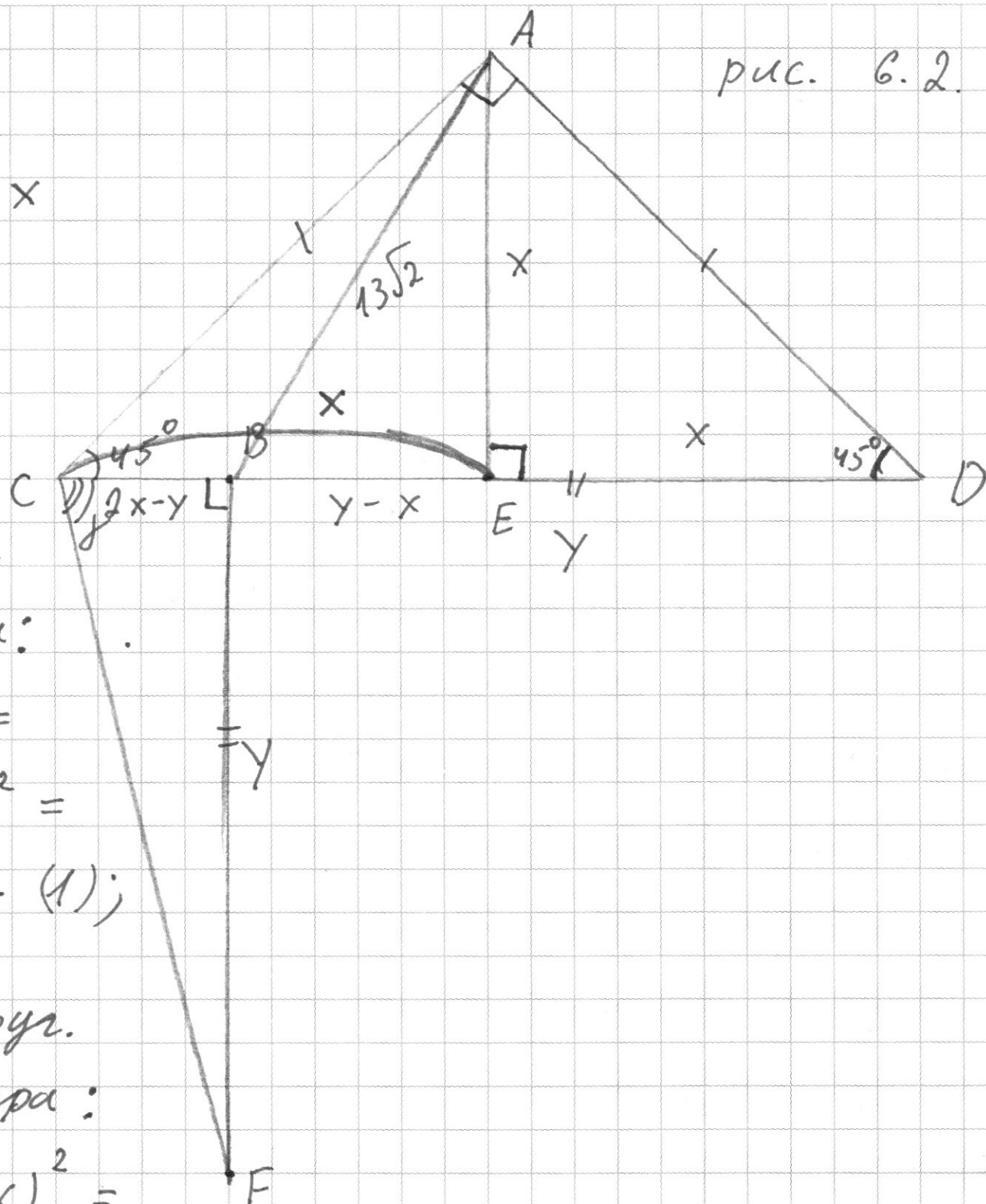
4) Пусть

$$CE = ED = AE = x$$

$$BD = BF = y$$

$$CB = 2x - y$$

$$BE = y - x$$



5) $\triangle CFB$ - прямоугол.

$\Rightarrow$ по Т. Пифагора:

$$CF^2 = y^2 + (2x - y)^2 =$$

$$= y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 =$$

$$= 2y^2 - 4xy + 4x^2 - (1);$$

6) $\triangle ABE$ - прямоугол.

$\Rightarrow$ по Т. Пифагора:

$$(13\sqrt{2})^2 = x^2 + (y - x)^2 =$$

$$= x^2 + y^2 - 2xy + x^2 =$$

$$= y^2 - 2xy + 2x^2 - (2);$$

Заметим, что $(1) = 2 \times (2) \Rightarrow CF^2 = 2 \times (13\sqrt{2})^2 =$

$$= 2 \times 169 \cdot 2 \Rightarrow CF = \sqrt{169 \cdot 4} = 13 \cdot 2 = \underline{\underline{26}}$$

$$\underline{\underline{CF = 26}}$$

Ответ: CF = 26.

продолжение решения
на странице 13.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) продолжение (см. рис. 6.2)

5) $BC = 10$

1) $2x - y = 10$

$y = 24$ (расчёты - чертовик)

$2x - 24 = 10$
 $x = 17$

2) $S_{\triangle ACF} = \frac{AC \cdot CF}{2} \cdot \sin \angle ACF$

$AC = 17\sqrt{2}$ (см. чертовик)

$CF = 26$

$\angle ACF = \angle ACD + \angle DCF = 45 + \gamma$ (см. рис. 6.2)

$\sin \angle ACF = \sin (45 + \gamma) = \sin 45 \cos \gamma + \cos 45 \sin \gamma =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \gamma + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \gamma \quad (3)$

3) расм. $\triangle CFB$ - прямоуго.

$\angle BCF = \gamma$

$\cos \gamma = \frac{BC}{CF} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$
 $\sin \gamma = \frac{BF}{CF} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$ } подставим в (3)

4) $\sin \angle ACF = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{13}$

5) $S_{\triangle ACF} = \frac{17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{13}}{2} = 17^2 = \underline{\underline{289}}$

Ответ: $\underline{\underline{S_{\triangle ACF} = 289}}$

⑦ Найти кол-во целых пар $(x; y)$ таких что:

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} & (7.1) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x & (7.2) \end{cases}$$

$$\underbrace{3^x + 4 \cdot 3^{81}}_c \leq y < \underbrace{85}_d + \underbrace{(3^{81} - 1)}_k x$$

$$3^x + c \leq y < d + kx$$

1) $x < 0$

$$\left. \begin{matrix} 3^x + c > 0 \\ d + kx < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \emptyset$$

2) $x = 0$

$$\left. \begin{matrix} 1 + c > d \\ d \end{matrix} \right\} \Rightarrow \emptyset$$

3) $x > 0$

a) $4 \cdot 3^{81} \approx 3^{81} \cdot x$

$$4 \approx x$$

Подставим в (7.1) и (7.2):

(7.1.) : $3^4 + 4 \cdot 3^{81} \leq y$

(7.2.) : $85 + (3^{81} - 1) \cdot 4 = 85 + 4 \cdot 3^{81} - 4 = 81 + 4 \cdot 3^{81} > y$

$$\underline{x = 4}$$

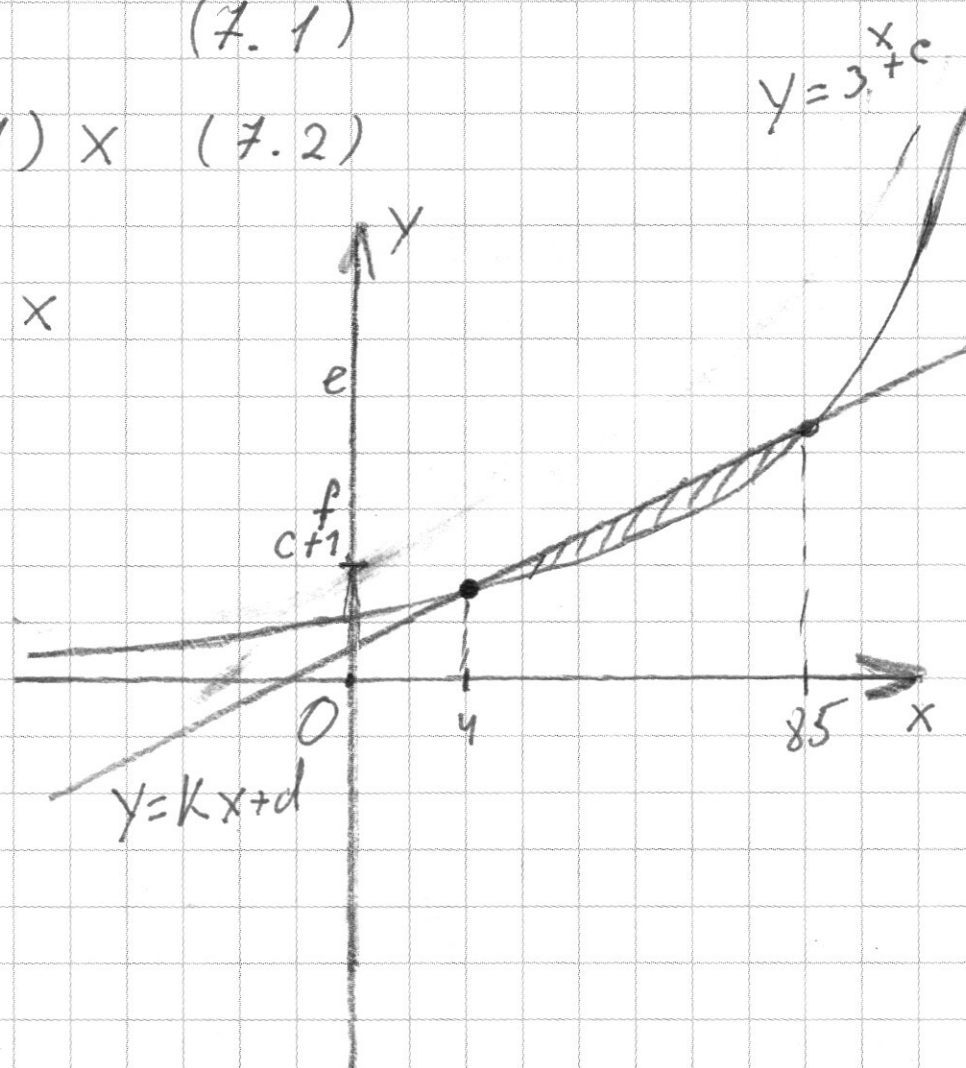
b) $3^x \approx 3^{81} \cdot x = 3^{81} \cdot 4 = 3^{85}$

Пусть $x = 81 = 3^4 \uparrow$

Пусть $\underline{x = 85}$; Подставим в (7.1.) и (7.2.):

$$\begin{aligned} 7.1 : 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} &= 3^{81} (3^4 + 4) = 85 \cdot 3^{81} \\ 7.2 : 85 + (3^{81} - 1) 85 &= 85 + 3^{81} \end{aligned}$$

продолжение
на стр. 15



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑦ продолжение ①

$x \in [4; 85)$; кол-во точек $85 - 4$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$,
то $x \in [5; 84]$

$y \in [e; f)$, кол-во точек $f - e$

$$⑧ G = \sum_{x=5}^{84} [(85 + (3^{81} - 1)x) - (3^x + 4 \cdot 3^{81})] =$$

$$= (80 \cdot 85 + (3^{81} - 1) \underbrace{(5 + 6 + \dots + 83 + 84)}_{\text{сумма ариф. прогр.}}) \quad \ominus$$

$$S_{a.n.} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_1 = 5, a_{80} = 84, n = 80$$

$$S_{a.n.} = \frac{5 + 84}{2} \cdot 80 = \underline{89 \cdot 40}$$

$$\ominus (80 \cdot 4 \cdot 3^{81} + \underbrace{(3^5 + 3^6 + \dots + 3^{83} + 3^{84})}_{\text{сумма геом. прогр.}}) \quad \ominus$$

$$S_{g.n.} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b_1 = 3^5; b_{80} = 3^{84}, n = 80, q = 3$$

$$S_{g.n.} = \frac{3^5(3^{80} - 1)}{2}$$

$$\ominus 80 \cdot 85 + (3^{81} - 1) \cdot 89 \cdot 40 - 80 \cdot 4 \cdot 3^{81} - \frac{3^{85} - 3^5}{2} =$$

$$= \underline{80 \cdot 85} + \underline{89 \cdot 40 \cdot 3^{81}} - \underline{89 \cdot 40} - \underline{80 \cdot 4 \cdot 3^{81}} - \underline{\frac{3^{85}}{2}} + \underline{\frac{3^5}{2}} =$$

продолжение
на обороте

⑦ продолжение [2]

$$3^{81} (89 \cdot 40 - 80 \cdot 4 - \frac{3^4}{2}) \approx \frac{3^{81}}{2} (89 \cdot 80 - 80 \cdot 8 - 81) =$$

$$= \frac{3^{81}}{2} (81 \cdot 79) = \frac{3^{85}}{2} \cdot 79$$

$$80(80-1) = 80 \cdot 79$$

$$(80 \cdot 85) - 89 \cdot 40 + \frac{3^5}{2} = \frac{1}{2} (160 \cdot 85 - 89 \cdot 80 + 243) =$$

$$= \frac{1}{2} (81(80+3)) = \frac{81 \cdot 83}{2}$$

$$80(170-89) = 80 \cdot 81$$

⊛ $G = \frac{81 \cdot 83}{2} + \frac{79}{2} \cdot 3^{85} = \underline{\underline{3361,5 + 39,5 \cdot 3^{85}}}$

Ответ: $\underline{\underline{3361,5 + 39,5 \cdot 3^{85}}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

16875

5

5

5

5

все цифры четные
и есть цифра 5

3345

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

675

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

135

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

5

27

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$(\cos 7x)^2 + (\cos 3x)^2 - (\sin 7x)^2 - (\sin 3x)^2 - (\sqrt{2} \cos 10x)^2 = 0$$

③

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{1/y} = (-x)^{1/y(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$-x = \frac{x^4}{y^2}$$

$$y = -xy$$

$$-x = 1$$

$$x = -1$$

$$1 = \frac{x^4}{y^2}$$

$$x^4 = y^2$$

$$x^2 = y$$

$$x^2 = y$$

$$\cos 14x + \cos 6x - 2 \cos^2 10x = 0$$

$$\cos 14x + \cos 6x = 2 \cos^2 10x$$

$$2x^4 - x^3 - x^2 - 4x - 8x^2 = 0$$

$$2x^4 - x^3 - 9x^2 - 4x = 0$$

$$x(2x^3 - x^2 - 9x - 4) = 0$$

$$x(2x^3 - x^2 - 9x - 4) = 0$$

~~12~~

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 19 \end{cases}$$

$$x = 0;$$

$$2x^3 - x^2 - 9x - 4 = 0$$

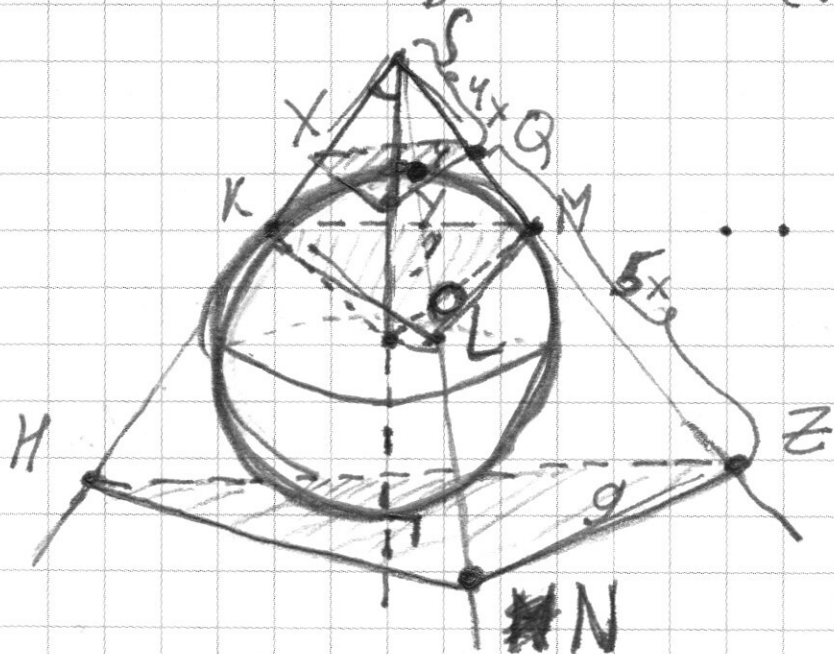
$$x(2x^2 - x - 9) = 4$$

$$2x^2 - x - 9 = \frac{4}{x}$$

$$2x^3 - x - (9 + \frac{4}{x}) = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (9 + \frac{4}{x}) = 1 - 72 + \frac{32}{x}$$

④



$$\Delta HZN \sim \Delta KMLS \sim \Delta XQYS$$

$$\Delta HZN \sim \Delta XQYS : \frac{2}{4}$$

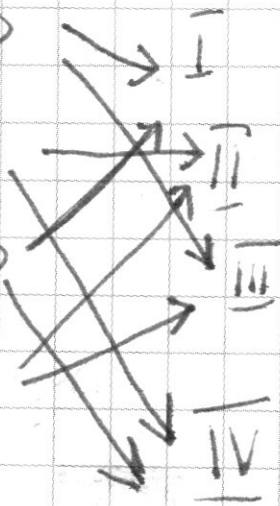
⑤

$$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12$$

$$(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \leftarrow \text{гипербола}$$

$$|x - 6 - y| = \begin{cases} x - 6 - y; & x \geq 0, y \geq 0 \\ -x + 6 + y; & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$$|x - 6 + y| = \begin{cases} x - 6 + y; & x \geq 0, y \geq 0 \\ -x + 6 - y; & x < 0, y < 0 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①
$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280 \quad \text{I}$$

II раз: 5: ~~8~~ ~~7~~ ~~6~~ ~~5~~ ~~4~~ ~~3~~ ~~2~~ $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}$ X

раз: 9: 4

раз: 3: 3

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 40 \cdot 21 = \underline{840} \quad ? \checkmark$$

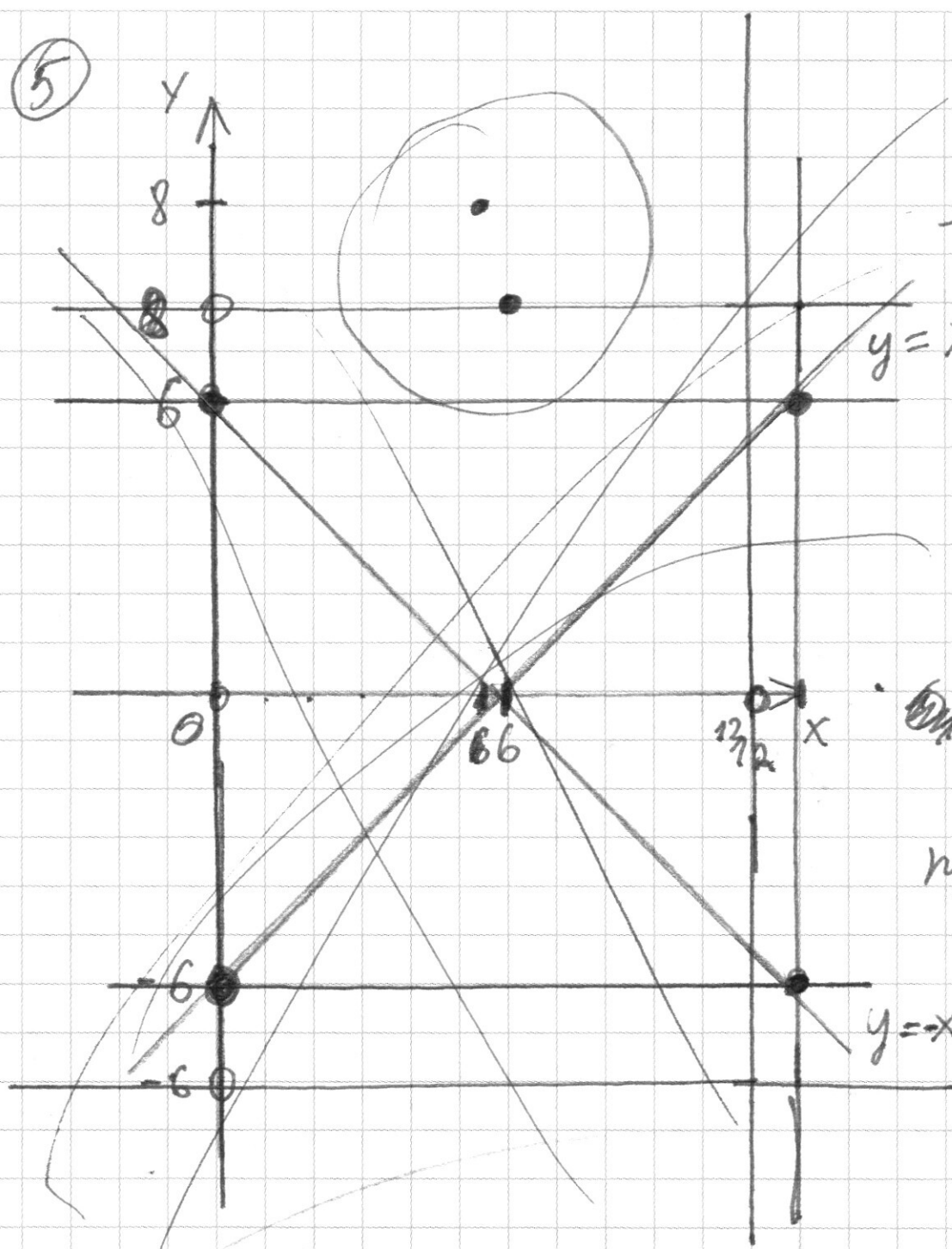
раз: 9: 8

раз: 3: 7

раз: 5: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!}$

X = $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 42 \cdot 20 = \underline{840} \quad \checkmark$

5



$$10 \leq a \leq 4 \quad \emptyset$$

II $a=4$ - окр. O_1

и O_4 - касаются $\square ABCD$ - 2 рещ.

III Если окр. O_1 проходит через A и B, то - 4 рещ.

$$O_1 A^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$$

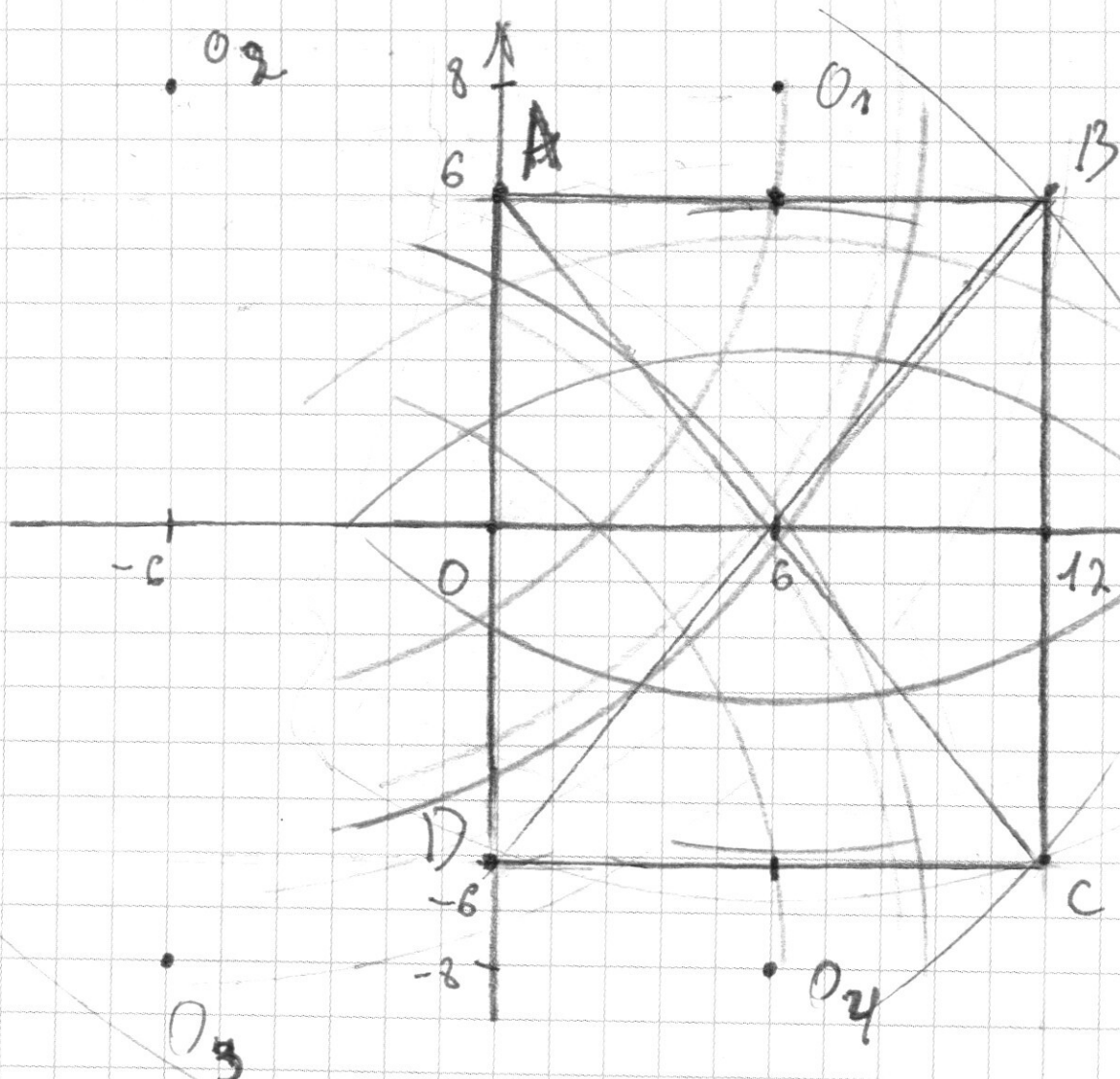
IV Если окр. O_1 проходит через D и C, то $a = O_1 D^2 = 6^2 + 14^2 = 36 + 196 = 232$ - 6 рещ.

V Если a меньше 232 - 6 рещ.

VI Если окр. O_2 проходит через B, то - 4 рещ.

VII Если O_2 проходит через C, то - 2 рещ

$$a = 14^2 + 18^2 = 196 + 324 = 520$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ продолжение ⑦

$$CE = ED = AF = x$$

$$BD = BF = y$$

$$CB = 2x - y$$

$$\underline{BE} = y - x$$

1) 4 CFV - прямоточ.

Т. Тугар.

$$\begin{aligned} CF^2 &= Y^2 + \cancel{4x^2} (2x - Y)^2 = \\ &= Y^2 + 4x^2 - 4xy + Y^2 = 26 \\ &= \underline{2Y^2 - 4xy + 4x^2} \quad (1) \end{aligned}$$

2) $\triangle ABE$ - прямоугол. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Т. Либраз:

$$\begin{aligned}(13\sqrt{2})^2 &= x^2 + (y-x)^2 = \\&= \cancel{13\sqrt{2}} x^2 + y^2 - 2xy + x^2 = \\&= 2x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 2xy\end{aligned}$$

$$(1) = 2 \times (2) \Rightarrow eF^2 = 2 \times (13\sqrt{2})^2 = 2 \cdot 169 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = \sqrt{169 \cdot 4} = 13 \cdot 2 = \underline{\underline{26}}$$

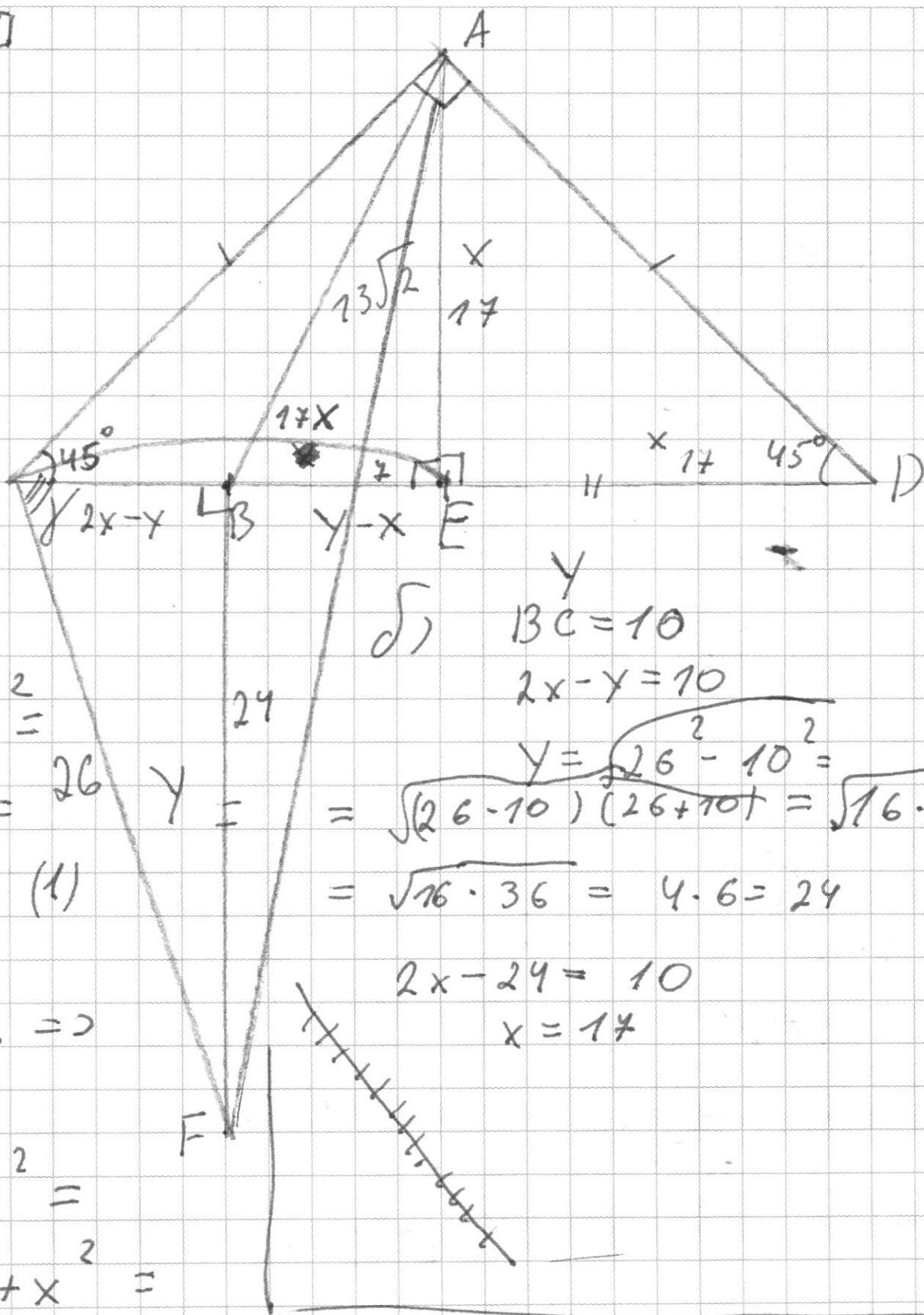
$$\cancel{S_4} S_4 ACF = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF$$

~~$AE = CE \cdot \cos 45^\circ$~~

$$\cos 45^\circ = \frac{CE}{AC} \Rightarrow AC = CE : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\underline{CF = 26}}$$

$$\sqrt{2} CE = 17\sqrt{2}$$



$$\textcircled{7} \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} & (7,1) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x & (7,2) \end{cases}$$

$$\underbrace{3^x + 4 \cdot 3^{81}}_c \leq y < \underbrace{85}_d + \underbrace{(3^{81} - 1)}_k x$$

$$3^x + c \leq y < d + kx$$

$$1) x < 0$$

$$\left. \begin{matrix} 3^x + c > 0 \\ d + kx < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{корней нет. } \emptyset$$

$$2) x = 0$$

$$\frac{1+c}{d} > 1 \Rightarrow \emptyset$$

$$3) x > 0$$

$$a) 4 \cdot 3^{81} \approx 3^{81} \cdot x$$

$$4 \approx x$$

Подставим в (7.1) (7.2)

$$(7.1): 3^4 + 4 \cdot 3^{81} \leq y$$

$$(7.2): 85 + (3^{81} - 1) \cdot 4 = 85 + 4 \cdot 3^{81} - 4 = 81 + 4 \cdot 3^{81} > y$$

$$x \neq 4$$

б)

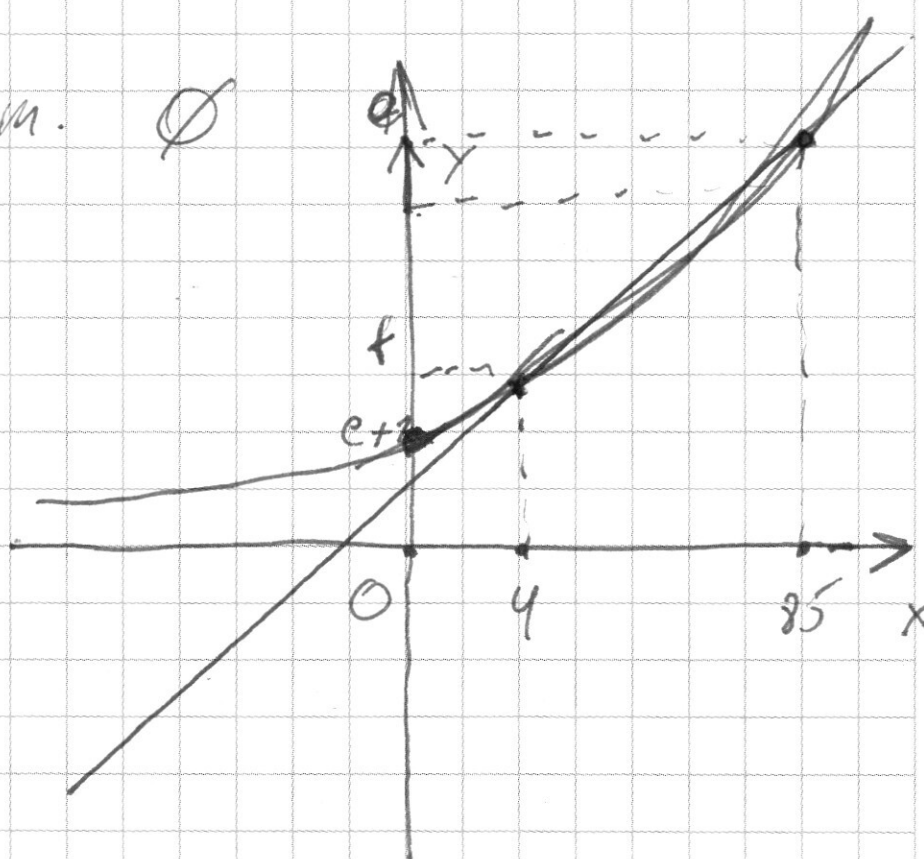
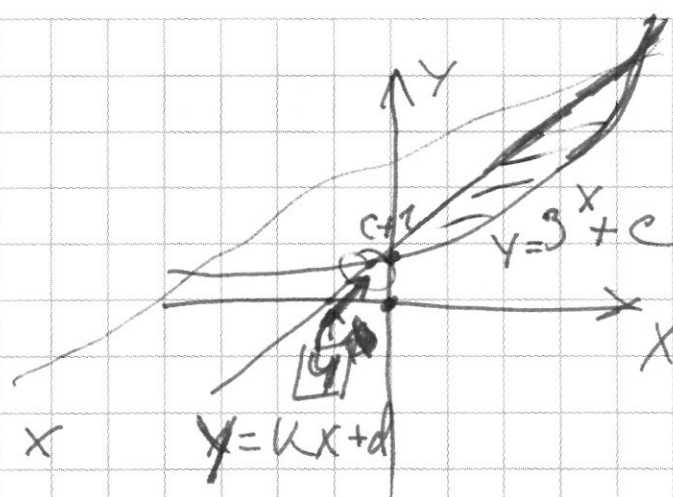
$$3^x \approx 3^{81} \cdot x = 3^{81} \cdot 3^4 = 3^{85}$$

$$\text{Пусть } x = 81 \uparrow = (3^4)$$

Пусть $x = 85$, ~~подставим~~ Подставим в (7.1) (7.2):

$$7.1: 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 3^{81} (3^4 + 4) = 85 \cdot 3^{81}$$

$$7.2: 85 + (3^{81} - 1)85 = 85 \cdot 3^{81}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ продолжение [2]

$$\angle ACF = \angle ACD + \angle DCF = 45^\circ + \gamma$$

$$\begin{aligned} \sin \angle ACF &= \sin (45^\circ + \gamma) = \sin 45^\circ \cos \gamma + \cos 45^\circ \sin \gamma = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \gamma + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{13} \end{aligned}$$

$\triangle CFB$:

$$\angle BCF = \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{BC}{CF} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$\sin \gamma = \frac{BF}{CF} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$$

$$\sin \angle ACF = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot 13}$$

~~$\triangle ACF$~~

$$S_{\triangle ACF} = \frac{17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot 17\sqrt{2}}{2 \cdot 2 \cdot 13} = 17^2 = \underline{\underline{289}}$$

⑦ продолжение ①

$x \in (4; 85)$, кол-во точек $85-4$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$,
то $x \in [5; 84]$

$y \in [\bar{e}; \bar{d})$, кол-во точек $\bar{d} - \bar{e}$

$$* G = \sum_{x=5}^{84} \left[(85 + (3^{81} - 1)x) - (3^x + 4 \cdot 3^{81}) \right] =$$

$$= \left(80 \cdot 85 + (3^{81} - 1) \underbrace{(5 + 6 + \dots + 83 + 84)}_{\text{сумма арифм. прогр.}} \right) -$$

$$S_{a.n.} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

сумма арифм. прогр.

$$a_1 = 5$$

$$S_{a.n.} = \frac{5 + 84}{2} \cdot 80 =$$

$$a_{80} = 84$$

$$= \underline{89 \cdot 40}$$

$$n = 80$$

$$- \left(80 \times 4 \cdot 3^{81} + \underbrace{(3^5 + 3^6 + \dots + 3^{83} + 3^{84})}_{\text{сумма геом. прогр.}} \right) \quad \textcircled{=}$$

$$S_{b.n.} = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

сумма геом. прогр.

$$b_1 = 3^5$$

$$b_{80} = 3^{84}$$

$$S_{b.n.} = \frac{3^5 (3^{80} - 1)}{3 - 1} =$$

$$n = 80$$

$$q = 3$$

≠

$$\textcircled{=} 80 \cdot 85 + (3^{81} - 1) \cdot 89 \cdot 40 - 80 \cdot 4 \cdot 3^{81} - \frac{3^{85} - 3^5}{2} =$$

$$= \underline{80 \cdot 85} + \underline{89 \cdot 40 \cdot 3^{81}} - \underline{89 \cdot 40} - \underline{80 \cdot 4 \cdot 3^{81}} - \frac{3^{85}}{2} + \frac{3^5}{2} =$$

=

продолжение решения
на стр. 4

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I $x - 6 - y + x - 6 + x = 12$

$$2x - 12 = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

II $-x + 6 + y + x + 6 - x = 12$

$$-2x + 12 = 12$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

III $x - 6 - y + x + 6 - y = 12$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

IV $-x + 6 + y + x - 6 + y = 12$

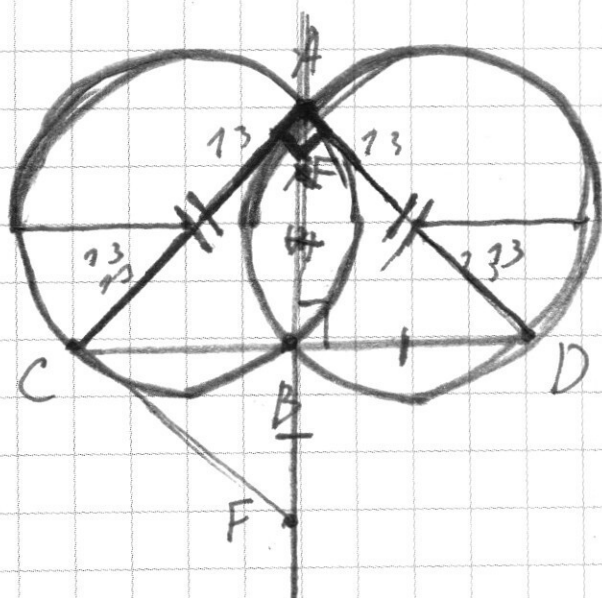
$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$(|x| - 6)^2 < \begin{cases} (x - 6)^2, & x \geq 0 \\ (-x - 6)^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$(|y| - 8)^2 < \begin{cases} (y - 8)^2, & y \geq 0 \\ (-y - 8)^2, & y < 0 \end{cases}$$

6

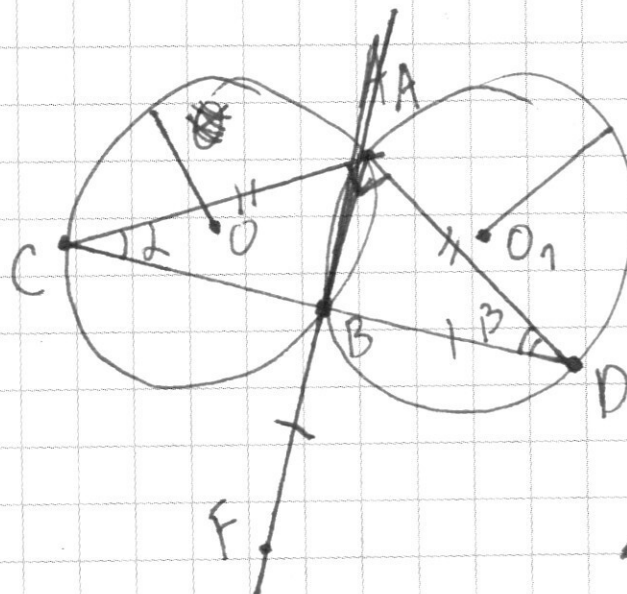
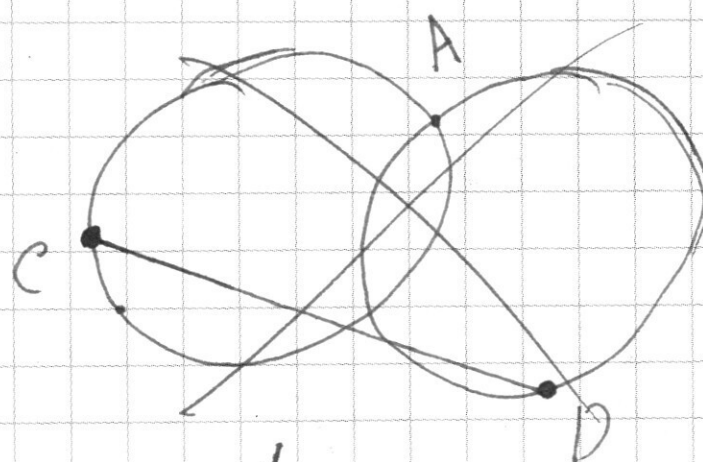


$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin \beta} = 2R$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$



$$\angle A = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle \alpha = \angle \beta = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CA = AD$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №25

(Нумеровать только чистовики)

$$\textcircled{2} \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (3.1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (3.2) \end{cases}$$

О.Д.З.

$$y > 0$$

$$-xy > 0$$

$$x < 0$$

разложим 3.2. на множ.

$$2y^2 - (x+8)y - (x^2 + 4x) = 0$$

$$y = \frac{(x+8)y \pm (x^2 + 4x)}{2}$$

$$D = (x+8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-(x^2 + 4x))$$

$$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x + 8)^2$$

$$y = \frac{(x+8) \pm (3x+8)}{4}$$

$$\frac{x+8 + 3x+8}{4} = x+4$$

$$\frac{x+8 - 3x-8}{4} = -0,5x$$

3.2. преобразуется:

$$(y - x - 4)(2y + x) = 0$$

$$\left(\frac{10^{4a}}{10^{2b}}\right)^b = (10^a)^{a+b}$$

$$(10^{4a-2b})^b = 10^{a(a+b)}$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$a = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 8b^2}}{2} = \frac{3b \pm b}{2}$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases}$$

