

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) продолжение: из графика видно, что при $a < 36$ ни 1 окр-ть не пересечёт квадрат, при $a = 36$ как раз 2 окр-ти при $a = 36 < a < 23^2 + 8^2$ — больше 2х решений (левые окружности пересекают квадрат в 2х местах каждая, правые — тоже, при этом на каждой стороне $\square$ хотя бы 1 решение). Потом 2 правые $\odot$ пересекут хотя бы в 3х точках, до момента $a = 23^2 + 24^2$ (через угол квадрата), далее нет решений (квадрат внутри $\odot$)

ответ: 2 реш. при $a = 36, 23^2 + 8^2, 23^2 + 24^2$

6)

CF = ?

$$CF^2 = CB^2 + BD^2$$

и sin: (угол $\angle ABD$)

$$2R = \frac{AC}{\sin \varphi} = \frac{AD}{\sin \varphi} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$$

$$= \frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = AD, \angle ACB = 45^\circ$$

$$x + y = 8\sqrt{2} \Rightarrow 2R \sin(\varphi + 45^\circ) + 2R \cos(\varphi + 45^\circ) = 2R \sin \varphi \sqrt{2}$$

$$\angle = 180^\circ - \varphi - 45^\circ$$

$$\sin \varphi \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}} = \sin \varphi \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = 2b^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = 8R^2 \sin^2 \varphi + 4R^2 \sin(2\varphi + 90^\circ) + 4R^2 \cos^2 \varphi$$

$$x^2 + y^2 = 4R^2 (1)$$

$$CF = 2R = 34$$

Ответ: $\alpha \times CF = 34$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2) \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} + 2 \cos \frac{7x+3x}{2} \sin \frac{7x-3x}{2} + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

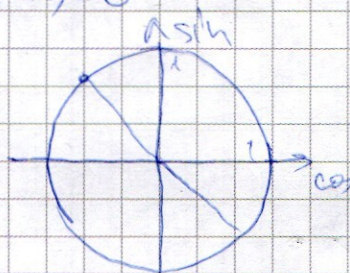
$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x$$

$$\begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{4} & x = -\frac{\pi}{8} \\ 2x = \frac{3\pi}{4} & x = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

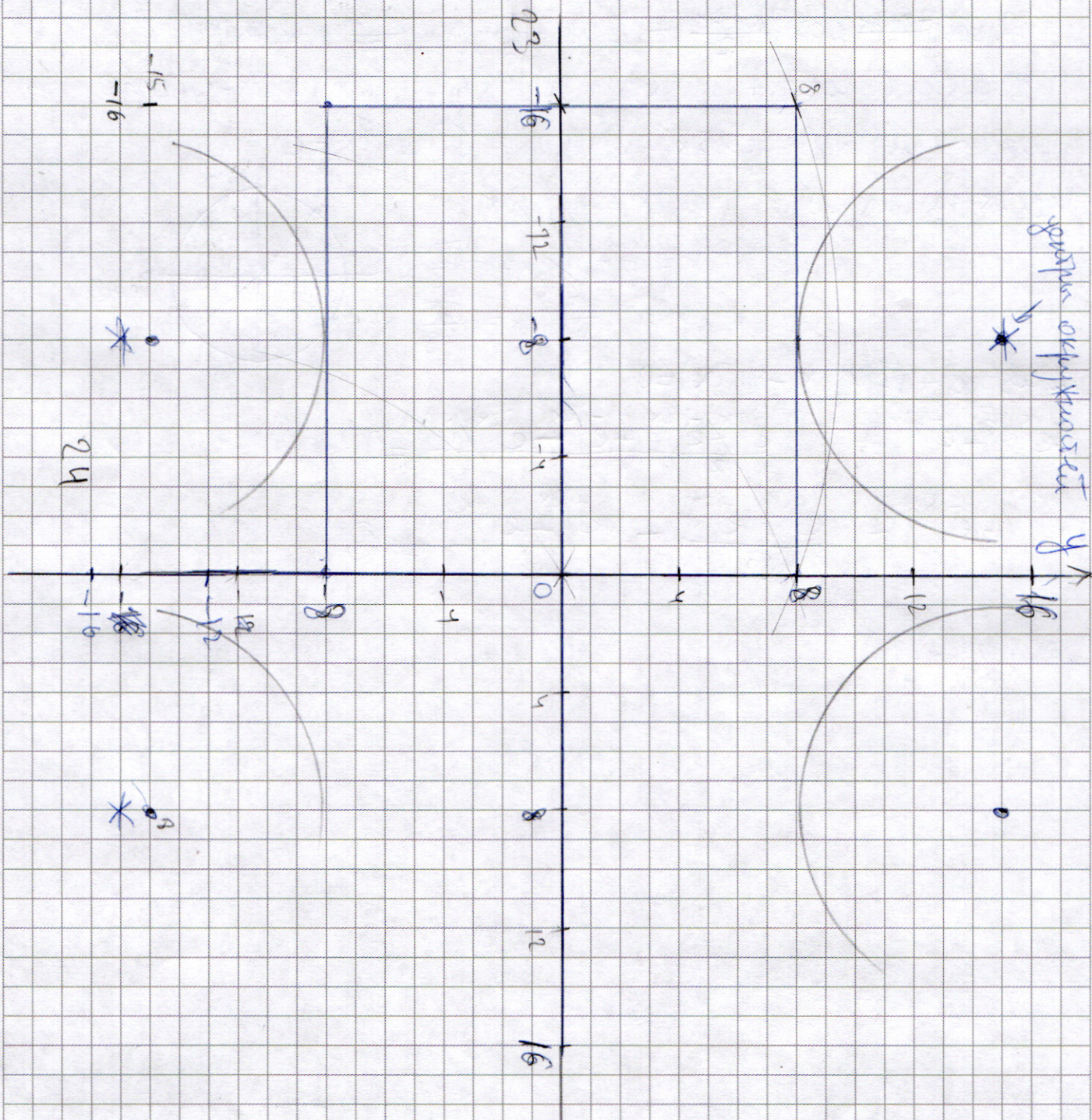


$$2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$2e^{5ix} + e^{-5ix} + \sqrt{2} \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + \frac{-i2x + i2x}{2} \right) = 0$$

$$e^{5ix} + e^{-5ix} + \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-i2x} - e^{i2x}}{i} = 0$$

- ⑤ $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y-8| = 16 \leftarrow \text{квадрат со стороной } 16, \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \leftarrow 4 \text{ окружности} \end{cases}$ следующий
элемент
с центрами $(\pm 8, \pm 15)$ и радиусом $\sqrt{a}$
- имеет 2 решения



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑦ $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + (3^{27} - 1) \cdot 3 \cdot x \end{cases}$

$31 + (3^{27} - 1) \cdot x \geq y > \frac{3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27}}{3}$

$93 + 3(3^{27} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$31 + 3^{27}x - x > 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27}$

$0 > 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} - 3 \cdot x + x - 31$ $x < 0$ очевидно, не подходит, т.к.

$4 \cdot 3^{27} - 31 > 0, 3^{x-1} > 0, -(3^{27} - 1) \cdot x > 0$

$3^{27}(x-4) + 31 > 3^{x-1} + x$ $x > 4$ и $x < 31$

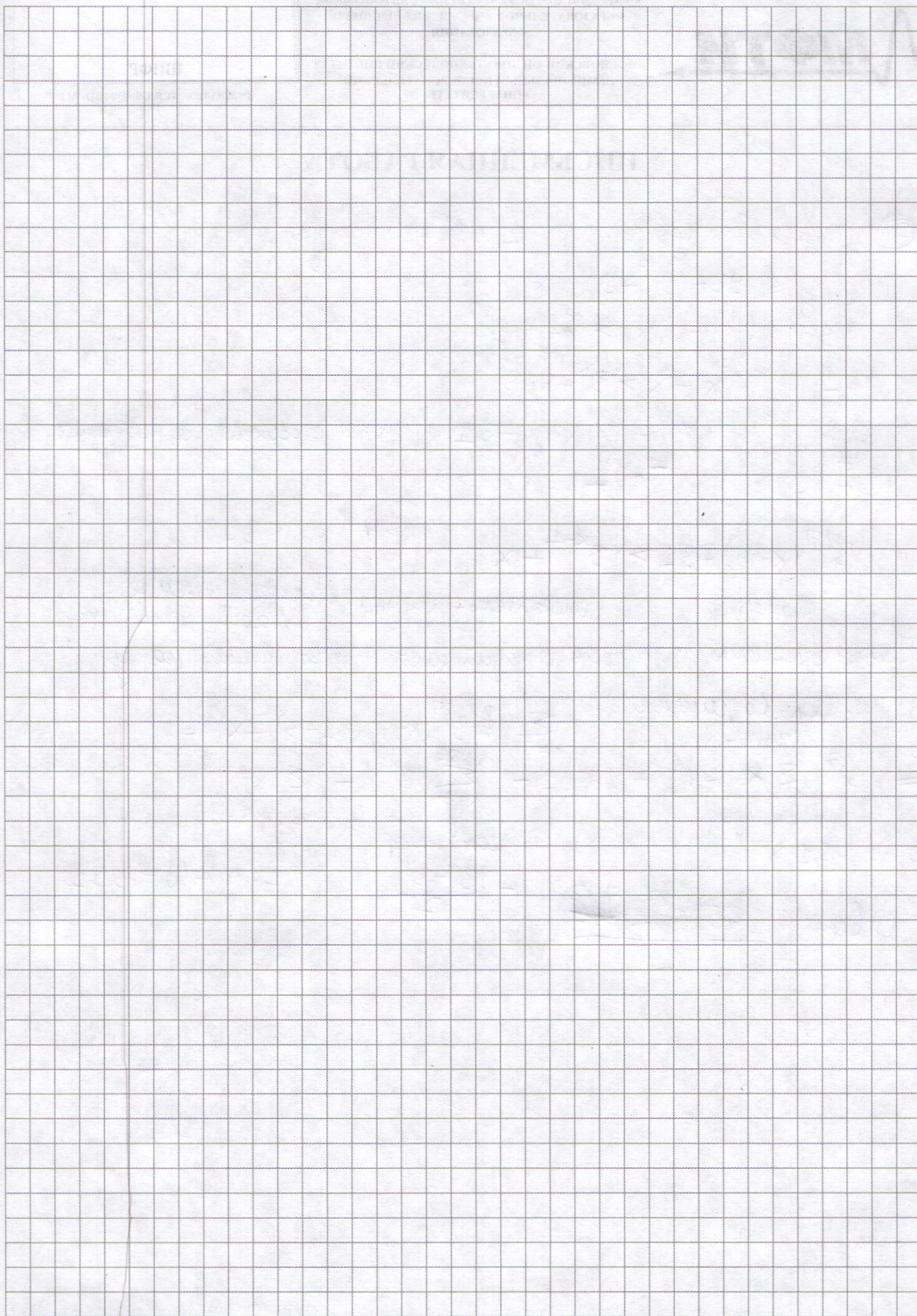
$\underbrace{3^{27}(x-4) + 31}_{\text{прямая}} < \underbrace{3^{x-1} + x}_{\text{показатель + прямая}} \leftarrow \text{растет быстрее}$
 $\text{Безопасности}; \text{разность функций даст кол-во решений на } y$

Т.е. кол-во решений:

$$= 3^{27} \left(\sum_{x=5}^{31} x - 4 \right) + 26 \cdot 31 - \sum_{x=5}^{31} (3^x) - \sum_{x=5}^{31} (x)$$

$3^{27} \cdot 451$ $\downarrow$ геом. прогр. $\downarrow$ $31 \cdot 11 + 10 = 351$

Ответ: $\frac{875 \cdot 3^{27} + 783}{2}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № _____
(Нумеровать только чистовики)



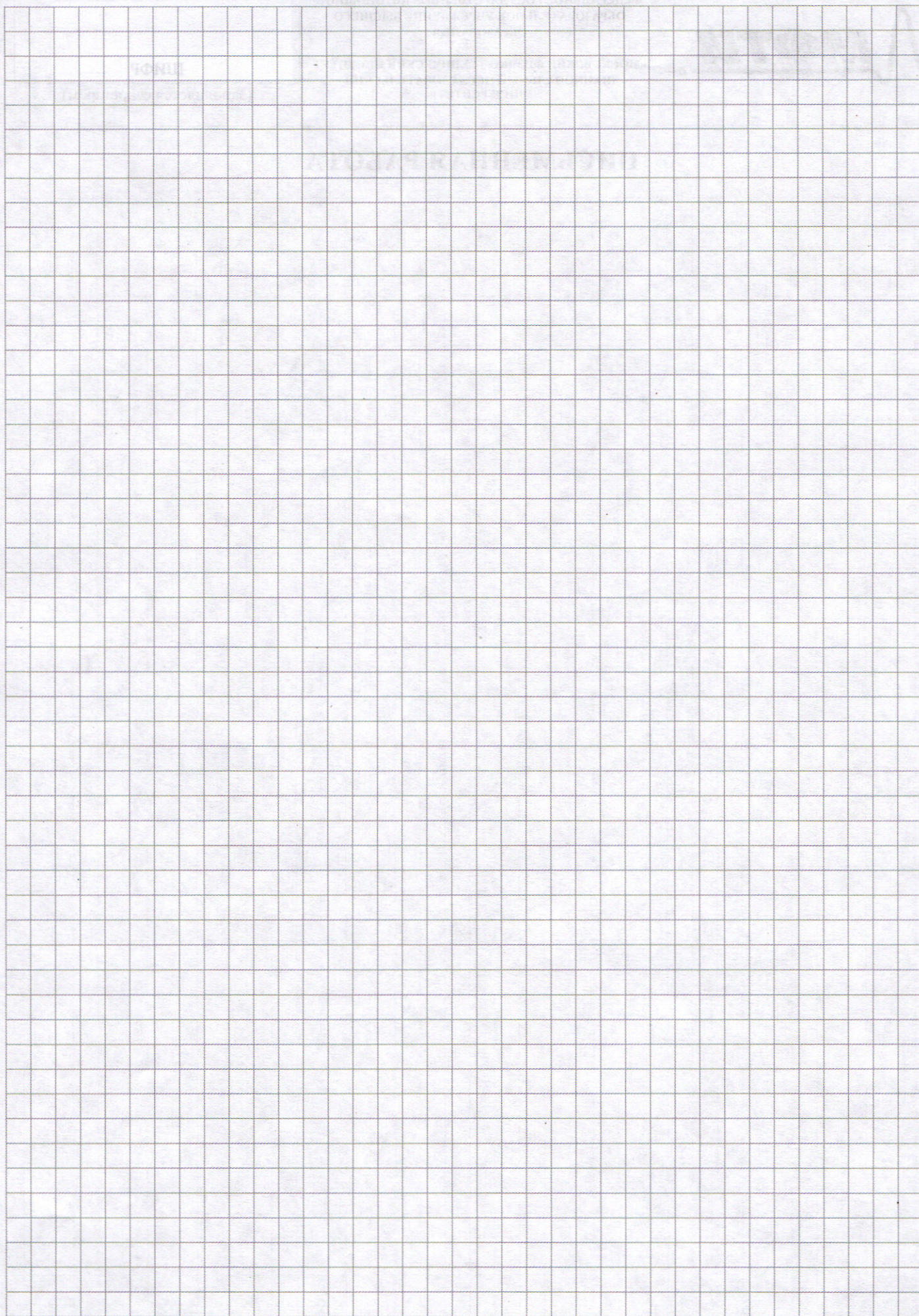
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} = \cos \alpha + \cos \beta$$

$$2 \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \frac{\sin \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \frac{\sin \beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} \frac{\sin \alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\sin \beta}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$2 (\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x$$

$$2 \cos 2x (2 \cos 3x + \sqrt{2}) - \sin 2x (2 \sin 3x + \sqrt{2})$$

$$a (2b + \sqrt{2}) = \sqrt{1-a^2} (2\sqrt{1-b^2} + \sqrt{2})$$

$$a + 2ab + \sqrt{2}a =$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$31$$

$$> \frac{1}{3} (4-x)$$

$$\frac{1}{3} (x-4) > \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} (x-4) > \frac{1}{3}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$$

$$\sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = (2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x)$$

$$\sin x (3 \cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x$$

$$\cos x (1 - 4 \sin^2 x) (1 - 2 \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cos x (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$|x+y| + |x-y| = 16$$

$$x+y + x-y = 16$$

$$x <$$

$$\sin(20+90) =$$

$$-\sin 2\varphi \cos 90 + \cos 2\varphi \sin 90$$

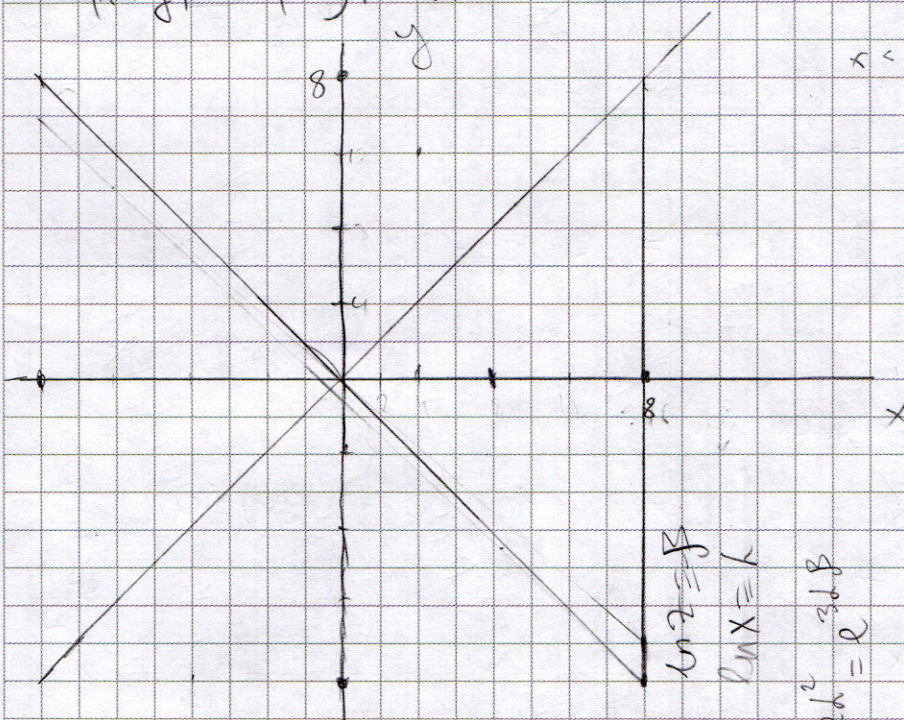
$$3X = X + 3^{30} - 3^4$$

$$X = \frac{3^{30} - 3^4}{2}$$

$$1+2+3+4 \dots$$

$$30+29+28 \dots$$

$$31 \cdot 15 = 4$$



$$\ln(-x/y) = 2 \ln(x/y)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$z^2 + 2xz - 3x^2 + 12x - 4z = 0$$

$$x^2 (\ln x + \ln(-y)) = -\frac{x^2}{y} \ln(-y)$$

$$z = -y$$

$$\ln z = 2 \ln x + 4 \ln z$$

$$7 \ln z = \ln z \cdot 2 \ln x \cdot x$$

$$x^{3 \ln z} = z^{\ln z} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$e^{\ln \cdot 3\beta} = \beta \cdot \beta \cdot e^{2 \cdot x^2} = e^{\beta^2 + 2x^2} = e^{3\beta}$$

$$\beta^2 + 2\beta - 3\beta = 0$$

$$(e^{\beta^2} - 2e^{2\beta} - 3e^{\beta} + 12e^{\beta} - 4e^{\beta} = 0$$

$$\ln^2 z + 2 \ln x - 3 \ln x = 0$$

$$451$$

$$\begin{array}{r} 455 \\ 31 \\ \hline 465 - 14 \end{array}$$

$$3 \cdot 3 = X + 3^{30} - 3^4$$

$$3X = 3^{30} - 3^4$$

$$X = \frac{3^{30} - 3^4}{2}$$

$$3 + 3^2 + 3^{30} + 3^{29} = X$$

$$\begin{array}{r} 455 \\ 31 \\ \hline 455 \end{array}$$

$$31$$