

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

1934

NOVEMBER

CONTENTS

1. The Medical Profession and the Public
2. The Medical Profession and the Public
3. The Medical Profession and the Public
4. The Medical Profession and the Public

1934

1934

1. The Medical Profession and the Public
2. The Medical Profession and the Public
3. The Medical Profession and the Public
4. The Medical Profession and the Public

1934

1934

1934

1. The Medical Profession and the Public
2. The Medical Profession and the Public
3. The Medical Profession and the Public
4. The Medical Profession and the Public

1934

1934

1934

1934

1934

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- ① Заметим, что число 64827 является произведением
десяти тройки и семёрки, точнее, $64827 = 3^4 \cdot 7^4$

Числа величинные и произведение цифр каждого разряда 64827, следовательно, числа могут состоять из: а) 4 сотен, 3 тройки и 1 единица.
б) 4 сотен, 1 десятка, 1 тройка и 1 единица (т.к. цифра 2 есть, а $7^2 = 49$ — число, ~~она~~ ~~вес~~ и не цифра).

Для а): ~~визначена~~ ^{визначена} послідовність розмірностей, y на 4 розмірності на 8 міс. Тоді: $C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 7 = 70$

$10 \cdot 7 = 70$
 Решаем оставшиеся тройки: $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$
 $70 + 4 = 74$ - всего вариантов
~~2) средняя расставляет тройки: $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$
 $56 + 5 = 61$ - таких вариантов~~
 Всего таких вариантов: $70 \cdot 4 = 280$ (т.к. обычно называемые).

Для δ). • сечёрки: $\binom{4}{8} = 70$

~~девочка~~ девочка: $2^4 = 16$ ~~вариантов~~ $\Rightarrow$ 4 варианта

тройка: 3 цвета, 3 варианта.

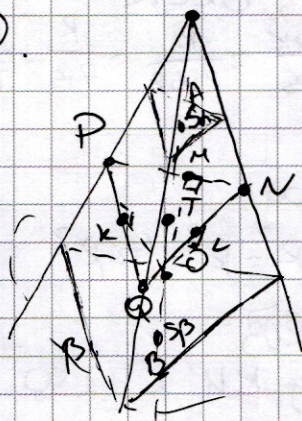
остатки — единицы.

~~2028~~ Было таких вариантов: $70 \cdot 4 \cdot 3 = 70 \cdot 12 = 840$

Torga caro: $840 + 280 = 1020$

Other: 1020

②



Дано: трёхгранный угол с вершиной S
среза $(O; R)$ вписана сфера и кас. грани

В. К, Л, М

nn-70 d: dISO, drac sepep. $S_{\text{mg}} = \text{g} = S_{\text{a}}$

un- β : β LSO, β rac. $\text{up} \text{ ep} \text{ u}^{\text{act}}$. $S_{\text{cell } \beta} = 16 = S_{\beta}$

Wagte: 2 KSO-2.

Scen. KLM - ?

1. Проверка: Пусть $\alpha \cap \beta = A$, $\alpha \cap \gamma = B$,
 $\alpha \cap (\beta \cap \gamma) = \emptyset$

(т.к. OK и OL касат. к окружности по условию)

Тверь о сечении — ОРМ (см. рис.)

Тогда $TK \perp PQ$, $TM \perp PN$, $TL \perp NQ$ (Т.ч. TP — осн. окр-н $\odot PQN$).

3. Пусть $SA = x$, $SDL = d$ и $\beta = \gamma$ (по условию)

если пагуыр цперуи R , а $SA=x$, то $SB=x+2R$

$\frac{SOL^2}{SOL^3} \Rightarrow d\Gamma \Rightarrow$ пирамиды, образованные сечениями $d\Gamma$ и $d\Gamma$ от точки S , подобны, тогда площади сечений

(мозаги их оснований) относително как квадрати и их висоти (така как SA висота и SB висота едн.)

$$\frac{S_a}{S_b} = \frac{SA^2}{SB^2}$$

$$x^2 = \frac{9}{(x+2)^2} = \frac{9}{16}$$

$$16x^2 = 9x^2 + 36xR + 36R^2$$

$$7x^2 - 36xp - 36p^2 = 0$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} = (36R)^2 + 4 \cdot 36R^2 \cdot 7 = 36R^2(36 + 4 \cdot 7) = 36R^2 \cdot 64 = \\ & = (6 \cdot 8R)^2 = (48R)^2 \end{aligned}$$

$$36 \pm 48 R$$

$$X_{1,2} \approx 1$$

$$x_{1,2} = \frac{36R + 48R}{14}$$

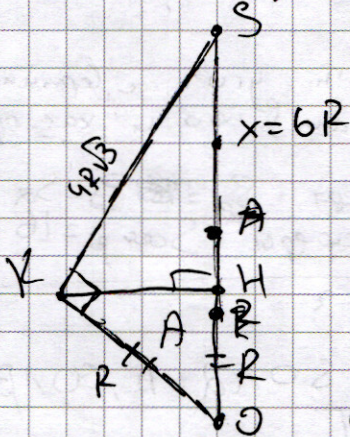
Все величины известны, тогда:

$$x = \frac{36R + 48R}{14} = \frac{84R}{14} = \frac{42R}{7} = 6R.$$

$$x = \frac{36R + 48R}{14} = \frac{84R}{14} = \frac{42R}{7} = 6R$$

Рассмотрим случай 1.

Рассмотрим $\triangle SKO$:



$$SA = X = 6R, AO = R, OK = 1R$$

$$\text{Tinggi sisi } KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{R}{R+6R} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

по теореме Пифагора:

$$SK^2 = SO^2 - OK^2 = 49R^2 - R^2 = 48R^2$$

$$SK = R\sqrt{48} = R\sqrt{16 \cdot 3} = 4R\sqrt{3}$$

Из т.к. проведём теорему КН, КН LSO

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \angle KSO = \frac{KH}{KS}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{KH}{4R\sqrt{3}} \Rightarrow KH = \frac{4}{7}R\sqrt{3}$$

TK, TM, TL — проекции SK, SM, SL на (KML) соответственно.

$$SO \perp (KML) \Rightarrow SO \perp MT \Rightarrow T=H.$$

$$SO \perp (KML) \Rightarrow (KML) \parallel \alpha \parallel \beta \Rightarrow \frac{S_{\text{сек } KML}}{S_{\alpha}} = \frac{SH}{x} = \frac{SH}{6R}$$

по т. Пифагора в $\triangle KSH$:

$$SH^2 = KS^2 - KH^2 = 48R^2 - \frac{48}{49}R^2 = \frac{48^2 R^2}{49}$$

$$SH = \frac{48R}{7}$$

Тогда $S_{KML} = \frac{SH}{6R} \cdot S_{\alpha} = \frac{\frac{48R}{7}}{6R} \cdot \frac{72}{7} = \frac{72}{7}$

по т. Пифагора в $\triangle KSH$:

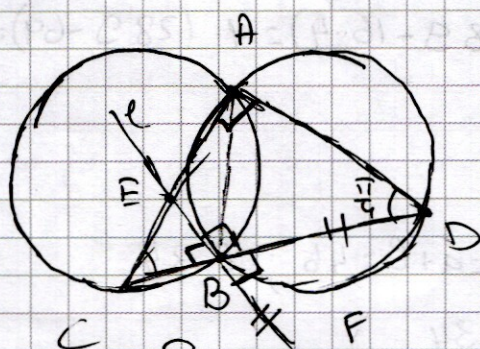
$$SH^2 = KS^2 - KH^2 = 48R^2 - \frac{48}{49}R^2 = \frac{48^2 R^2}{49}$$

$$SH = \frac{48R}{7}$$

$$S_{\text{сек } KML} = \frac{SH}{6R} \cdot S_{\alpha} = \frac{\frac{48R}{7}}{6R} \cdot \frac{72}{7} = \frac{72}{7}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$; $S_{\text{сек } KML} = \frac{72}{7}$.

6.



Решение:

За $\angle AOB$ будем считать градусную меру дуги AB .

а) 1. поскольку $R_1 = R_2 \Rightarrow$ малые дуги обеих окружностей, опирающиеся на хорду AB , равны. Тогда $\angle ADC = \angle ACD$ (т.к. они равны половине градусных мер малых дуг, как вписанные, а дуги равны).

Дано: $\omega_1(O_1; R_1) \cap \omega_2(O_2; R_2) = A, B$
 $R_1 = R_2 = 17$

$C \in \omega_1, D \in \omega_2: B \in CD, \angle CAD = \frac{\pi}{2}$

$EF \perp CD, B \in EF, F \in \omega_1$; A и F — разные точки от CD , $FB = BD$

а) $CF = ?$

б) $BC = 16$. $S_{ACF} = ?$

Тогда $\angle ACD = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = \angle ADC$

2. Пусть $\angle AC = E$.

Тогда $\angle CEB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Пусть $BC = a$, $BD = b$.

Тогда $BE = a$ (в равнобедренном $\triangle CEB$),

$CE = a\sqrt{2}$ (из прямоугольного $\triangle CEB$).

$\triangle CAD$ прямоугольный, $\Rightarrow AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$

3. По теореме синусов в $\triangle ABD$:

$$\frac{AB}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2R$$

$$AB = 2R \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 17 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

по теореме косинусов в $\triangle ABD$:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \frac{\pi}{4}$$

$$(17\sqrt{2})^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} + b^2 - 2 \cdot \frac{a+b}{\sqrt{2}} \cdot b \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$17^2 \cdot 2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} + b^2 - ab$$

$$17^2 \cdot 2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + 2b^2 - 2ab}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 17^2 \cdot 2 = 34^2$$

Заметим, что $\triangle CEF$ прямоугольный. По т. Пифагора

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad CF^2 = 34^2 \Rightarrow CF = 34 = EB \text{ (в } \triangle CEB \text{)}$$

5) $CB = 16 \Rightarrow a = 16 \Rightarrow CE = 16\sqrt{2}$

$$b^2 = 34^2 - a^2 = 4 \cdot 17^2 - 16^2 = 4(289 - 16 \cdot 4) = 4(289 - 64) = 4 \cdot 225 = 900 = 30^2$$

$$b = 30$$

по теореме косинусов в $\triangle ECF$:

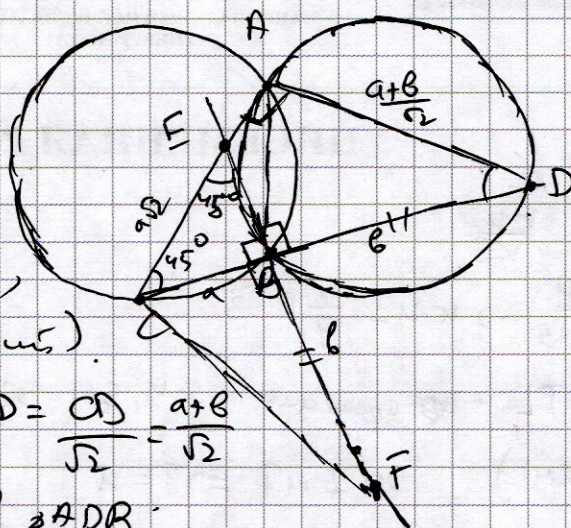
$$EF^2 = EC^2 + CF^2 - 2EC \cdot CF \cos \angle ECF$$

$$EF^2 = EC^2 + CF^2 - 2EC \cdot CF \cos \angle ECF, \quad EC = 16\sqrt{2}, \quad EF = BF + BE = a + b = 46, \quad CF = 34$$

$$46^2 = 256 \cdot 2 + 34^2 - 2 \cos \angle ECF \cdot 16\sqrt{2} \cdot 34$$

$$\cos \angle ECF = \frac{1156 + 512 - 2116}{2 \cdot 34 \cdot 16\sqrt{2}} = -\frac{448}{2 \cdot 34 \cdot 16\sqrt{2}} = -\frac{28}{4 \cdot 17\sqrt{2}} = -\frac{7}{17\sqrt{2}}$$

$$\sin^2 \angle ECF + \cos^2 \angle ECF = 1 \Rightarrow \sin^2 \angle ECF = 1 - \cos^2 \angle ECF$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin^2 \angle ECF = 1 - \frac{49}{289.2} = \frac{529}{289.2} = \frac{23}{17\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle ECF > 0, \text{ т.к. } \angle ECF < \pi \Rightarrow \sin \angle ECF = \frac{23}{17\sqrt{2}}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \sin \angle ECF$$

$$AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \frac{23}{17\sqrt{2}} = 23^2 = 529$$

Ответ: а). $CF = 34$.
б). $S_{ACF} = 529$.

⑤ $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 & (2) \end{cases}$

а: ровно 2 решения.

Рассмотрим (1):

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

Рассмотрим модули.

Возьмем систему координат с единицей —
или отрезками в 2 клетки (т.е. 2 = 1 клетка).

$$\begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \geq x+8 \end{cases}$$

$$-x-y-8-x-y-8=16$$

$$-2x=32$$

$$x=-16$$

$$\begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \leq x+8 \end{cases}$$

$$x-y-8+x-y+8=16$$

$$-2y=16$$

$$y=-8$$

$$\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \geq x+8 \end{cases}$$

$$x+y+8-x-y-8=16$$

$$2y=16$$

$$y=8$$

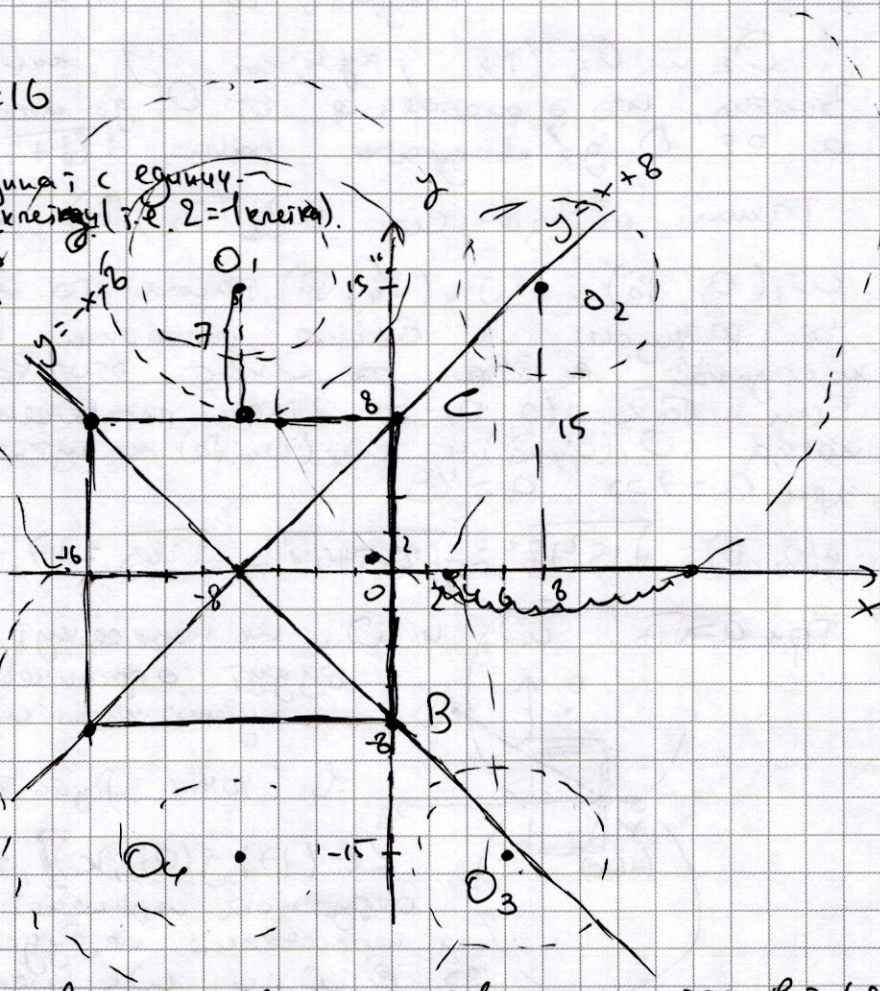
$$\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \leq x+8 \end{cases}$$

$$x+y+8+x-y+8=16$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

Как мы видим, получившаяся фигура — квадрат с центром в т. (-8; 0).
Обозначим т. (0; 8) за C и (0; -8) за B.



Далее рассмотрим (2):

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a.$$

~~В уравнении~~

При раскрытии модулей мы получим, что ~~это~~ это окружности с центрами в точках $(\pm 8; \pm 15)$ и ограниченные осями координат в зависимости от раскрытия модулей. Радиус этой окружности равен $\sqrt{a}$, где $a > 0$.

~~Отметим~~ Отметим центр O_1 окр-ти 1 за O , где ω , это окружность, образованная 1-м четвертом при раскрытии модулей.

Аналогично отметим O_2 в I четверти, O_3 в IV четверти и

O_4 в II четверти. Таким образом координаты центров такие: $O_1(-8; 15)$; $O_2(8; 15)$; $O_3(8; -15)$; $O_4(-8; -15)$.

Заметим, что O_1 и O_4 симметричны относительно Ox и

квадрата, как и O_2 и O_3 . Таким образом, если

O_1 пересечёт квадрат, то и O_4 тоже, а аналогично с

O_2 и O_3 (т.к. радиусы у них все одинаковы).

Заметим, что расстояние от O_1 до квадрата равно $15 - 8 = 7$, а от O_2 до квадрата равно $\sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$.

Таким образом, если $\omega_2(O_2; \sqrt{a})$ пересечёт квадрат, то

$\omega_1(O_1; \sqrt{a})$ и $\omega_4(O_4; \sqrt{a})$ также его пересекнут, если

их радиусы не больше расстояния от O_1 до начала

координат ~~и т.д.~~ — нас этот вариант не устраивает. Если $\sqrt{a} < g(O_1; O)$, то 2 точки пересечения будут, лишь тогда, когда $\omega_1(O_1; \sqrt{a})$ и $\omega_4(O_4; \sqrt{a})$ касаются квадрата, то есть при $\sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$.

$$g(O_1; O) = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17.$$

При $a = 49$ ω_1 и ω_4 не пересекут квадрат вообще, т.к.

будут ограничены осями. Тогда

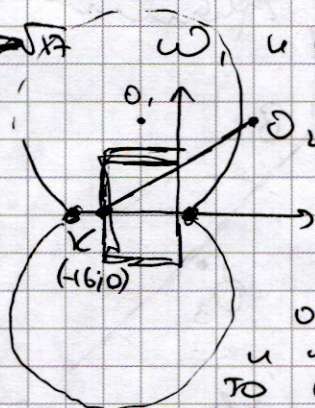
ω_2 нам нужно, чтобы ω_2 пересекла квадрат

в 1 точке. Пусть $K(-16; 0)$. Тогда

$R \in (17; g(O_2; K)]$, т.к. если $R > g(O_2; K)$,

окружность пересечёт ось дальше квадрата

и пересечения не будет. А если $R \in (17; g(O_2; K)]$, то ω_2 и ω_3 пересекут квадрат в 2 симметричных относительно оси x точках.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(0, k) = \sqrt{15^2 + (-16-8)^2} = \sqrt{15^2 + 24^2} = \sqrt{225 + 576} = \sqrt{801}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} 37 < R \leq \sqrt{801} \\ R = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{a} \leq \sqrt{801} \\ \sqrt{a} = 7 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 289 < a \leq 801 \\ a = 49 \end{cases}$$

$$a \in \{49\} \cup (289; 801]$$

② Ответ: при $a \in \{49\} \cup (289; 801]$ система имеет ровно 2 решения.

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = x^{2 \ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \left(1 - \frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y > 0 \\ xy^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{-x^2}{y} > 0 \right|$$

$\Rightarrow$ можно прологарифмировать по основанию e .

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = \ln x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$\ln(-y) \cdot \ln\left(1 - \frac{x^2}{y}\right) = \ln x \cdot 2 \ln(xy^2)$$

$$\ln(-y) \cdot (\ln(x^2) - \ln(-y)) = \ln x \cdot 2 \ln(x \cdot (-y)^2)$$

$$\ln(-y) (2 \ln x - \ln(-y)) = 2 \ln x (\ln x + 2 \ln(-y))$$

$$\text{Пусть } \ln x = a, \ln(-y) = b$$

$$b(2a - b) = 2a(a + 2b)$$

$$2ab - b^2 = 2a^2 + 4ab$$

$$2a^2 + 4ab - 2ab - b^2 = 0$$

$$2a^2 - 2ab - b^2 = 0$$

$$2(a-b)(a - \frac{1}{2}b) = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = \frac{1}{2}b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln x = \ln(-y) \\ \ln x = \frac{1}{2} \ln(-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln x = \ln(-y) \\ \ln x^2 = \ln(-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y & (a) \\ x^2 = -y & (b) \end{cases}$$

Подставим $b(2)$:

a). $x = -y$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 - 2y^2 - 3y^2 - 12y + 4y = 0$$

$$-4y^2 - 8y = 0$$

$$-4y(y+2) = 0$$

$$y = 0$$

$$y = -2$$

$$y \in \mathbb{O} \cup \mathbb{D} \cup \mathbb{B}$$

$$\Rightarrow y = -2$$

$$x = -y \Rightarrow x = 2$$

подходит.

б). $x^2 = -2y \Rightarrow y = -x^2$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0 ; x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x > 0 \in \mathbb{O} \cup \mathbb{D} \cup \mathbb{B}$$

Рассмотрим $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 12$, $x > 0$

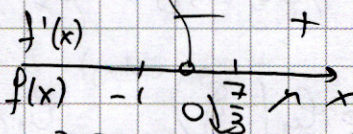
$f'(x) = 3x^2 - 4x - 7$. Найдем г. экстремума

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$D/4 = 4 + 21 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 5}{3} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$



Как мы видим, на промежутке $(0; 7/3)$ ф-ция убывает, а далее возрастает.

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{343}{27} - \frac{2 \cdot 49}{9} - \frac{14}{3} + 12 =$$

$$= \frac{49 \cdot (7 - 2 \cdot 3) - 14 \cdot 9 + 12 \cdot 27}{27} = \frac{49 - 126 + 324}{27} > 0. \text{ Следовательно,}$$

функция на $(0; +\infty)$ всегда положительна, т.к. её наименьшее значение на этом промежутке равно $\frac{343 - 126}{27} > 0$.

Таким образом, уравнение $x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$ $x > 0$ не имеет решений.

Итак. Тогда $(2; -2)$ — единственное решение

этой системы.

Ответ: $(2; -2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2}. \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos(7x - 3x) = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}(\cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x) = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x = 0$$

$$\cos 7x(1 + \sqrt{2} \cos 3x) + \cos 3x + \sin 7x(1 + \sqrt{2} \sin 3x) - \sin 3x = 0 \quad | +\sqrt{2}-\sqrt{2}$$

$$\cos 7x(1 + \sqrt{2} \cos 3x) + (\sqrt{2} + \cos 3x) + \sin 7x(1 + \sqrt{2} \sin 3x) - (\sin 3x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\underbrace{(\cos 7x + 1)}_{\geq 0} \underbrace{(1 + \sqrt{2} \cos 3x)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 + \sqrt{2} \sin 3x)}_{\geq 0} \underbrace{(\sin 7x - 1)}_{\leq 0} = 0$$

Любое слагаемое равно 0, либо одно из них положительно, другое — отрицательно.

1). слагаемое равно 0:

$$\begin{cases} (\cos 7x + 1) = 0 \\ (1 + \sqrt{2} \sin 3x)(\sin 7x - 1) = 0 \end{cases}$$

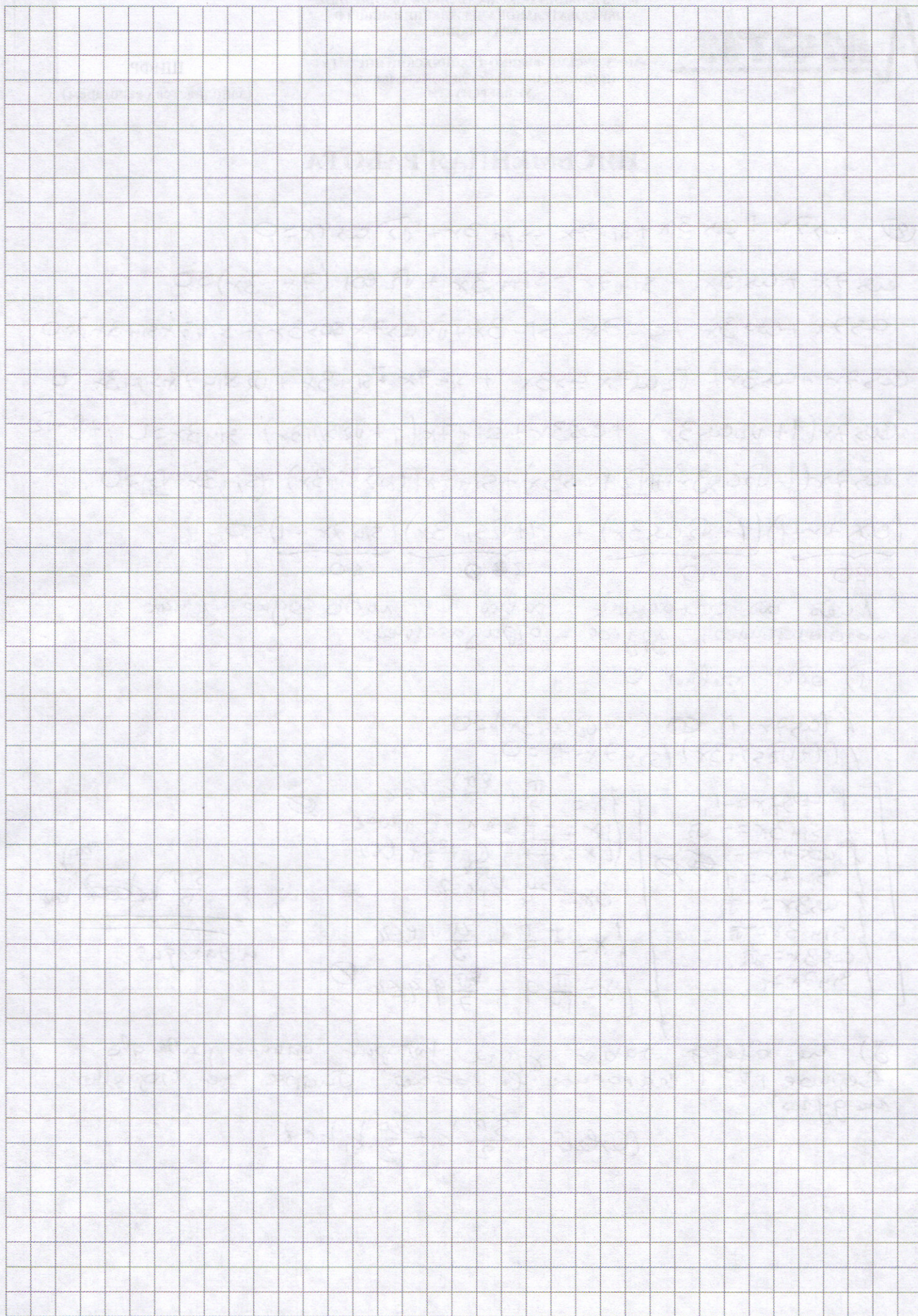
$$\left[\begin{array}{l} \cos 7x = -1 \\ \sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 7x = -1 \\ \sin 7x = 1 \\ \cos 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin 7x = 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}l + \frac{2\pi}{3}, l \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}l, l \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7}q, q \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \emptyset$$

$$; \quad x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

подходит.

5). не будет таких x , где которое данное равенство верное т.к. 1 слагаемое больше, чем второе и третье.

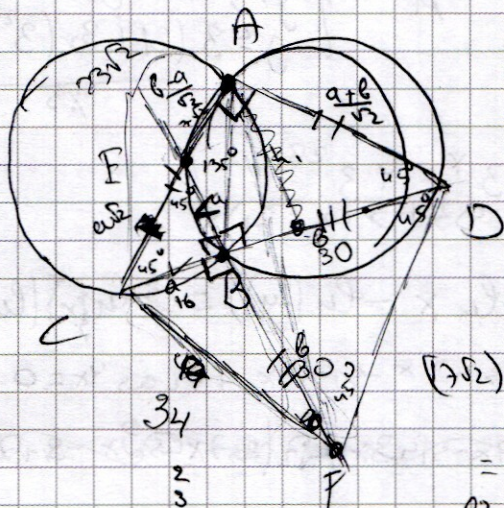
$$\text{Ответ: } \frac{5\pi}{12}k + \frac{2\pi}{3}l, k, l \in \mathbb{Z}.$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AB = 17\sqrt{2}$$

$$a\sqrt{2} \cdot (a\sqrt{2} + AE) = a(a+b) \quad | :a$$

$$\sqrt{2}(a\sqrt{2} + AE) = a+b$$

$$2a + AE\sqrt{2} = a+b$$

$$AE = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$$

$$(17\sqrt{2})^2 = a^2 + \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{2} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \left(\frac{b-a}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= a^2 + \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{2} + ab - a = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = 289 \cdot 2$$

$$AD = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

$$a^2 + b^2 = 289 \cdot 4$$

$$EF = \sqrt{289 \cdot 4} = 17 \cdot 2 = 34$$

$$\cos \varphi = \frac{1156 + 512 - 2116}{2 \cdot 34 \cdot 16\sqrt{2}}$$

$$a = 16$$

$$b^2 = 1126 - 256$$

$$4 \cdot 289 - 16^2 = 4 \cdot (289 - 64) = 4 \cdot 225 = 300$$

$$b = 30$$

$$AD = \frac{16+30}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$

$$EF = 46$$

$$AE = \frac{30-16}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

$$AF^2 = 49 \cdot 2 + 2116 = 216 + 98 = 2214$$

$$\sin \varphi = \frac{23}{17\sqrt{2}}$$

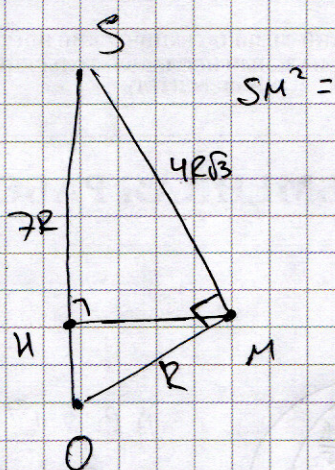
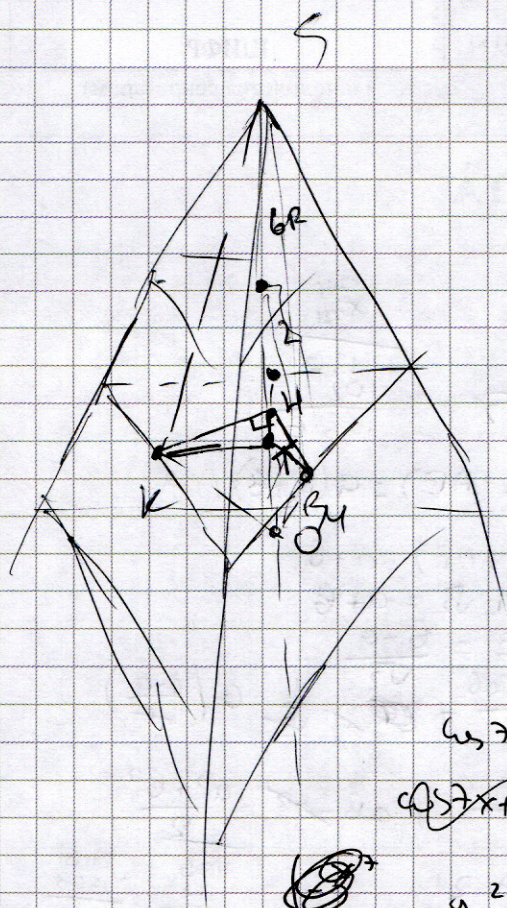
$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 = 23^2 = 529$$

$$\begin{aligned} -64 - 32 + 28 + 12 \\ -8 - 8 + 14 + 12 \\ -27 - 18 + 21 + 12 \end{aligned}$$

$$2x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$D/4 = 1 + 7/2 = 15$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2}$$



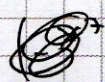
$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 3(31 + 3x(3^{22} - 1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 3(31 + 3x(3^{22} - 1)) \end{cases}$$

$$\ln(-y)(7\ln x - \ln(-y)) = 2\ln\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x + \ln y)$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}(\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = 0$$



$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y(y+4) + 2x(y+4) - 3x^2 + 4x = 0$$

$$(y+2x)(y+4) - 3x^2 + 4x = 0$$

$$x > 0, y < 0$$

$$(x+y)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$



черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = \sqrt{2} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$
 $\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$

$x_{1,2} = \frac{36 \pm 48R}{14}$
 $x = \frac{36R + 48R}{14} = \frac{84R}{14} = 6R$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$
 $(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$
 $(x+y)^2 + 4(x+y) - 4x^2 + 8x = 0$
 $x = \frac{\pi}{8}$

$\frac{S_{\Delta}}{S_{\text{пря}}} = \left(\frac{6R}{R+6R} \right)^2 = \left(\frac{6}{7} \right)^2 = \frac{36}{49}$

$S_{\text{пря}} = \frac{49}{36} \cdot 9 = \frac{49}{4}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$
 $\sin \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x-y}{2}$
 $(x+y)(x+y+4) - 4x(x+2) = 0$

$\frac{49}{64} \cdot 16 = \frac{49}{4}$

$x + R = 7R$

$\lg \angle KSO = \frac{\pi + R}{R} = \frac{7R}{R} = 7$
 $\angle KSO = \arctg 7$

$\cos 4x = \cos(7x - 3x) = \cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x$

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$
 $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a^2 = R^2$

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$
 $1) \begin{cases} x-y+8 \leq 0 \\ x+y+8 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq x+8 \\ y \leq -x-8 \end{cases}$

$-x-y-8 = 16$
 $-2x-16 = 16$
 $-2x = 32$
 $x = -16$
 $y = -16+8 = -8$

$2) \begin{cases} x-y+8 \leq 0 \\ x+y+8 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq x+8 \\ y \geq -x-8 \end{cases}$
 $x+y+8 = -x-y-8 = 16$
 $2y = 16$
 $y = 8$

$3) \begin{cases} x-y+8 \geq 0 \\ x+y+8 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq x+8 \\ y \leq -x-8 \end{cases}$
 $x-y+8 = -x-y-8 = 16$
 $-2y = 16$
 $y = -8$

$\sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}$
 $\frac{526 + 225}{80} = \frac{751}{80}$
 $\frac{24 \cdot 24}{96} = \frac{48}{8} = 6$

$$① \quad 64827 = 3 \cdot 9 \cdot 2401 =$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 9} \\ \underline{63} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 7} \\ \underline{21} \\ 38 \\ \underline{21} \\ 17 \\ \underline{14} \\ 3 \end{array}$$

$$= 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 343 = 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 3} \\ \underline{12} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$= 3^3 \cdot 7^4$$

3 тройки, 4 семерки или 1 тройка,

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

$$C_8^3 = 70$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$$

$$33333331$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 81 \cdot 8 \cdot 1 =$$

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

$$2019$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 2 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$C_5^4 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ + 70 \\ \hline 1204 \end{array}$$

$$② \quad \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\begin{array}{l} -y > 0 \\ y < 0 \\ x > 0 \end{array} \Rightarrow \frac{x}{y} > 0$$

лог:

$$\ln\left(-\frac{x^2}{y}\right) \cdot \ln(-y) = 2\ln(xy^2) \ln(x)$$

$$\ln(-y) (\ln x^2 + \ln(-y)) = 2(\ln x + \ln(y^2)) \ln x$$

$$\ln(-y) (2\ln x + \ln(-y)) = 2(\ln x + 2\ln(-y)) \ln x$$

$$\ln(-y) \ln x = a, \ln y = b$$

$$b(2a+b) = 2(a+2b)a$$

$$2ab + b^2 = 2a^2 + 4ab$$

$$2a^2 + 4ab - 2ab - b^2 = 0 \Rightarrow 2a^2 + 2ab - b^2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{7x+3x}{2} \right) \cos \left(\frac{7x-3x}{2} \right) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$1 - \cos \frac{\varphi}{2} = \cos \varphi$$

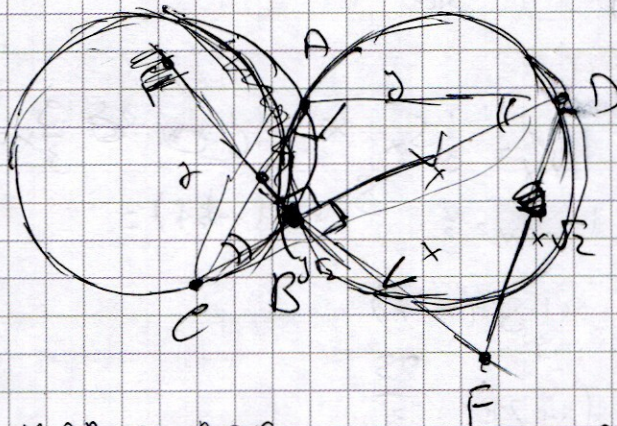
$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\cos \varphi + 1}{2}}$$

6)

$$r_2 = 1.7$$

$$\omega_1, \omega_2 = AB$$



$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BC = CD$$

$$BF = BD$$

$$CF = ?$$

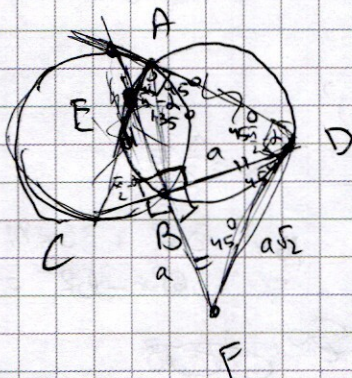
$$BC = 16$$

$$\frac{1}{2} \angle AOB = \angle ADB = \angle ACB \Rightarrow AC = AD \Rightarrow S_{ACF} = ?$$

$$\Rightarrow CD = 4\sqrt{2}$$

$$FD = 4\sqrt{2}$$

$$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle C = 45^\circ$$



$$AE, BD \text{ и } AC$$

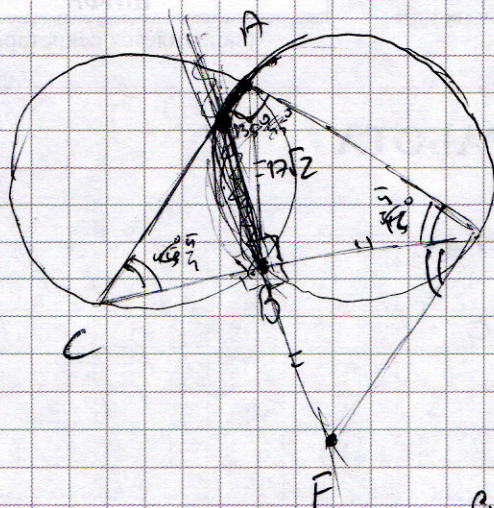
$$\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{3\pi}{2} - 2\alpha = \pi$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R \quad AB = 2R \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 1.7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.7\sqrt{2}$$

$$AB = BD = 1.7\sqrt{2}$$



$$\sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = 0 \quad \cos \alpha - \cos \beta$$

$$\cos x - \cos y$$

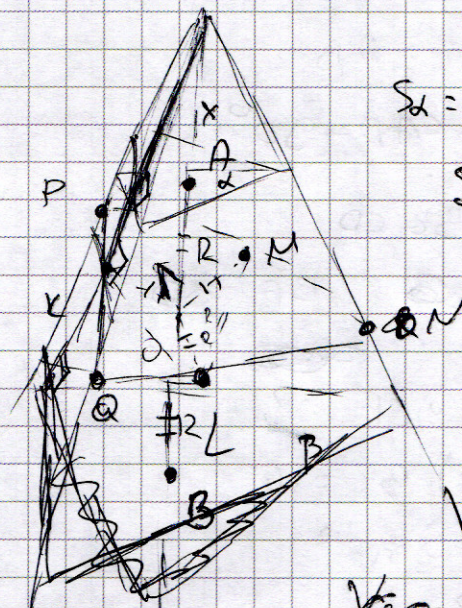
$$x + y = z$$

$$\cos(z-y) - \cos(z-x) = \cos z \cos y + \sin z \sin y -$$

$$\sin 2x$$

$$\cos 7x - \sin 3x =$$

S



$$S_a = 9$$

$$CKSO = ?$$

$$S_{aen} = ?$$

$$S_p = 16$$

$$V_a = \frac{1}{3} S_a \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot x = 3x$$

$$V_{pan} = \frac{1}{3} S_{pan} (x + R) =$$

$$= \frac{1}{3} S (x + R)$$

$$V_b = (x + 2R) \cdot \frac{25}{3}$$

$$V_a + V_b = \frac{25}{3} x + \frac{50}{3} R + 3x = \frac{75x + 50R}{3} = \frac{25(3x + 2R)}{3}$$

$$\frac{S_a}{S_{pan}} = \left(\frac{x^2}{(x+R)^2} \right)^2$$

$$\frac{S_{pan}}{S_b} = \frac{(x+R)^2}{(x+2R)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x+2R)^2} = \frac{9}{16}$$

$$25x = 9x + 2 \cdot 16R$$

$$x = \frac{9}{8} R$$

$$25x^2 = 9x^2 + 36xR + 4R^2$$

$$16x^2 = 9x^2 + 36xR + 4R^2$$

$$16x^2 - 36xR - 4R^2 = 0$$

$$x^2 - 9xR - 2R^2 = 0$$