

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} \text{№3. } 16875 & 5 \\ 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3^3 \end{array}$$

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4 \cdot 1$$

Число может состоять из цифр: ^(цифр)
1) 1; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5
2) 1; 1; 5; 5; 5; 5; 3; 5

Всего выбрать из этих цифр для составления 8-знач. числа $8!$, но некоторые числа повторяются.

1) 3 раза повторяется '3', значит $3!$ одинаковых чисел получилось,
4 раза повторяется '5', значит $4!$ одинаковых чисел.

2) 2 раза повтор. '1' $\Rightarrow$ 2 одинаковых числа (столько раз повторяется
каждое число)
4 раза повтор. '5' $\Rightarrow$ 4!

Тогда кол-во восьмизначных чисел: $\frac{8!}{3! \cdot 4!} + \frac{8!}{2! \cdot 4!} = 280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120

$$\text{№3. } \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

Используя формулу для суммы синусов и косинусов, получили:

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

Если $\cos 5x - \sin 5x = 0$, то $\operatorname{tg} 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$

Если $\cos 5x - \sin 5x \neq 0$, то поделим на него равенство, получим:

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

Используя формулу вспомогательного аргумента: $2 \cos 2x = 2 \sin(5x + \frac{\pi}{4})$

$$\cos 2x - \sin(5x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad \text{или} \quad -\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad (\text{по формуле приведения})$$

Используя формулу разности косинусов, получим: $2 \sin(3,5x - \frac{\pi}{8}) \sin(x - \frac{\pi}{8}) = 0$

$$\begin{cases} \sin(3,5x - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \sin(x - \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3,5x - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$

5. $|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \dots (1)$
 $(|x-6|)^2 + (|y|-8)^2 = a \dots (2)$

(1): $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-12=12 \\ x=12 \\ y \leq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$

$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y=12 \\ y=-6 \\ y \leq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$

$\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=12 \\ y=6 \\ y \geq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$

$\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+12=12 \\ x=0 \\ y \geq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$

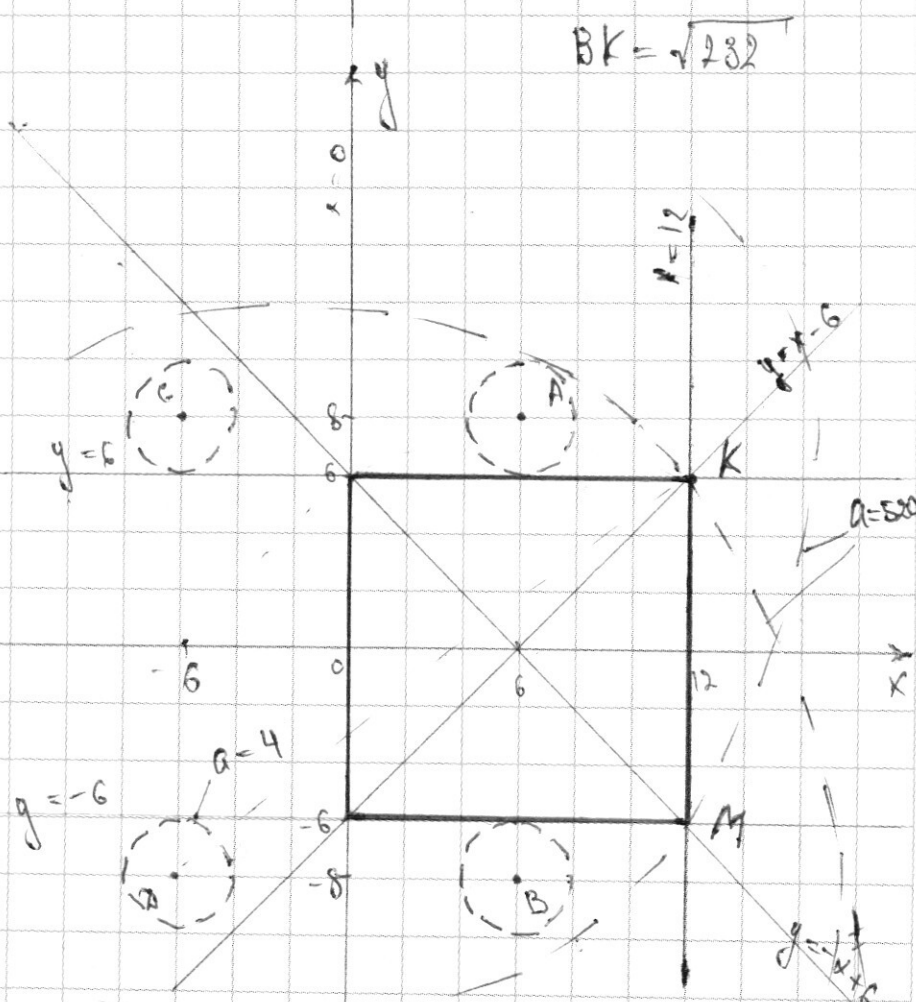
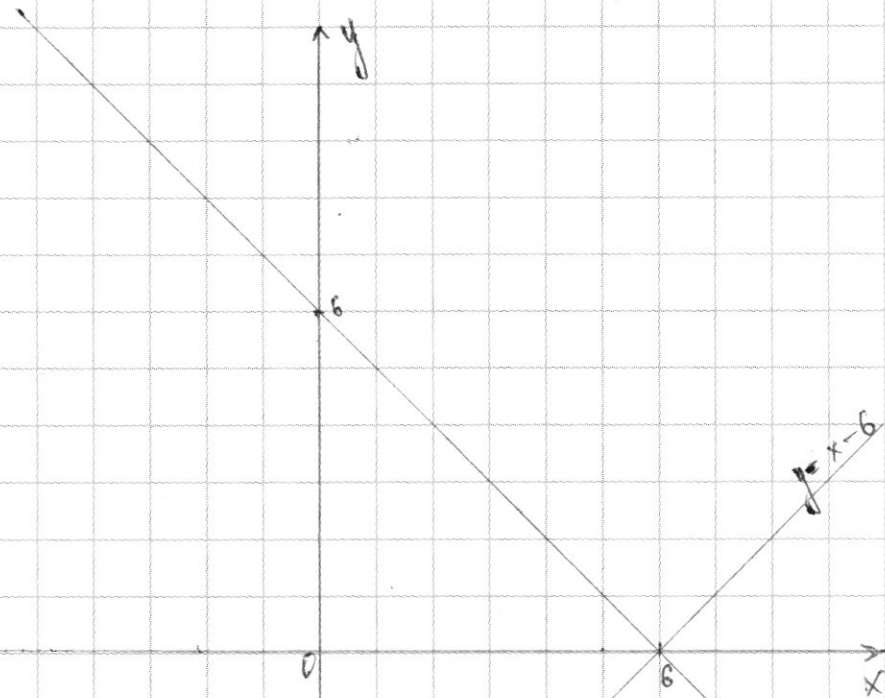
Линии образуют график (1) ур-ия - 4 отрезка, образующих квадрат (см. рис.)

(2): ур-ие четырех окружностей с центрами в точках $A(6; 8); B(6; -8); C(-6; 8); D(-6; -8)$ и радиусами $\sqrt{a}$

- 1) Если $a \in [0; 4)$, то решений нет $\ominus$
- 2) $a = 4$, то 2 решения $\oplus$
- 3) $a \in [4; 520)$, то не менее 4 решений $\oplus$
- 4) $a = 520$, то 2 решения $\oplus$
- 5) $a > 520$, то решений нет $\ominus$

П.к. $BK < DK$, то при пересечении окружностей с центрами в точках C и D с квадратом в т. M и K соответственно, окр-ти с центрами A и B пересекают квадрат не будут

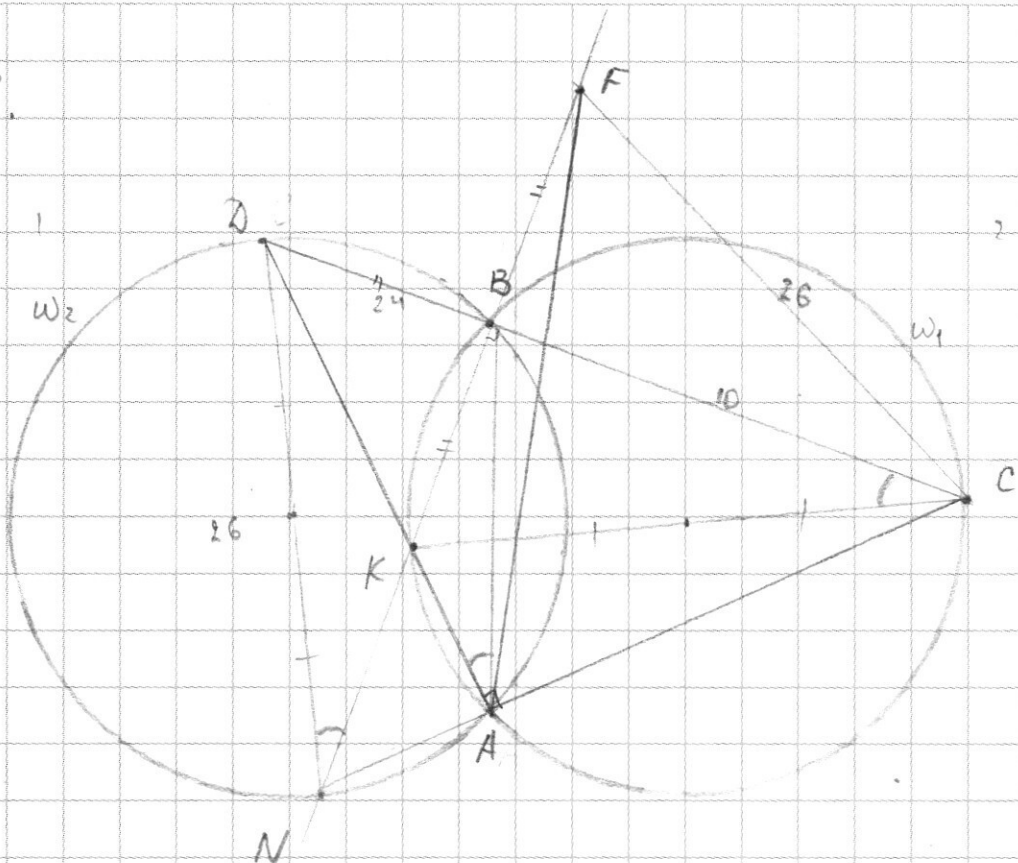
Ответ: при $a=4$ и $a=520$



$BK = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{520}$
 $DK = \sqrt{a} \Rightarrow a = 520$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



Решение
а) Пусть $FB \cap \omega_1 = K_1$; $AD \cap \omega_1 = K_2$
т.к. $\angle K_2 AC = 90^\circ$, то $K_2 C$ - диаметр
т.к. $\angle K_1 BC = 90^\circ$, то $K_1 C$ - диаметр
значит $K_1 = K_2 = K$ (т.к. из одной
точки (C) можно провести только
один диаметр в данной окр-ти)
 $KC = 18 \cdot 2 = 26$

Аналогично прямые FB и CA
пересекают окр-ть ω_2 в т. N,
причем DN - диаметр. ($\angle DAN = 90^\circ$)

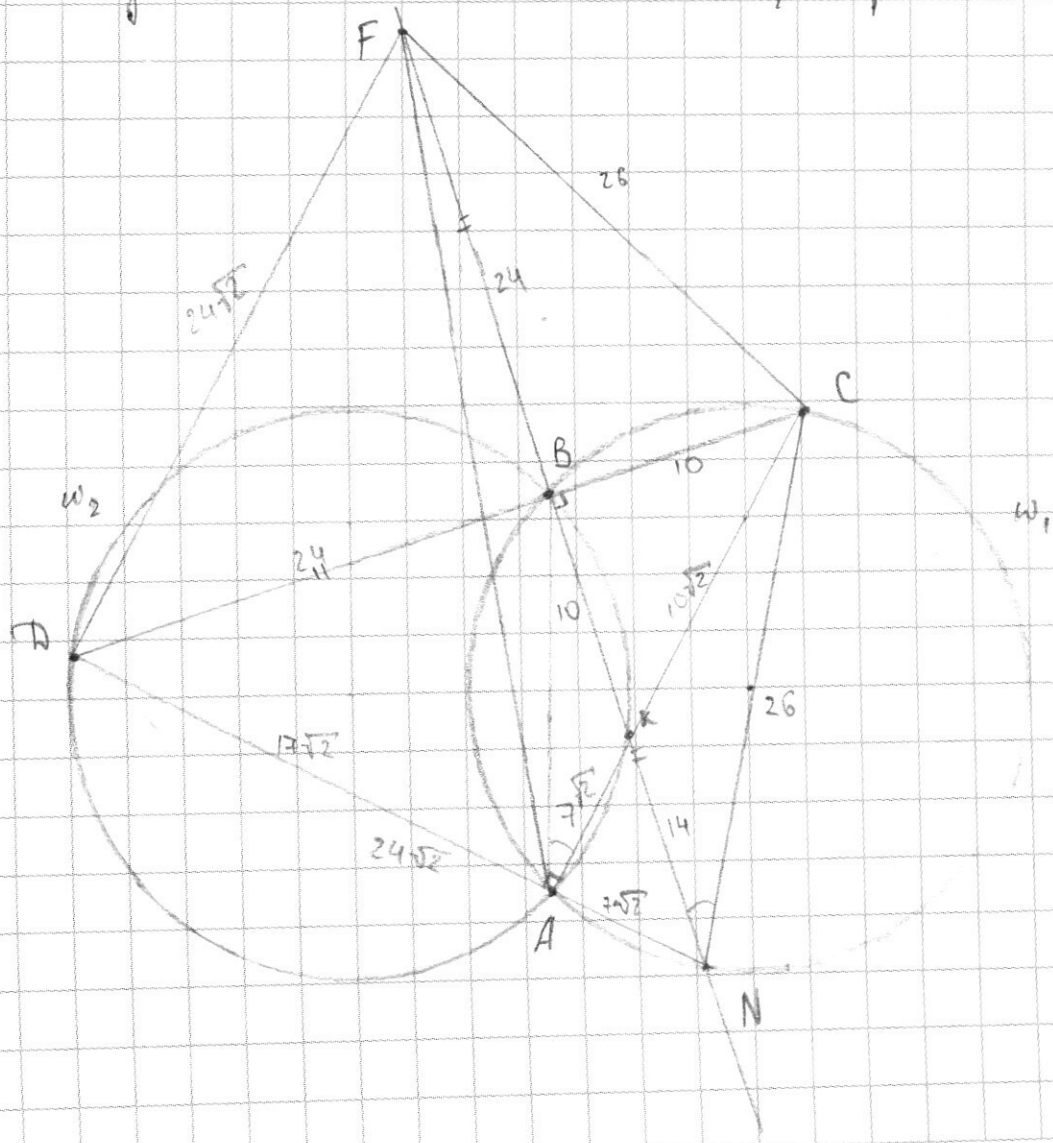
Д.п. BA

$\angle ANB = \angle DAB$ - как вписанные, опирающ. на одну дугу (окр. ω_2)
 $\angle DAB = \angle KCB$ - как вписанные, опирающ. на одну дугу (окр. ω_1) $\Rightarrow \angle ANB = \angle KCB$

т.к. окр-ти равных радиусов, то $\overset{\sim}{DB} = \overset{\sim}{KB} \Rightarrow DB = KB = FB \Rightarrow$ в $\triangle FCK$
CB - медиана и высота $\Rightarrow \triangle FCK$ - равнобедренный $\Rightarrow FC = KC = 26$

б) Из $\triangle CBF$ ($\angle B = 90^\circ$) по т. Пифагора $BF = 24 \Rightarrow DB = BK = 24$

Из $\triangle NDB$ ($\angle B = 90^\circ$) по т. Пифагора $BN = 10$. $BN < BK$, значит, рисунок выполнен
иначе.



$$BF = BN = BD = 24; FC = CN = CK = 26$$

$$\text{Из } \triangle DBN (\angle B = 90^\circ): DN = 24\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle CN} = \frac{1}{2} BN \cdot DC = \frac{1}{2} CA \cdot DN$$

$$CA = \frac{BN \cdot DC}{DN} = \frac{24 \cdot 34}{24\sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$$

$$\text{Из } \triangle DFB (\angle B = 90^\circ): DF = 24\sqrt{2}$$

Из аналогии предыдущего пункта
 $BC = BK = 10$; $KA = AN$

$$KN = BN - BK = 24 - 10 = 14$$

$$\text{Из } \triangle AKN (\angle A = 90^\circ): KA = AN = 7\sqrt{2}$$

$\triangle BAK \sim \triangle CNK$ (по двум углам):

$$\frac{BA}{CN} = \frac{BK}{CK} \Rightarrow BA = \frac{10 \cdot 26}{10\sqrt{2}} = 13\sqrt{2}$$

1) $\triangle KBC$ ($\angle B = 90^\circ$) по т. синусов: $\frac{\sin \angle CBK}{CK} = \frac{\sin \angle BKC}{BC}$

$$\sin \angle BKC = \frac{10 \cdot 1}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

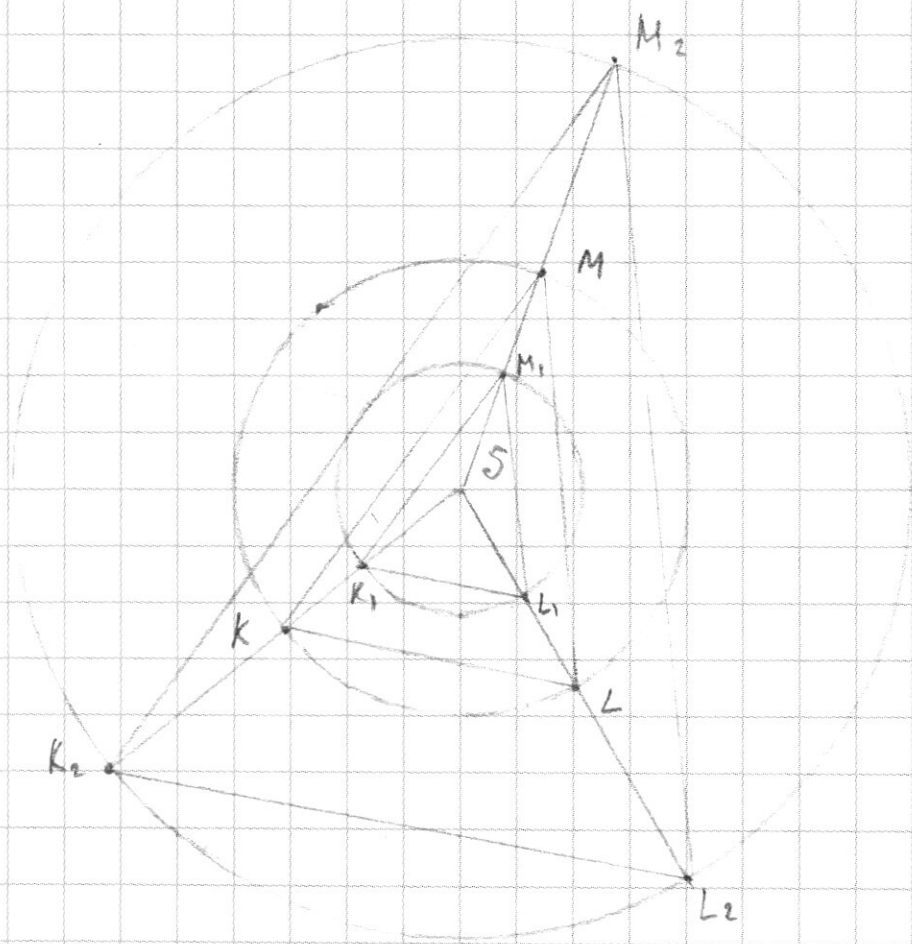
2) $\triangle FCK$ по т. синусов: $\frac{\sin \angle FKC}{FC} = \frac{\sin \angle FCK}{FK}$

$$\sin \angle FCK = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 34}{26} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} FC \cdot CA \cdot \sin \angle FCA = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 17\sqrt{2} \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} = \frac{289 \cdot 2}{2} = 289$$

Ответ: а) 26; б) 289

№4.

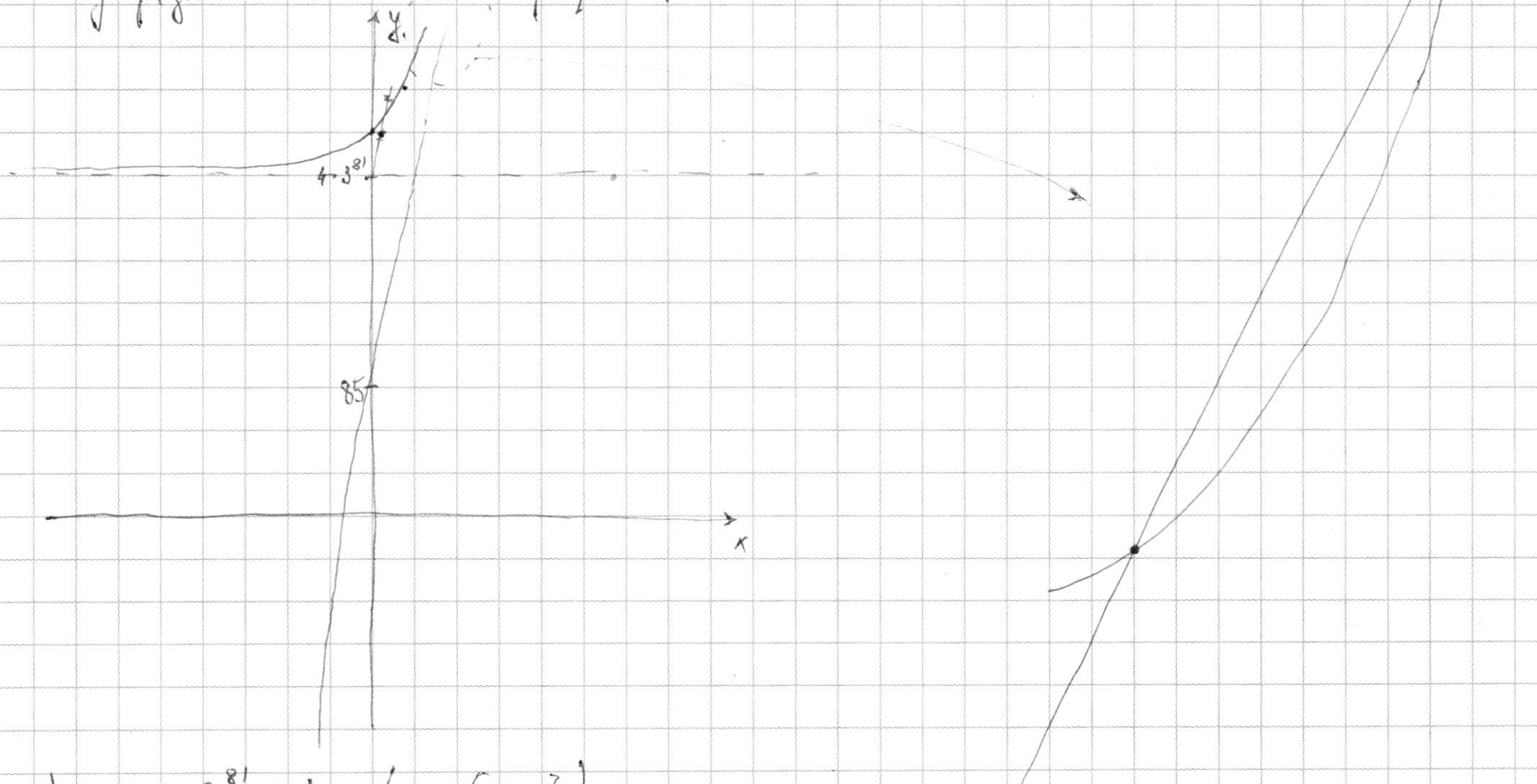


Рассмотрим вид со стороны
вершины (сверху) 3D перпенди-
кулярна плоскости листа
M, L, K - точки касания
 $S_{K_2M_2L_2} = 9$; $S_{K_1M_1L_1} = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} & (1) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x & (2) \end{cases}$$

Изобразим схематично график:



а) $y = 4 \cdot 3^{81} + 1 \quad (x \in [0; 1])$

(2): $4 \cdot 3^{81} + 1 < 85 + (3^{81} - 1)x \Rightarrow x > \frac{4 \cdot 3^{81} - 84}{3^{81} - 1} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

(1): $4 \cdot 3^{81} + 1 \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \Rightarrow x \leq 0$

б) $y = 4 \cdot 3^{81} + 2 \quad (x \in [0; 1])$

(2): $x > \frac{4 \cdot 3^{81} - 83}{3^{81} - 1} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

(1): $x \leq \log_3 2$

в) $y = 4 \cdot 3^{81} + 3 \quad (x \in [0; 1])$

(2): $x > \frac{4 \cdot 3^{81} - 82}{3^{81} - 1} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

(1): $x \leq 1$

Рассматриваем только целые x

г) $y = 4 \cdot 3^{81} + 9 \quad (x = 2)$

(2): $x > \frac{4 \cdot 3^{81} - 76}{3^{81} - 1} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

(1): $x \leq 2$

д) $y = 4 \cdot 3^{81} + 27 \quad (x = 3)$

(2): $x > \frac{4 \cdot 3^{81} - 58}{3^{81} - 1} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

(1): $x \leq 3$

е) $y = 4 \cdot 3^{81} + 81 \quad (x = 4)$

(2): $x > \frac{4 \cdot 3^{81} - 4}{3^{81} - 1} = 4$

(1): $x \leq 4$

при $x \in (4; 5)$ (1) и (2) пересекаются

$$y = 4 \cdot 3^{81} + 243 \quad (x=5) \quad - \quad (5; 4 \cdot 3^{81} + 243) \quad \text{целая точка}$$

$$(2): \quad \begin{cases} x > \frac{4 \cdot 3^{81} + 158}{3^{81} - 1} \leq 5 \end{cases}$$

$$(1): \quad \begin{cases} x \leq 5 \end{cases}$$

$$x=5: \quad (1): \quad y \geq 4 \cdot 3^{81} + 243$$

$$(2): \quad \begin{cases} y < 85 + 3^{81} \cdot 5 - 5 \\ y < 3^{81} \cdot 5 + 80 \end{cases}$$

$$\text{разность: } 3^{81} \cdot 5 + 80 - 4 \cdot 3^{81} - 243 = 3^{81} - 163$$

$$\text{целых: } 3^{81} - 164$$

$$y = 4 \cdot 3^{81} + 729 \quad (x=6)$$

$$(2): \quad \begin{cases} x > \frac{4 \cdot 3^{81} + 644}{3^{81} - 1} \leq 6 \end{cases}$$

$$(1): \quad \begin{cases} x \leq 6 \end{cases}$$

$$x=6: \quad (1): \quad y \geq 4 \cdot 3^{81} + 729$$

$$(2): \quad \begin{cases} y < 85 + 3^{81} \cdot 6 - 6 \\ y < 3^{81} \cdot 6 + 80 \end{cases}$$

$$4 \cdot 3^{81} + 729 < 3^{81} \cdot 6 + 80$$

$$3^{81} \cdot 2 > 650 > 0$$

$$\text{целых: } 2 \cdot 3^{81} - 64951$$

$$x=7: \quad (1): \quad \begin{cases} y \geq 4 \cdot 3^{81} + 2187 \\ y < 85 + 3^{81} \cdot 7 - 7 \end{cases}$$

$$\text{целых: } 3 \cdot 3^{81} - (3^7 - 85 + 7 + 1) = 3 \cdot 3^{81} - 3^7 + 77 = 3 \cdot 3^{81} - 2110$$

$$\text{итого: } 3^{81} - 164 + 2 \cdot 3^{81} - 651 + 3 \cdot 3^{81} - 2110 + \dots =$$

$$= 3^{81} (1 + 2 + 3 + \dots) \neq -164 - 651 - 2110$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 3 3 3 5 5 5 5
1 3 3 5 5 5 5 3
1 3 3 5 5 5 3 5
1 3 3 5 5 3 5 5
1 3 3 5 3 5 5 5
1 3 5 5 5 5 3 3
1 3 5 5 5 3 5 3
1 3 5 5 5 3 3 5

3 3 3

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 280$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{1!} = 8!$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 56 \\ \hline 5 \\ \times 280 \\ \hline 3 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\lg y \cdot \lg \frac{x^2}{y^2} = 2 \cdot \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$2 \lg y \cdot \lg \frac{x^2}{y^2} = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2 - \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{4x}{y^2} - 8 \frac{1}{y} = 0$$

$$2(y^2 - 4y + 4) - 8 - x^2 - 4x - xy = 0$$

$$2(y-2)^2$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cos(7x + \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\text{Если } \cos 5x - \sin 5x = 0, \text{ то } \tan 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

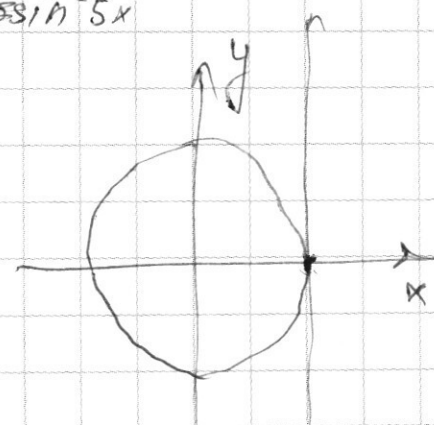
$$\neq 0: 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 2x = 2 \cos \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} + 5x - \frac{\pi}{4}) =$$

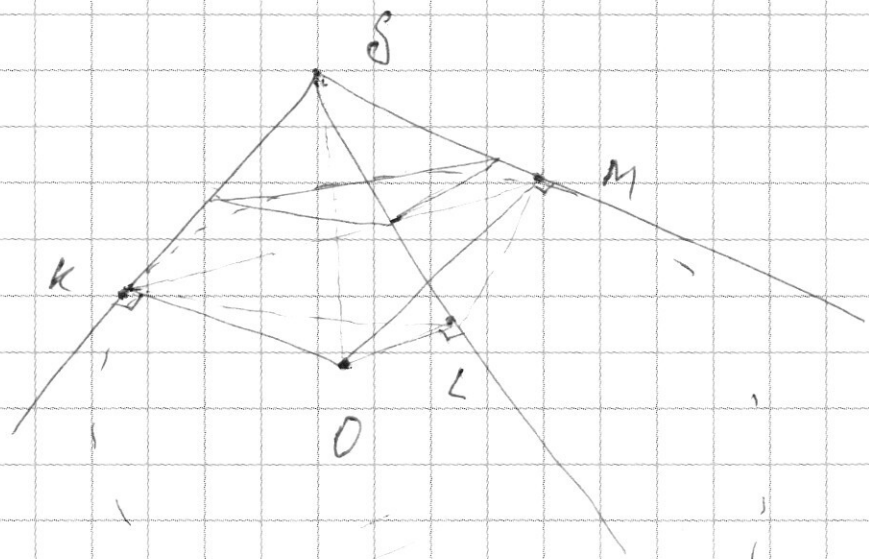
$$= \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos^2 x - \sin^2 5x$$



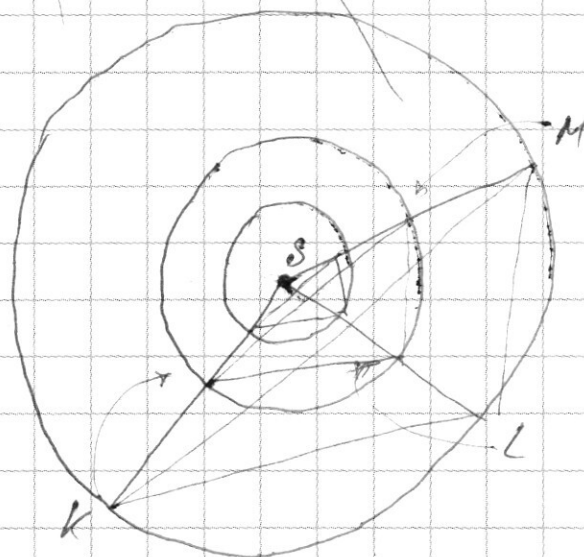
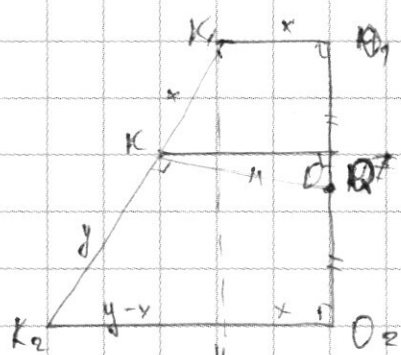
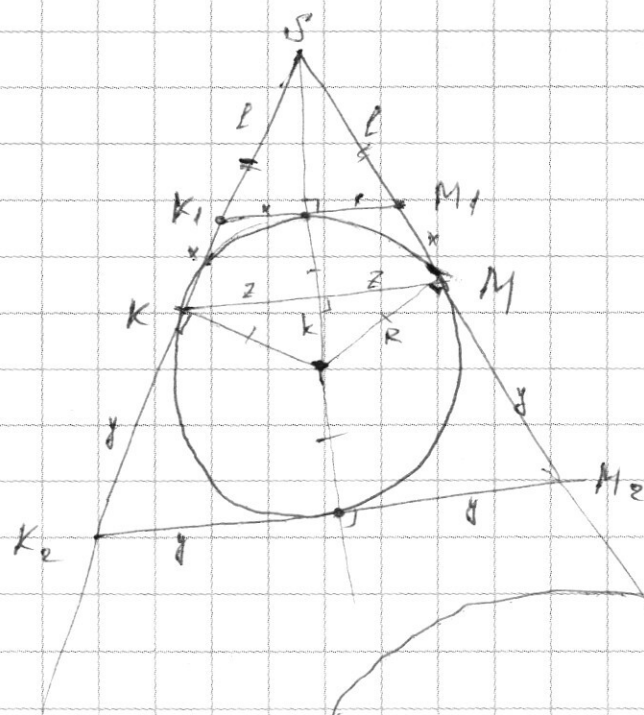
$$\frac{\pi}{2} x = \frac{\pi}{8}$$

$$x = \frac{\pi}{28}$$



$$S_{K_1 M_1 L_1} = 4$$

$$S_{K_2 M_2 L_2} = 9$$



$$QO_2 = \sqrt{(y+x)^2 - (y-x)^2} = \sqrt{y^2 + x^2 + 2xy - y^2 - x^2 + 2xy} = 2\sqrt{xy}$$

$$k = \sqrt{(l+x)^2 + xy - (l^2 - x^2) - ((l+x)^2 - z^2)} = \sqrt{l^2 + x^2 + 2xy - l^2 + x^2 - l^2 - x^2 - 2xl + z^2} = \sqrt{2xy + x^2 - l^2 - 2xl + z^2}$$

$$k^2 + z^2 = R^2 = xy$$

$$z^2 - xy = 2xy + x^2 - l^2 - 2xl + z^2$$

$$l^2 + 2xyl - x^2 - 3xy = 0$$

$$D = 4x^2 + 4x^2 + 12xy - 84 = 0$$

$$l = \frac{-2x \pm 2\sqrt{2x^2 + 3xy - 1}}{2} = -x \pm \sqrt{2x^2 + 3xy - 1}$$

$$z = (x+l)^2 - ((l+x)^2 + xy) - xy + z^2$$

$$z = 2x^2 + 3y - 1 - (2x^2 + 3xy - 1 + xy - xy + z^2)$$

$$z = 2x^2 + 3y - 1 - 2x^2 - 3xy + 1 - z^2$$

$$z^2 + z = 0 \Rightarrow z = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad \dots (1)$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a \quad \dots (2)$$

~~$$x-6-y \geq 0$$~~

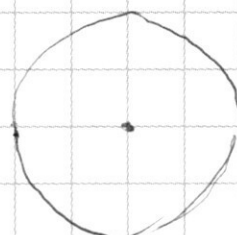
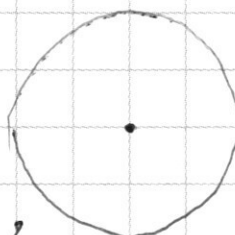
$$\begin{cases} x-6-y > 0 \\ x-6+y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x - 12 &= 12 \\ x &= 12 \\ y &< x-6 \\ y &> -x+6 \end{aligned}$$

$$(2): \begin{cases} (x-6)^2 + (y-8)^2 = 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-8)^2 = 4 \\ x \leq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

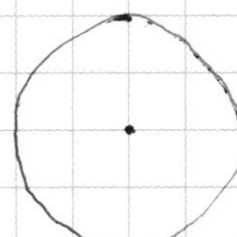
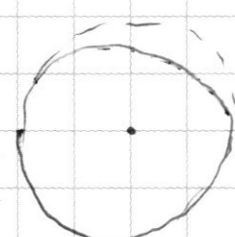
$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 180 \\ \hline 196 \\ + 324 \\ \hline 520 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2.5 \\ 2 \\ 2.1\bar{3} \\ 4 \\ 8 \end{array}$$



$$\rho(x; k) = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{324 + 196} = \sqrt{520} = 2\sqrt{130}$$

$$BK = \sqrt{36 + 196} = \sqrt{232}$$

$$\begin{array}{r} 232 | 2 \\ 116 | 2 \\ 58 | 2 \\ 29 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 232 | 2 \\ 116 | 2 \\ 58 | 2 \\ 29 \end{array}$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + \frac{(3^{81} - 1)}{2} x \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ 3 \\ \hline 76 \end{array} \begin{array}{r} 4 \\ 19 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ 27 \\ \hline 58 \end{array} \begin{array}{r} 4 \\ 145 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} x - x$$

$$3^x + 3^{81} (4 - x) + x = 85$$

$$3^x = 85 - x + 3^{81} x - 3^{81} \cdot 4$$

$$x = \log_3 (85 - x + 3^{81} x - 3^{81} \cdot 4)$$

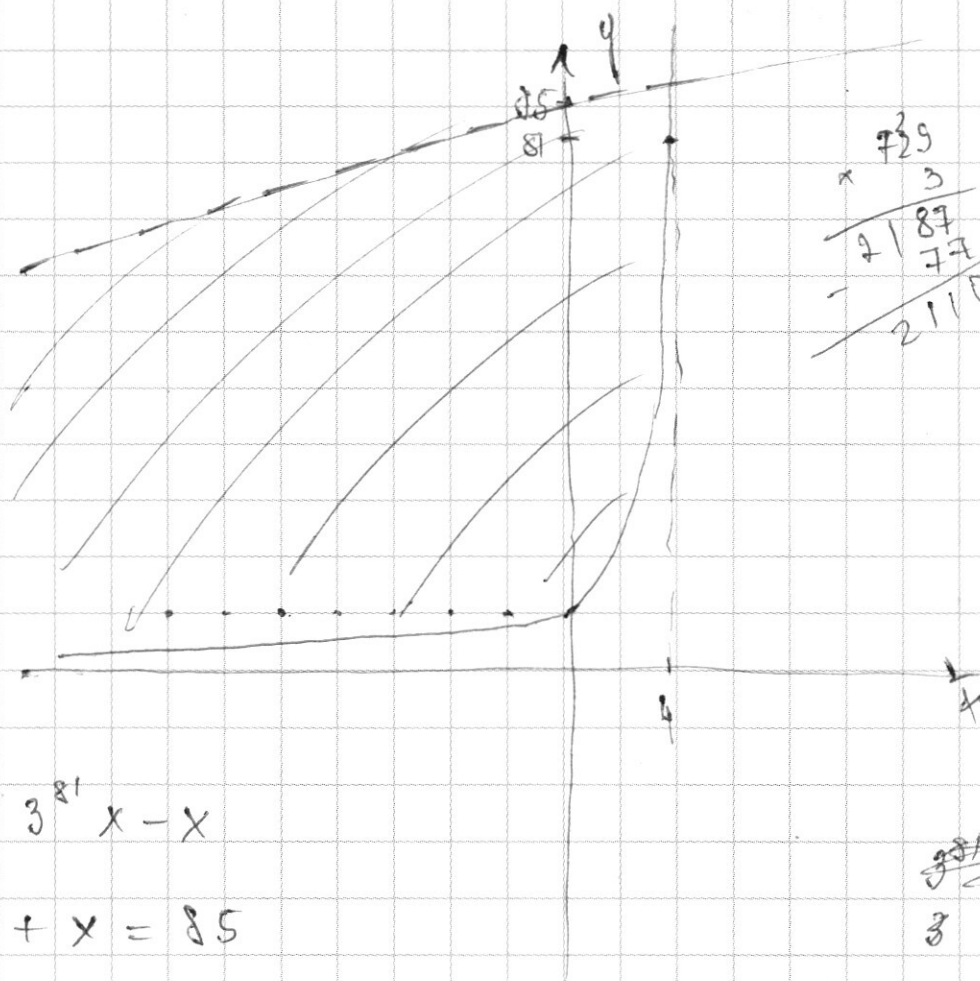
$$y = 1$$

$$1 < 85 + \frac{(3^{81} - 1)}{2} x$$

$$x > \frac{-84}{3^{81} - 1}$$

$$x > \frac{84}{1 - 3^{81}}$$

$$\frac{84}{1 - 3^{81}} + 1$$



$$\begin{array}{r} 729 \\ 3 \\ \hline 2187 \\ 77 \\ \hline 2110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 3 \\ \hline 729 \\ 85 \\ \hline 644 \end{array} \begin{array}{r} 4 \\ 164 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 85 \\ \hline 158 \end{array} \begin{array}{r} 4 \\ 12 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$4 \cdot 3^{81} + 644 \cdot 4 \leq 6 \cdot 38 - 6$$

$$3^{81} \cdot 2 \neq 644 \cdot 4 \approx 26$$

$$3^{81} \cdot 2 - \frac{644 \cdot 2 \cdot 81}{3 \times 3} > 1$$

$$\frac{243}{243}$$

$$2 < 85 + \frac{(3^{81} - 1)}{2} x$$

$$x > \frac{83}{1 - 3^{81}}$$

