

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

MINISTRY OF DEFENSE
GENERAL STAFF

SECRET

1955

General Staff of the Ministry of Defense

On the basis of the results of the work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1954, the following conclusions are drawn:

- 1. The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1954 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work.
- 2. The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1954 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work.
- 3. The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1954 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work.

1955

The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1955 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work. The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1955 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work.

The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1955 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work.

1955

The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1955 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work. The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1955 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work.

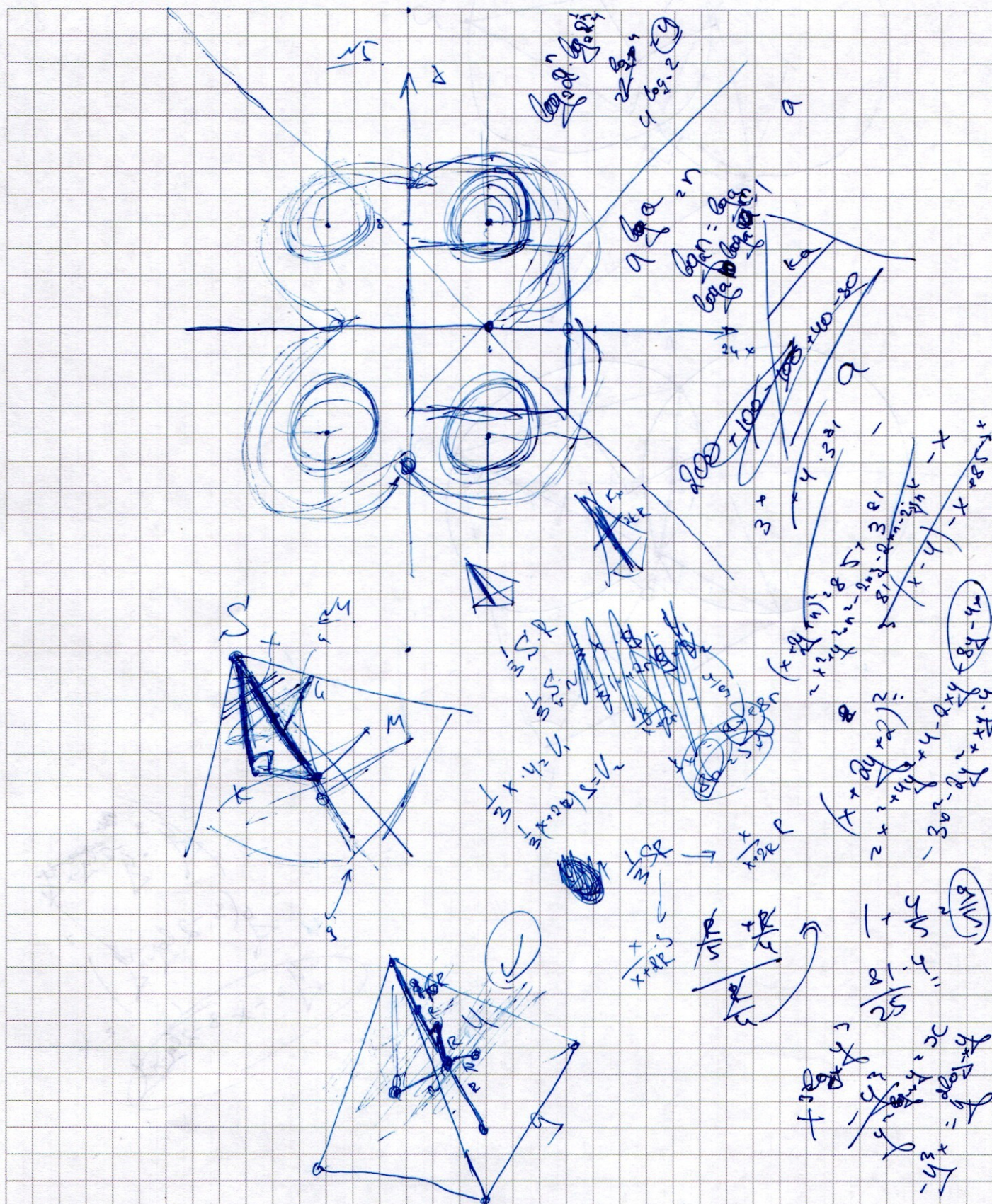
The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1955 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work. The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1955 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work.

1955

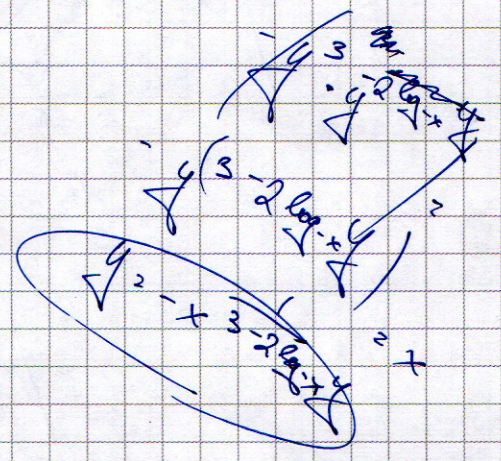
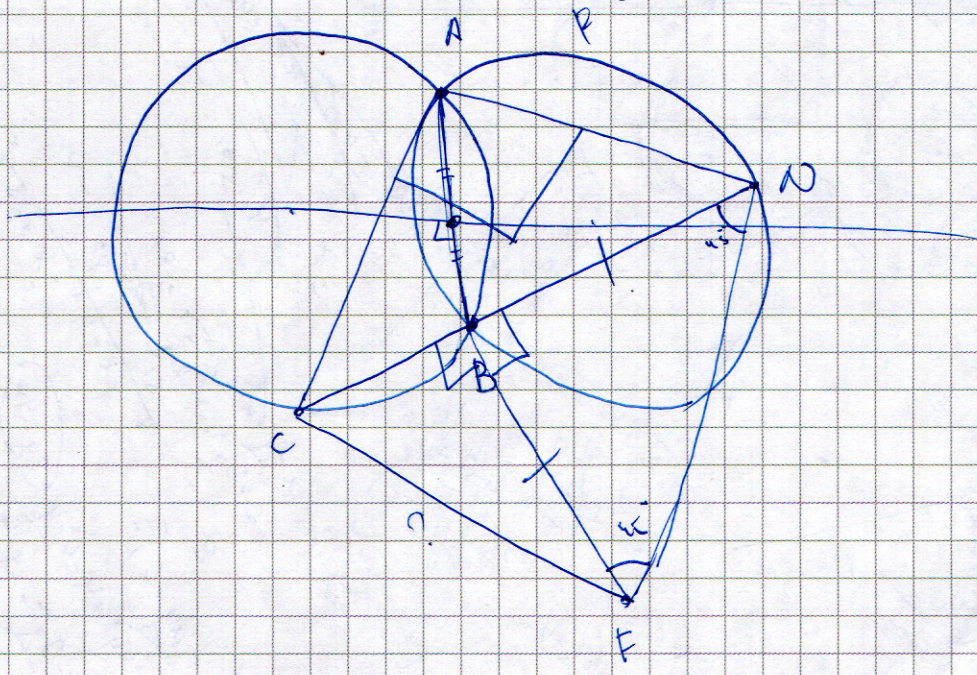
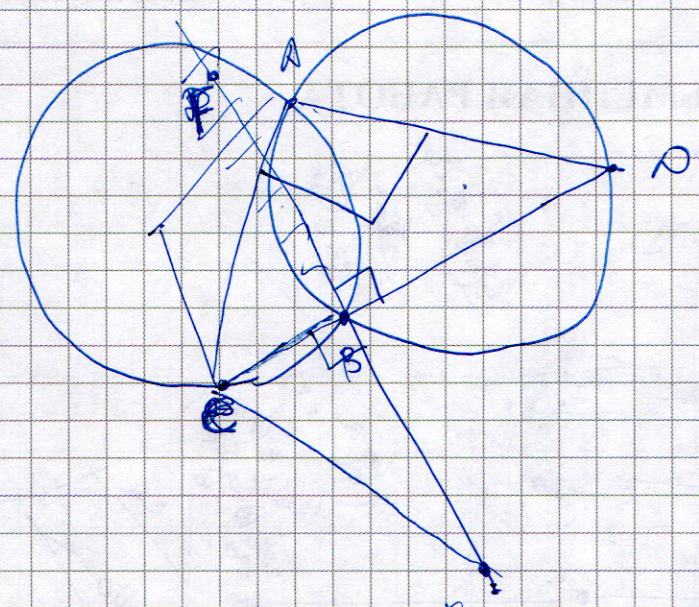
1955

The work of the General Staff of the Ministry of Defense in 1955 was characterized by a high level of activity and a significant increase in the volume of work.

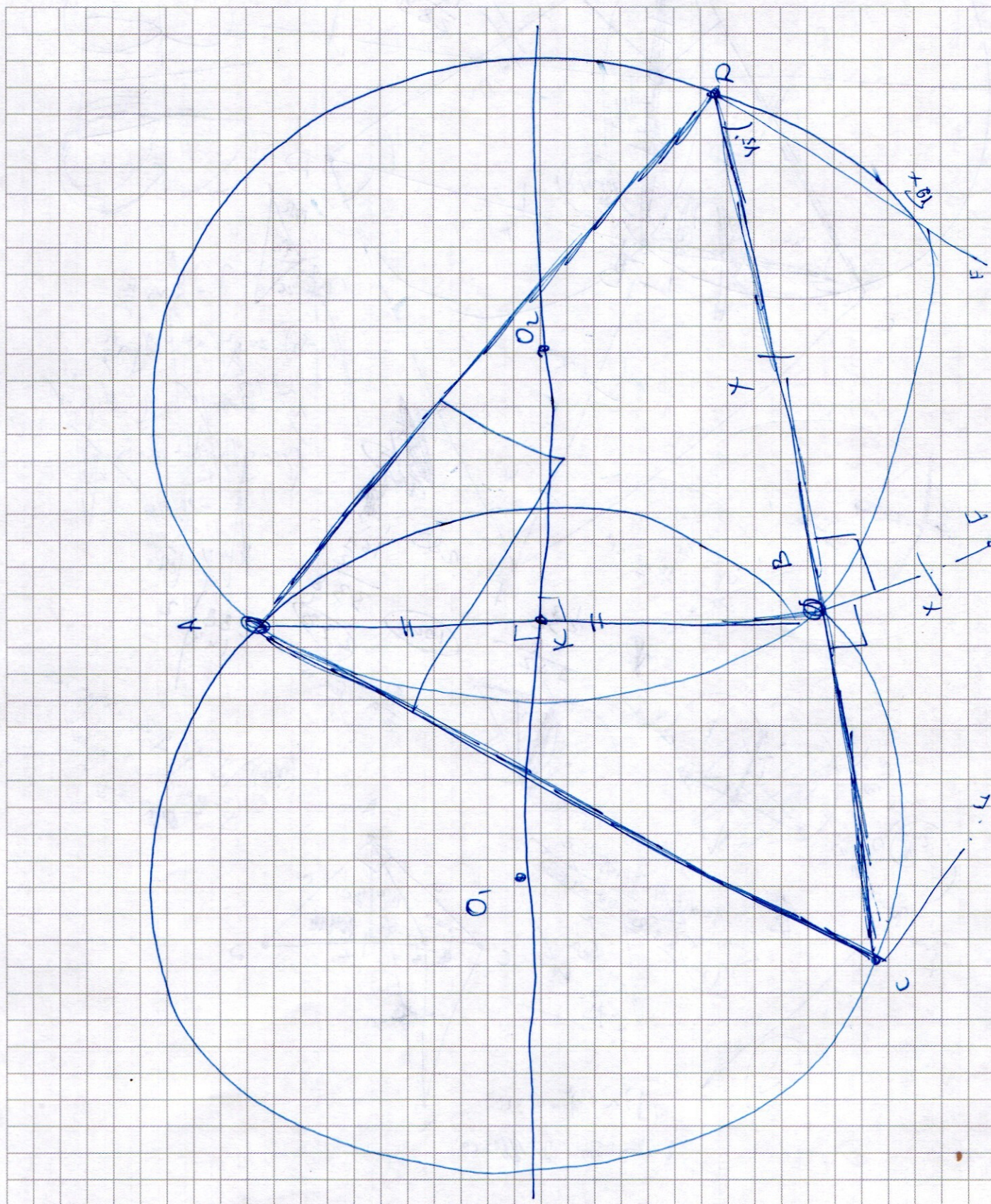
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



а



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

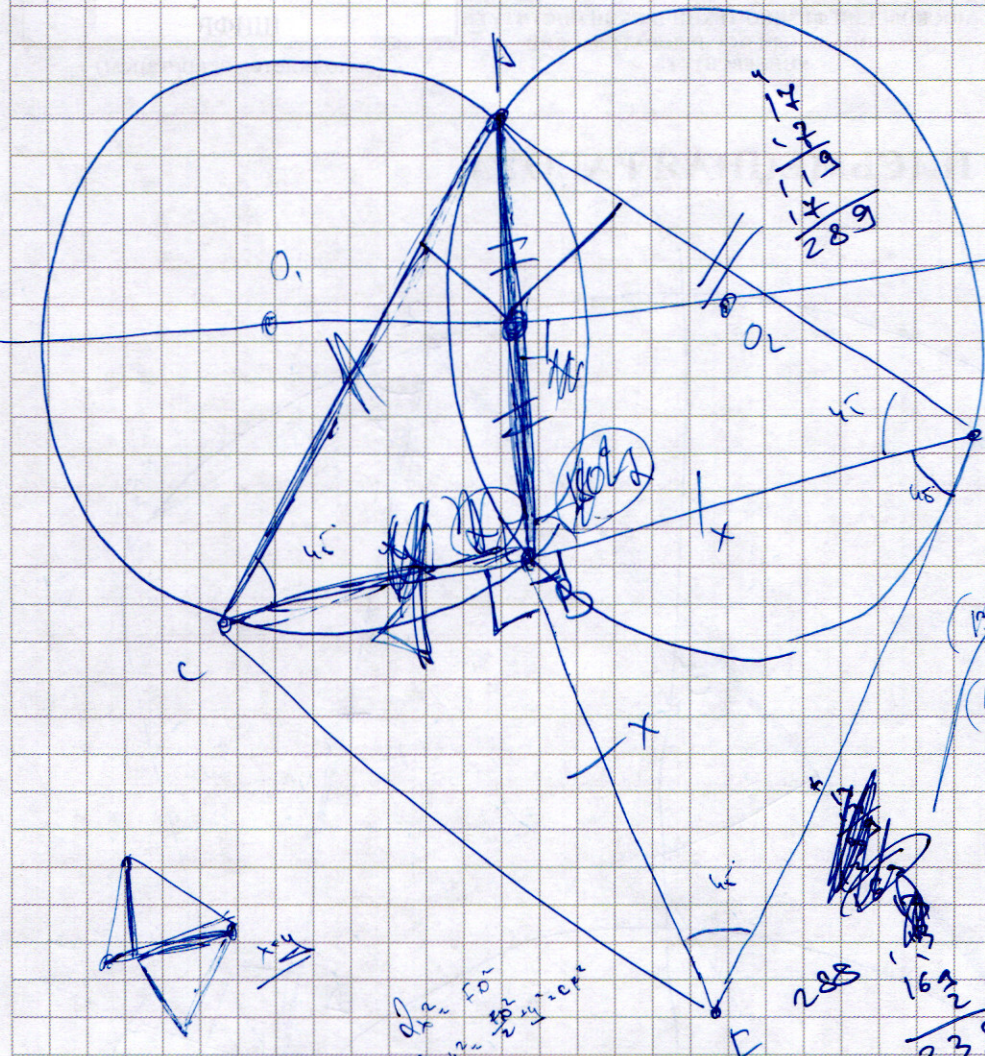


$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha \sin \beta)$$

$$\frac{144}{2}$$

$$AB \sin \alpha = a \cdot b$$

$$AB = 1380$$



$$(1380)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$(1380)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$x^2 - 1380x + 1380^2 = 0$$

$$(x - 1380)^2 = 0$$

$$x = 1380$$

$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = c^2$$

$$\frac{1238}{952}$$

$$1002$$

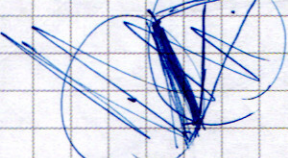
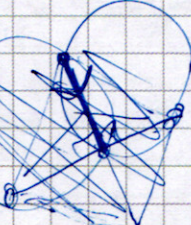
$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \cos \alpha$$

$$(1380)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

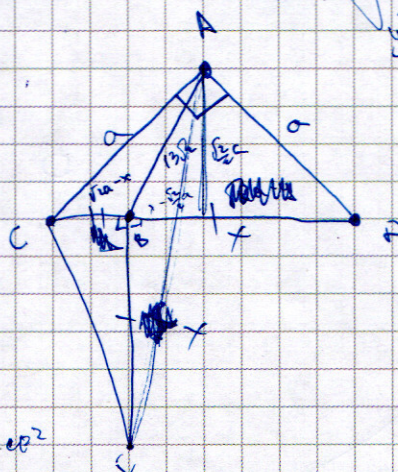
$$1380^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$(x - 1380)^2 = 0$$

$$x = 1380$$



$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = c^2$$



$$(2a - x)^2 + b^2 \cos^2 \alpha$$

$$1a^2 \Rightarrow 2280 \text{ } 1380^2 - c^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 9x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos 10x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 10x (1 - \sqrt{2}) = 0$$

$$\cos 10x = 0$$

$$10x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\log 4} = (-x)^{\log(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - yx - 2y^2 = 0$$

$$C_k^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{x^{4 \lg 4}}{10} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg 4} \rightarrow \dots$$

$$x^{4 \lg 4} = 10 \cdot 10^{(-x)^{\lg 4}}$$

$$x^{4 \lg 4} = 10 \cdot 10^{(-1)^{\lg 4} \cdot x^{\lg 4}}$$

$$\begin{matrix} y > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^{\lg 4} = 0 \text{ или } \rightarrow x=0 \rightarrow 0 \\ x^{3 \lg 4} = 10 \cdot 10^{(-1)^{\lg 4} \cdot x^{\lg 4}} \end{cases}$$

$$x^{3 \lg 4} = 10 \cdot 10^{x^{\lg 4}} \dots$$

$$\begin{matrix} x^{\lg 4} \\ y^{\lg 4} \end{matrix}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 2y + 1 - 6 - x^2 - 2x - 1 + 4 - xy = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x-2)^2 - 4 - xy = 0$$

$$\begin{matrix} x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \end{matrix}$$

$$4y^2 - 2xy - 2x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x^2 + 3y^2 - 8x - 16y = 0$$

$$(x-y)^2 - (x-y)(x+y) - 8(x+2y) = 0$$

$$(x-y)^2 - (x-y)(x+y) - x^2 - 8x + 16 + y^2 - 16y + 64 = 80$$

$$(x-y)^2 - (x-y)(x+y) - x$$

25

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$|x-6|^2 + (y-8)^2 = a$$

$$x-6-y \geq 0$$

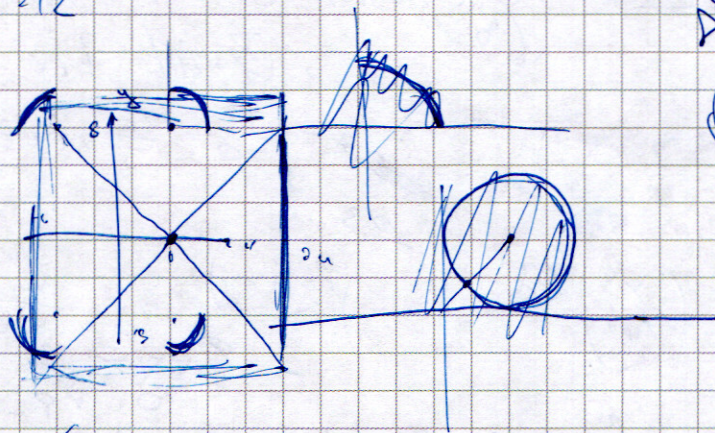
$$y \leq x-6 \text{ или } 0$$

$$x-6+y \geq 0$$

$$y \geq 6-x \text{ или } 0$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$x = 12$$



$$x+y-x+x-6-y$$

$$\begin{matrix} 15 \\ 5 \end{matrix}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

Заметим, что число $16875 = 5^4 \cdot 3^3$,
а значит, чтобы произведение восьми
цифр числа равнялось 16875 , это число
должно состоять из таких наборов
цифр: четыре 5 -ки, три 3 -ки, одна 1 -ка
или четыре 5 -ки, одна 9 -ка, одна 3 -ка, две 1 -ки,
иначе из восьми цифр число 16875 не получить.
Для первого набора существует $8!/(4! \cdot 3! \cdot 1!) = 1680$
 $= 280$ вариантов расстановки, для второго
 $8!/(4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!) = 840$ вариантов, а значит
всего $280 + 840 = 1120$ вариантов $\Rightarrow 1120$ чисел
Ответ: 1120 чисел.

2.

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x &= \sin 7x + \sin 3x \Leftrightarrow \\ \cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 10x \Leftrightarrow \\ \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) &= \sqrt{2} \cos 10x \Leftrightarrow \\ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 7x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x + \cos \frac{\pi}{4} \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x \right) &= \sqrt{2} \cos 10x \Leftrightarrow \\ \sqrt{2} \left(\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right) &= \sqrt{2} \cos 10x \Leftrightarrow \\ 2 \sin \left(10x + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(4x \right) &= \cos 10x \Leftrightarrow \\ -2 \cos 10x \sin 4x &= \cos 10x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = -\frac{1}{2} \\ \cos 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ 10x = \frac{\pi}{2} + \pi l; l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{20}l; l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Очевидно, что $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n; n \in \mathbb{Z}$ не совпадают, проверим третий корень:

$$1) -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{20}l \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{12} + k = \frac{1}{10} + \frac{l}{10} \Leftrightarrow$$

$$-5 + 60k = 6 + 6l \Leftrightarrow$$

$$l = 10k - \frac{11}{6} \rightarrow \text{не совпадают } (-\frac{11}{6} \notin \mathbb{Z})$$

$$2) \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{20}l \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{12} + n = \frac{1}{10} + \frac{l}{10} \Leftrightarrow$$

$$35 + 60n = 6 + 6l \Leftrightarrow$$

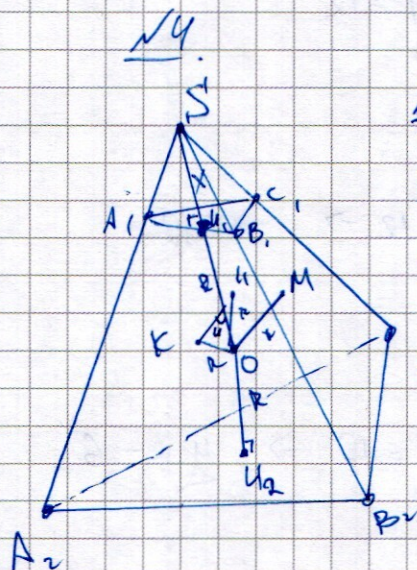
$$l = 10n + \frac{29}{6} \rightarrow \text{не совпадают } (\frac{29}{6} \notin \mathbb{Z})$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{20}l; l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано:
 $\omega(0)$
 S - верш. трехгранника
 $K, M \in \omega$
 $S_1 = 4$
 $S_2 = 9$
 $\angle KSO = ?$
 $S_3 = ?$



1) Пусть плоскость, касающаяся сфер и перп. прямой SO пересекает ребра угла в A_1, B_1 и C_1 или в A_2, B_2 и C_2 (см. черт. 1). Тогда

$$S_{A_1B_1C_1} = S_1 = 4; \quad S_{A_2B_2C_2} = S_2 = 9.$$

$SA_1B_1C_1$ - тетраэдр с высотой $SH_1 = x$

$SA_2B_2C_2$ - тетраэдр с высотой $SH_2 = x + 2R$

$$2) \quad \frac{4}{9} = \left(\frac{x}{x+2R} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 4R = 3x$$

$$4R = x.$$

$$3) \quad \triangle SOK: \angle K = 90^\circ; KO = R; OS = R + \frac{R}{4} = \frac{5R}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1.4}{5} = \arcsin \frac{4}{5}.$$

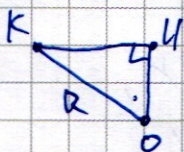
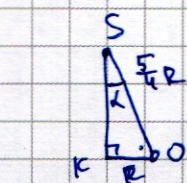
$$4) \quad \text{Д.п. } KH \perp SO; H \in SO \Rightarrow \triangle OKH:$$

$$\frac{OH}{R} = \cos \angle KOH = \cos \angle KOS = \sin \angle KSO = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{R} = \frac{4}{5} \Rightarrow OH = \frac{4}{5}R$$

$$5) \quad \frac{4}{S_{\text{пл. } KLM}} = \left(\frac{x}{xR - \frac{4}{5}R} \right)^2 \Rightarrow S_{\text{пл. } KLM} = \frac{324}{25}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{4}{5}; S = \frac{324}{25}$



$$\sqrt{5}$$

$$(1) |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$(2) \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2} = a$$

$$(1) |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$1) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x-6-y + x-6+y = 12 \rightarrow x = 12$$

$$2) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \rightarrow$$

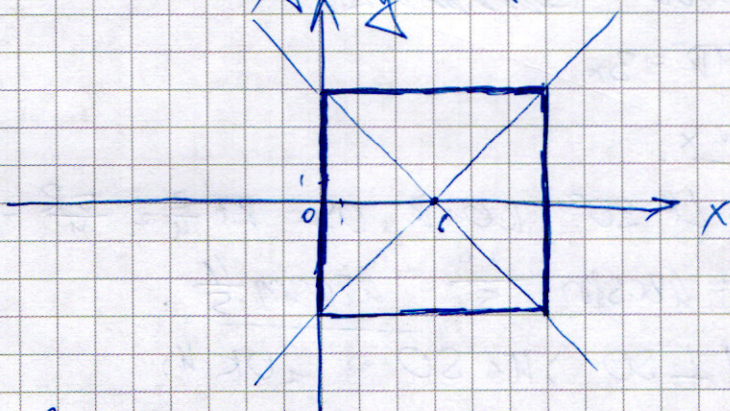
$$\rightarrow x-6-y - x+6-y = 12 \rightarrow y = -6$$

$$3) \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow -x+6+y + x-6+y = 12 \rightarrow y = 6$$

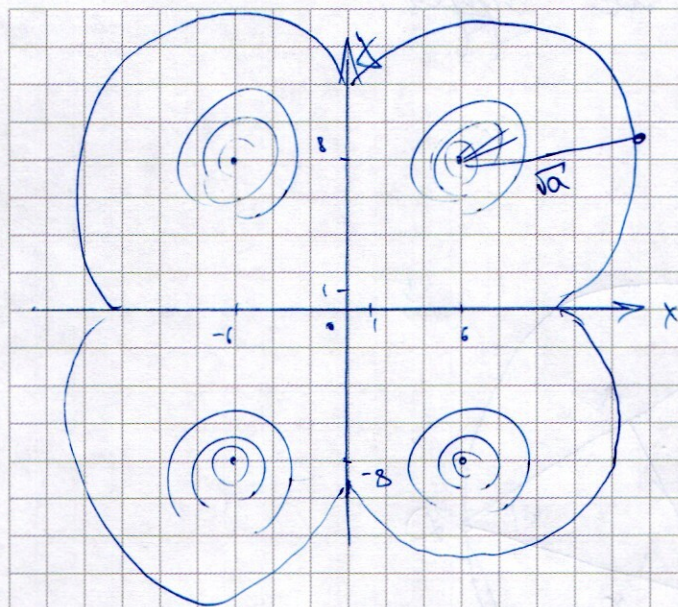
$$4) \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow -x+6-y - x+6-y = 12 \rightarrow x = 0$$

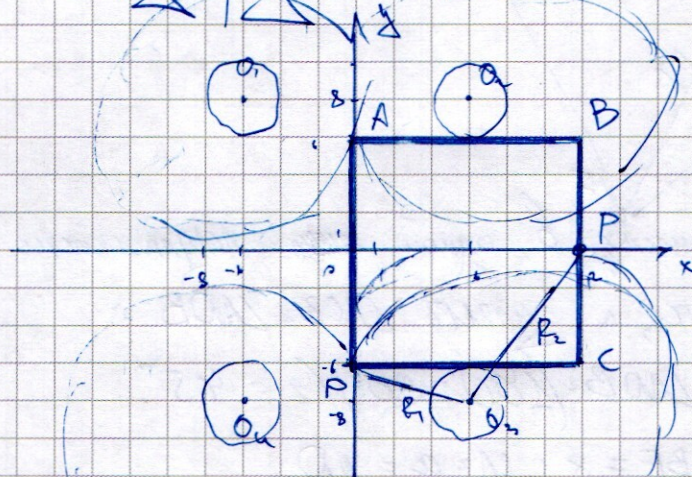


(2) Заметим, что и x и y в модулях, значит не важно, в какой четверти мы смотрим - будет всегда симметрично / в данном случае / окружности:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Изобразим (1) и (2) на



одной оси координат:
1) Первый раз два решения
будет при касании окр.,
с центрами в O_2 и O_3 (см. рис.)
AB и CD соотв.-но. Это
происходит при $R=2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha = 4$.

2) Далее, нам интересно, когда окр. с центрами
в O_2 и O_3 будут пересекать A и P с-но. Тогда
 $R_1 = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$. Этот радиус нам нужно
сравнить с радиусом, при котором окр. с
центрами O_2 и O_3 будут пересекать P $\Rightarrow R_2 = \sqrt{6^2 + 8^2} =$
 $= 10 > 2\sqrt{10}$. Также нужно эти радиусы

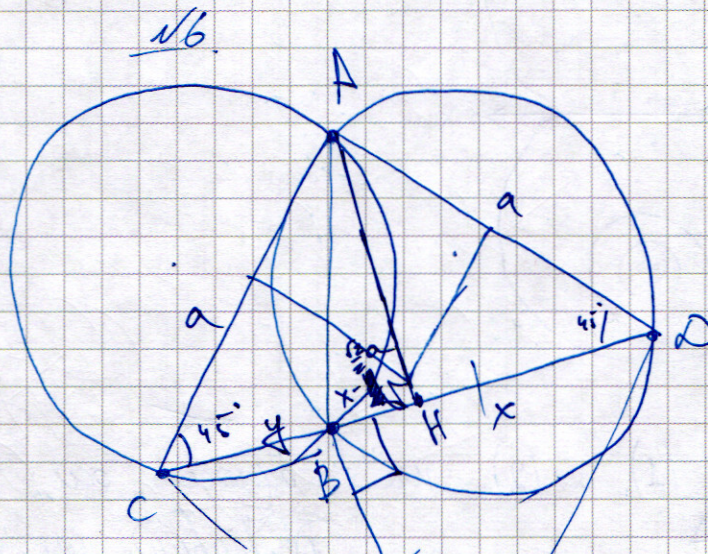
сравним с $R_2 = O_2O = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 = R_2$.

Получается, два корня будет ~~тогда~~ когда $R = 10 \rightarrow a = 100 \rightarrow (0; 0)$ и $(12; 0)$. Далее, при увеличении a корней не будет.

Ответ: $\begin{cases} a = 4 \\ a = 100 \end{cases}$

Дано:

$\omega_1(O_1; R=13)$
 $\omega_2(O_2; R=13)$
 $\omega_1 \cap \omega_2 = A; B$
 $C \in \omega_1; D \in \omega_2$
 $B \in DC$
 $\angle AOB = 90^\circ$
 $BF = BD$
 а) CF ?
 б) $BC = 10$
 S_{ACF} ?



1) Заметим, что $\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются

на AB в равных окружностях в одной ~~и той же~~ полуплоскости

с ~~одинаковым~~ центром своей окр-ти, а значит $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD$ - р/б; $\angle ACB = \angle ADB = (180^\circ - 90^\circ)/2 = 45^\circ$.

2) Пусть $CB = y$; $BD = BF = x$; $CA = a = AD$

3) $\frac{BA}{\sin 45^\circ} = 2 \cdot 13$ (по теореме синусов)
 $BD = 13\sqrt{2}$

4) в $\triangle CBA$: $(13\sqrt{2})^2 = y^2 + a^2 - 2 \cdot ya \cdot \cos 45^\circ$ (по теореме косинусов)
 в $\triangle ADB$: $(13\sqrt{2})^2 = x^2 + a^2 - 2 \cdot xa \cdot \cos 45^\circ$ (косинусов)

Заметим, что ~~это~~ это квадратные уравнения относительно x и y с одинаковыми коэффициентами,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а значит в одном случае мы берем
корень из дискр. с плюсом, в другом -
с минусом. $\Rightarrow x+y = \sqrt{2a}$

5) CBF: $x^2 + y^2 = CP^2$

$$(\sqrt{2}a - x)^2 + x^2 = CF^2 \quad (\text{по теореме Пифагора})$$

$$2a^2 - 2\sqrt{2}ax + 2x^2 = CF^2$$

$$2(a^2 - \sqrt{2}ax + x^2)^2 CF^2$$

6) Опустим δ $\hookrightarrow$ CAD $\hookrightarrow$ $\forall x \in A \Rightarrow A \cap \{x\} \neq \emptyset$:

Вид: $(x - \frac{50}{2})^2 + (\frac{2a}{2})^2 = (\frac{13}{2})^2$

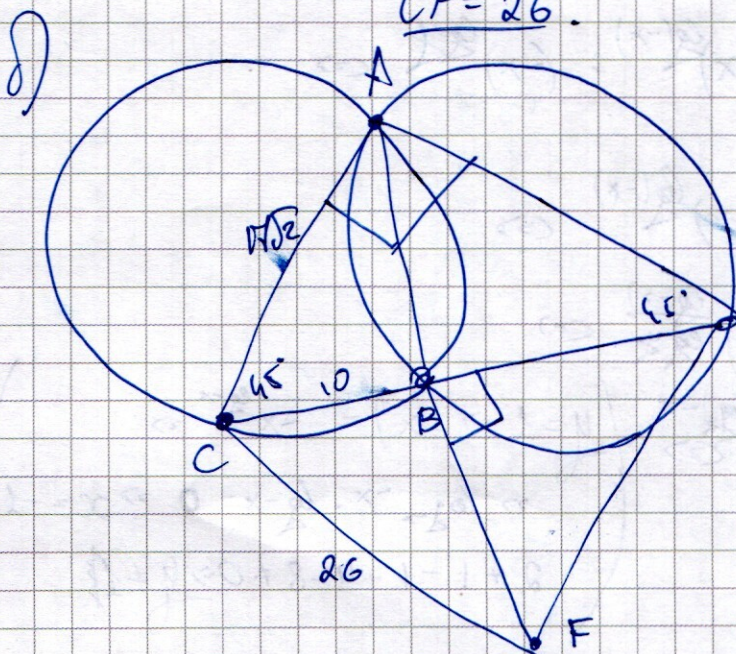
$$\left(x - \frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = (13\sqrt{2})^2$$

$$x^2 - \sqrt{2}ax + a^2 + \frac{a^2}{2} = (\sqrt{2}a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (13\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF^2 = 2 \cdot 2 \cdot 13^2$$

$$\underline{CF = 26}$$



1) CBA:

$$(BR)^2 = 10^2 + a^2 - 2 \cdot 10 \cdot a \cos 45^\circ$$

$$a^2 - 1052a + 10^2 - 13\sqrt{2}^2 = 0$$

$$a = 56 \pm \sqrt{50 + 238}$$

$$a = 5\sqrt{2} \pm 12\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\rightarrow a = 17\sqrt{2}$$

$$2) \Delta BCF: \cos \angle C = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \rightarrow \sin \angle C = \frac{12}{13} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \angle C) =$$

$$= \sin 45^\circ \cos \angle C + \cos 45^\circ \sin \angle C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

$$3) S_{\Delta ACF} = \frac{1}{2} \sin \angle ACF \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} \cdot 26 \cdot 18\sqrt{2} =$$

$$= 18^2 = \underline{289}.$$

Ответ: а) CF = 26

б) $S_{\Delta ACF} = 289$.

$$(1) \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xy)}$$

$$(2) 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(1) \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xy)}$$

$$1) \log y \Rightarrow y > 0$$

$$\log(-xy) \Rightarrow -xy > 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0.$$

2)

$$\frac{x^4 \log y}{y^2 \log y} = (-x)^{\log(-x)} \cdot (-x)^{\log y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3 \log y}{y^2 \log y} = -(-x)^{\log(-x)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3}{y^2} = -(-x)^{\frac{\log(-x)}{\log y}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3}{y^2} = -(-x)^{\log_{-x} y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{-y}{y^2 \log_{-x} y} = x$$

$$\left(\begin{aligned} y=1 &\Rightarrow (x)^0 = -x^{\log_{-x} y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_{-x} y \cdot \log_{-x} x = 0 \Rightarrow x = -1; \\ 2+1-1+4-8 &\neq 0 \Rightarrow y \neq 1 \end{aligned} \right)$$