

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$8281 : 8$, т.к. сумма цифр $\leq$ на 8

$$8281 = 8 \cdot 1028$$

1028 делится на 8

$$1028 = 8 \cdot 343 = 8 \cdot 7^3$$

Все цифры могут быть 3, 7, 8 или 1

т.к. цифр 8 должно быть не меньше 2-х

1) если единиц равно 2:

оставшиеся цифры: 3, 3, 3, 7, 7, 7. Таких чисел:

$$C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = \frac{8!}{72} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot 4} = 50 \cdot 2 =$$

$= 560$ (выбрали 2 места из 8, где единицы, потом 3 места из 6, где 7-ки)

2) если единиц - 3:

оставшиеся цифры: 3, 3, 7, 7, 7. Таких чисел:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 2 = \frac{8!}{36} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot 2} = 56 \cdot 2 =$$

$$= 1120$$

(выбрали 3 места из 8, где единицы, потом 3 места из 5, где 7-ки, потом порядок, в котором идут 3 и 8)

3) больше 3-х единиц быть не может, так как все 8 составляется - единицы. $\Rightarrow$ чисел: $560 + 1120 =$

Ответ: 1680.

$$\text{нз } \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y/x^7} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

1) рассмотрим первое уравнение:

$$\begin{aligned} e^{\ln((x^2 y^4)^{-\ln x})} &= e^{\ln(y^{\ln y/x^7})} \\ e^{-\ln x \cdot \ln x^2 y^4} &= e^{\ln(y/x^7) \ln y} \end{aligned}$$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(y/x^7) \cdot \ln y$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y$$

$$(\ln y)^2 + 2(\ln x)^2 - 3 \ln x \ln y = 0$$

$$(\ln y - \frac{3}{2} \ln x)^2 + (2 - \frac{9}{4})(\ln x)^2 = 0$$

$$(\ln y - \frac{3}{2} \ln x)^2 = (\frac{1}{2} \ln x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y - \frac{3}{2} \ln x = \frac{1}{2} \ln x \\ \ln y - \frac{3}{2} \ln x = -\frac{1}{2} \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = 2 \ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^2 & (1) \\ y = x & (2) \end{cases}$$

2) рассмотрим второе уравнение системы:

$$(y-2x)y + xy - 2x^2 - 4(y-2x) = 0$$

$$(y-2x)/y + (y-2x)/x + (y-2x)/(-4) = 0$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x & (3) \\ y + x - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \\ y = 2x \\ y + x - 4 = 0 \end{cases}$$

Продолжение на стр. 8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2

$$\cos 8x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$(\sin 9x + \cos 9x) + (\sin 5x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) + \cos 9x\right) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) - \cos 5x\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 9x\right) + (-2) \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 9x\right) - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - 9x\right)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos 4x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 9x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \cos 4x \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$$

$$\sin 7x \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right) = \cos 4x \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$$

$$\sin 7x \cdot \cos 4x - \cos 4x \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$$

$$\cos 4x \left(\sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \right) = 0$$

$$1) \cos 4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \text{ или } \cos\left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$x_2 = \frac{4}{5}\pi + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x_3 = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$

$$x_2 = \frac{4}{5}\pi + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

№ 17.

График степенной ф-ции $2^x + 3 \cdot 2^{34}$ выжидает и может ~~быть~~ в единицы $x > 0$ не более 2-х точек пересечения с прямой $y_{\max}(x) = 76 + 2x(2^{32} - 1)$.

Эти точки пересечения можно найти:

1) $x = 6$

$$2^6 + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 12(2^{32} - 1) \quad \text{— верное равенство}$$

2) $x = 38$

$$2^{38} + 3 \cdot 2^{34} = 2^{34}(16 + 3) = 19 \cdot 2^{34} = 76 + 76(2^{32} - 1) = 76 \cdot 2^{32}$$

Для этих x множество решений неравенства пусто, но при каждом $x = 7 \dots 37$ прямая находится выше графика степенной ф-ции и число точек решений равно разности между прямой и левой частью. Общее число

решений:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{x=7}^{37} (76 + 2x(2^{32} - 1) - 2^x - 3 \cdot 2^{34}) = 31 \cdot 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot \sum_{x=7}^{37} x - \sum_{x=7}^{37} 2^x - 31 \cdot 3 \cdot 2^{34} \\ &= 31 \cdot 76 + (2^{32} - 1) 31(37 + 7) - \frac{2^{38} - 2^7}{2 - 1} - 31 \cdot 3 \cdot 2^{34} = 852 + 1364 \cdot 2^{32} - 64 \cdot 2^{32} + 128 - 372 \cdot 2^{32} = 1120 + 828 \cdot 2^{32} \end{aligned}$$

Ответ: $1120 + 828 \cdot 2^{32}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

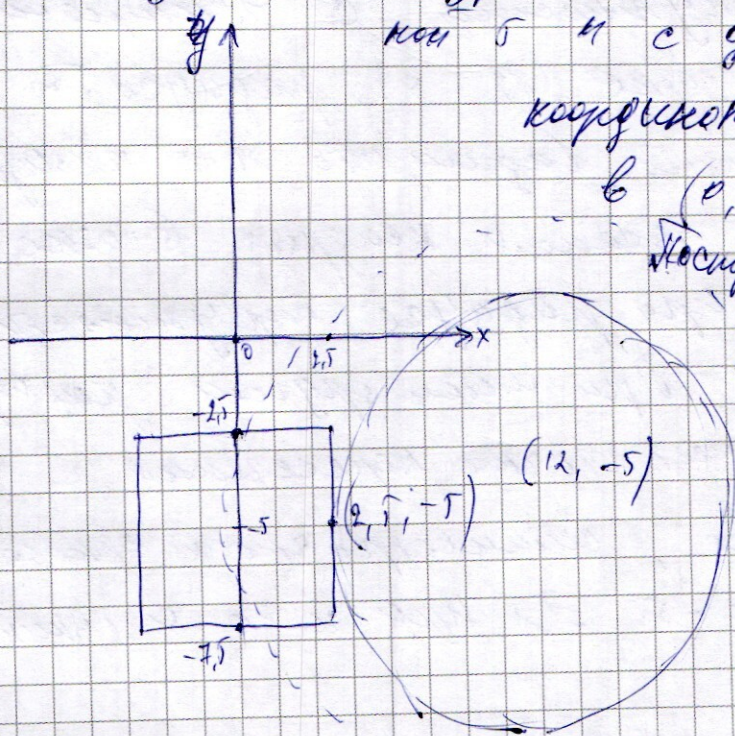
чтобы построить множество точек, удовл. ~~на~~ вершинам
уравнения системы обозначим ~~уравнение~~ $y + 5 = z$

$$|x+z| + |x-z| = 10$$

Докажем, что левая часть тождественно равна
 $2 \max(|x|, |z|)$. Если x и z одного знака, то
 $|x+z| = |x| + |z|$, а $|x-z| = ||x| - |z||$, иначе
косовет.

$$|x+z| + |x-z| = |x| + |z| + ||x| - |z|| = 2 \max(|x|, |z|)$$

$\Rightarrow$ множество, удовлетворяющее первому ра-
внению - это квадрат K в координатах (x, z) , со сторо-
ной 5 и с центром в нуле, а в
координатах (x, y) с центром
в $(0, -5)$ со стороной 5.



Построим ~~и~~ множество
удовлетворяющее второму
уравнению. При $x \geq 0, y \geq 0$
это есть окружность
с центром $(12, -5)$, ради-
уса 5 (обозначим это
множество D), а при
 $x < 0$ - пустое мно-
жество

$Q=0$ тоже окрестность, тогда решений не более одного. Предполагая, что $Q > 0$

При $x \leq 0$, $y \geq 0$ получаем множество M , симметрично отражённое относительно вертикальной координатной оси, а при $x \geq 0$, $y \leq 0$ — множество M симметрично отражённое относительно горизонтальной. При $x \leq 0$, $y \leq 0$ — множество M симметрично отражённое относительно начала координат.

Т.к. и квадрат K и множества Q и Q' являются 2-го ур-ия — симметричны относительно верт. коор. оси, то и их пересечение симметрично относительно вертикальной оси.

Оно может иметь равно 2 точки в случаях:

1) одна точка пересечения в области $x > 0$, $y < 0$

Она лежит на окружности с центром

в симметричной точке $(12, -5)$ радиуса $\sqrt{Q}$

Расширяя окружность видим, что это происходит в момент первого касания квадрата в точке $(2, 5, -5)$, это будет при радиусе окружности $12 - 2,5 = 9,5$, $Q = \left(\frac{19}{2}\right)^2$. При любых других радиусах окружности если имеет точки пересечения с квадратом, то их две, симметричные относительно прямой $y = -5 \Rightarrow$ при $x > 0$ и так как Q будет 4 решения.

2) $x = 0$, два решения $y = -2,5$ и $y = -7,5$ будут при

$$Q = 12^2 + 2,5^2 = 150,25. \Rightarrow \text{ответ: } Q = 150,25; Q = 90,25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим варианты:

(1) и (3):

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \text{ не входит в ОДЗ} \\ x = 2, y = 4 \end{cases}$$

(1) и (4):

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ — не входит в ОДЗ}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{8 - \sqrt{17}}{2}$$

(2) и (3):

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y = 0 \text{ — не входит в ОДЗ}$$

(2) и (4):

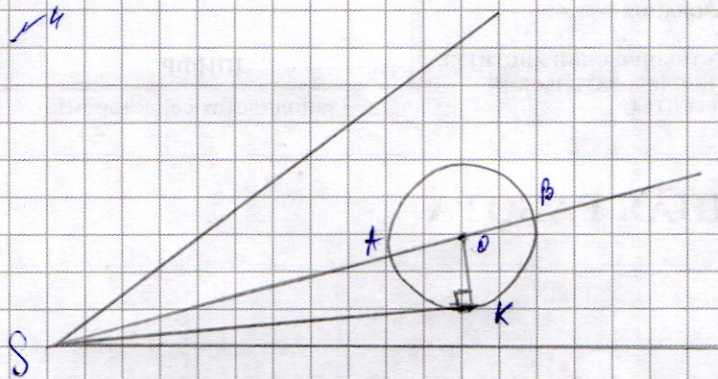
$$\begin{cases} y = x \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow x = y = 2$$

Ответ:

1) $x = 2, y = 4$

2) $x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, y = \frac{8 - \sqrt{17}}{2}$

3) $x = y = 2$



Обозначим ближайшую к S точку касания с окружностью - B.

Вещные углы через точку A и точку B $\parallel \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ они коллинеарны с некоторым котр. $k > 0$

Получим подобием треугольников отсюда как $k^2 = 16$, отсюда $k = 4$

$$\frac{SB}{SA} = k = 4$$

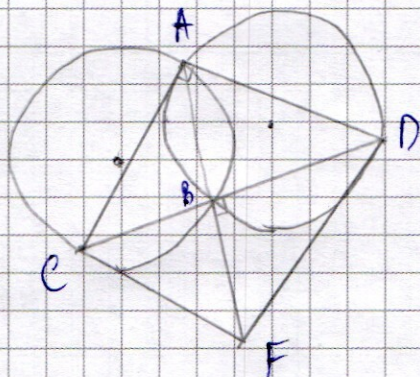
$$\frac{SO+r}{SO-r} = 4$$

$$SO+r = 4SO-4r$$

$$\frac{r}{SO} = \frac{3}{5} = \sin \angle KSO \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



- а) Углы $\angle AEB$ и $\angle ADB$ в равных окружностях опираются на равные дуги $\Rightarrow$ они равны, а т.к. $\triangle ABC$ — $\triangle$ у, то они равны по $\frac{\pi}{4}$.
Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle DAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

По теореме синусов:

$$BD = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 20 \cos \alpha, \quad BC = 20 \sin \alpha$$

в $\triangle CBF$:

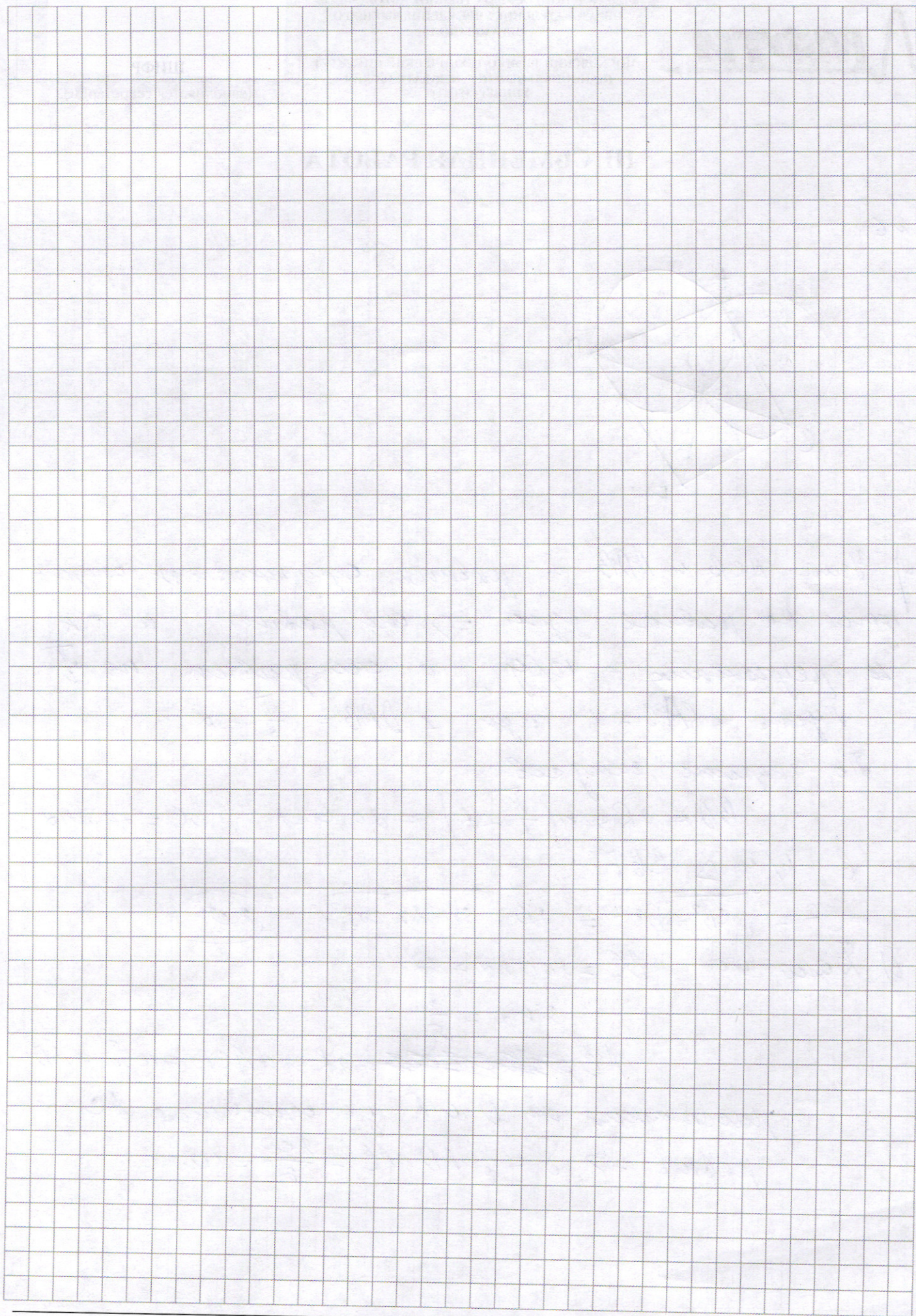
$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = 20 \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 20$$

- б) Дока, что $BC = 20 \sin \alpha = 12$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$AC = 2R \sin \angle ACB = 10\sqrt{2} = AD$$

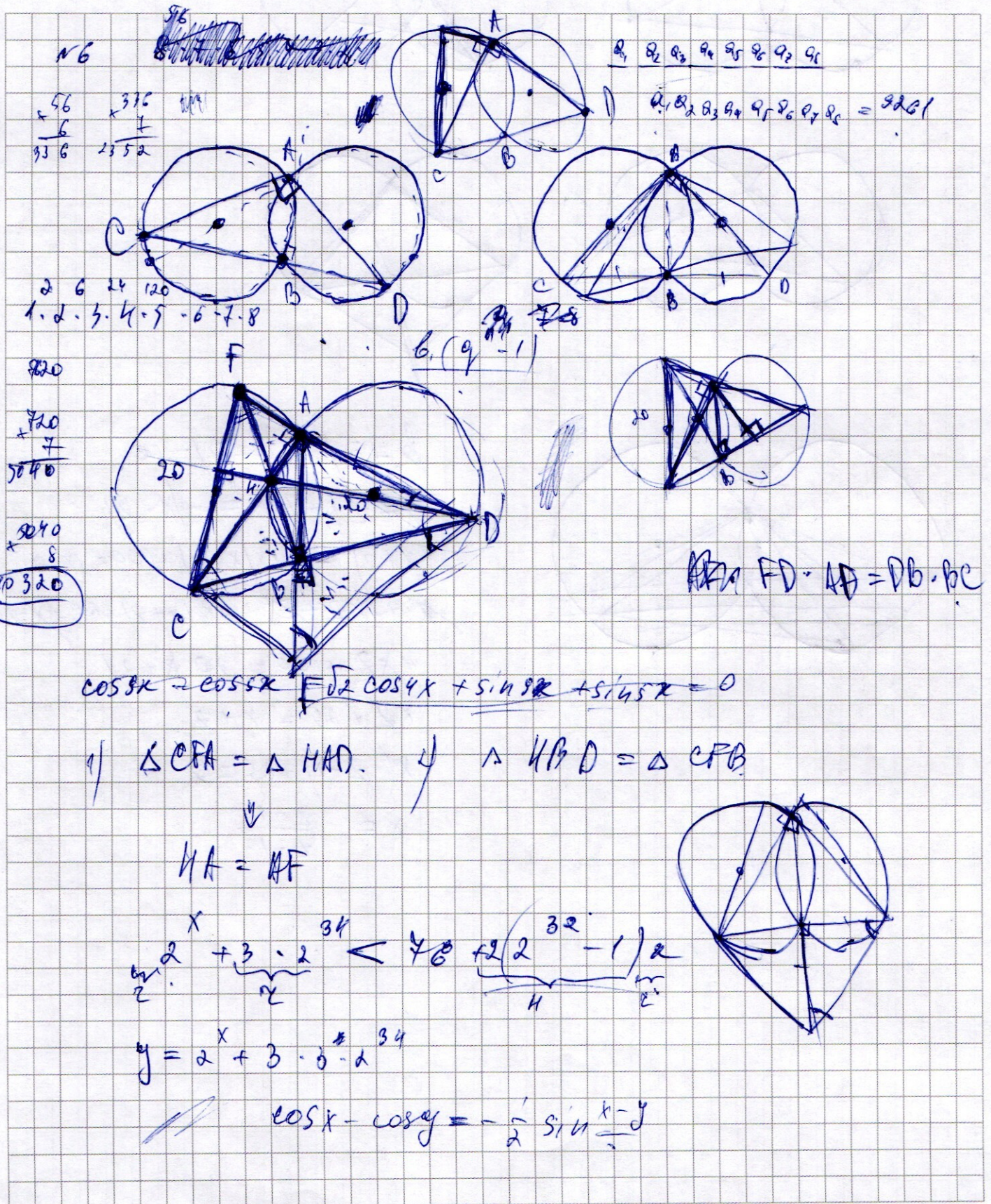
расстояния от D и F до основания AC равны $\Rightarrow S = \frac{1}{2} AD \cdot AC = \frac{200}{2} = 100$.

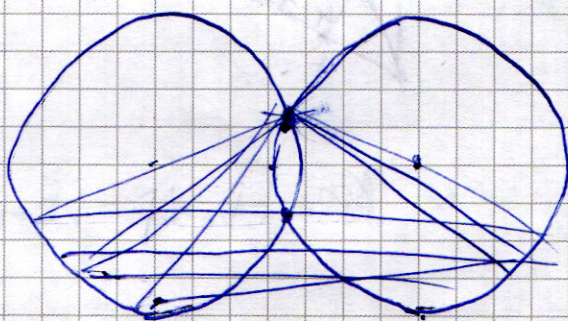
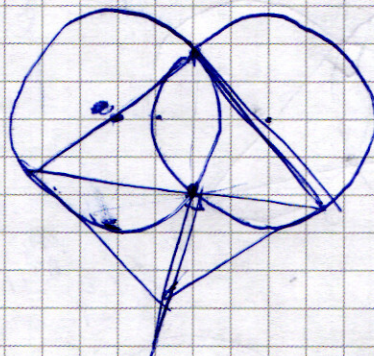
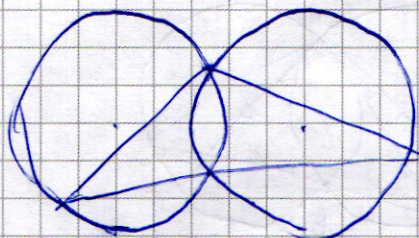
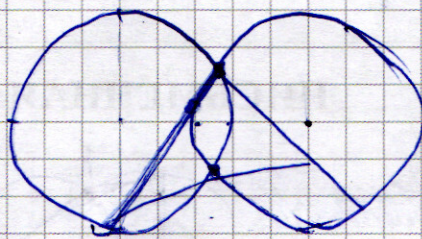
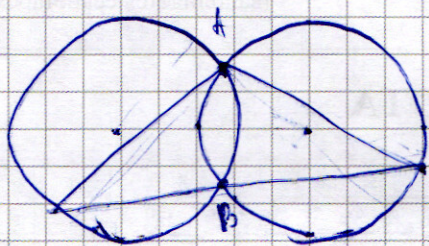


☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$|x+2| + |x-2| = 10$$

$$|x+2| - 10 = -|x-2|$$

$$(x+2)^2 - 20|x+2| + 100 = (x-2)^2$$

$$x^2 + 2x + 2^2 - 20|x+2| + 100 = x^2 - 2x + 2^2$$

$$4x + 100 = 20|x+2|$$

$$x + 25 = |x+2|$$

$$x(2-1) + 25 = 2$$

$$x = \frac{2-25}{2-1}$$