

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

MEMORANDUM FOR THE RECORD

DATE: 10/10/54

TO: SAC, NEW YORK

FROM: SAC, NEW YORK

SUBJECT: [Illegible]

[Illegible text block]

RE: [Illegible]

[Illegible text block]

[Illegible text block]

[Illegible text block]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \leftarrow$ ^{эти числа} все простые
Значит, среди цифр этих чисел могут
быть лишь цифры 1, 3, 9 и 7.
Пусть нет девяток
Тогда должны быть 4 семерки (больше
цифр: 7 нет, ведь 0 мы использовать не
можем - произведение сразу станет 0)
и три тройки (больше цифр: 3 нет, кроме 9
и 0) Значит ещё одна цифра = 1
У нас есть 8 цифр. ~~и всего 8 способов~~
~~подставить их~~ Прежде всего мы 8 способа-
ми выбираем место для единицы.
Далее $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6}$ способов выбрать место для
тройки - первую 7 способами, вторую 6 и каждое
5. К.т.к. тройки равнозначны, можно
разделить на число перестановок для трёх цифр =
 $= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Семерки вставят на оставшиеся
места единственным образом. Итого $7 \cdot 5 \cdot 8 = 280$
Пусть есть девятка (она ровно одна)
Тогда наши цифры могут быть лишь
1, 1, 3, 9, 7, 7, 7, 7
8 способов выбрать место для 9, 7 для 3,

$\frac{6 \cdot 5}{2}$ - для двух единиц. Сметки вычитаем на ост. места. Итого $15 \cdot 8 \cdot 7 = 840$

Всего чисел $= 840 + 280 = 1120$

Ответ: таких чисел 1120.

$$3. \left(\frac{-x^7}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \quad \boxed{\text{ОДЗ: } y < 0, x > 0, \text{ т.к. } xy^2 > 0, \text{ и } -y > 0}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

Решим второе уравнение как квадратное относительно y

$$D = (2x+4)^2 - 4(12x-3x^2) = 4x^2 + 16x + 16 - 48x + 12x^2 = 16x^2 - 32x + 16 = 16(x-1)^2$$

$$y = \frac{-2x-4 \pm \sqrt{16(x-1)^2}}{2} \quad \leftarrow \text{т.к. все равно } \pm, \text{ модуль можно убрать}$$

$$y = -x-2 \pm (2x-2) \rightarrow \begin{cases} y = x-4 \\ y = -3x \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение $y = -3x$

$$\left(\frac{-x^7}{-3x} \right)^{\ln(3x)} = x^{2 \ln(9x^3)} \rightarrow \frac{x^6 \ln 3x}{3^{\ln 3x}} = x^{2 \ln(9x^3)} \cdot 3^{\ln 3x} = x^{2 \ln 9 + 6 \ln x} \cdot 3^{\ln 3x}$$

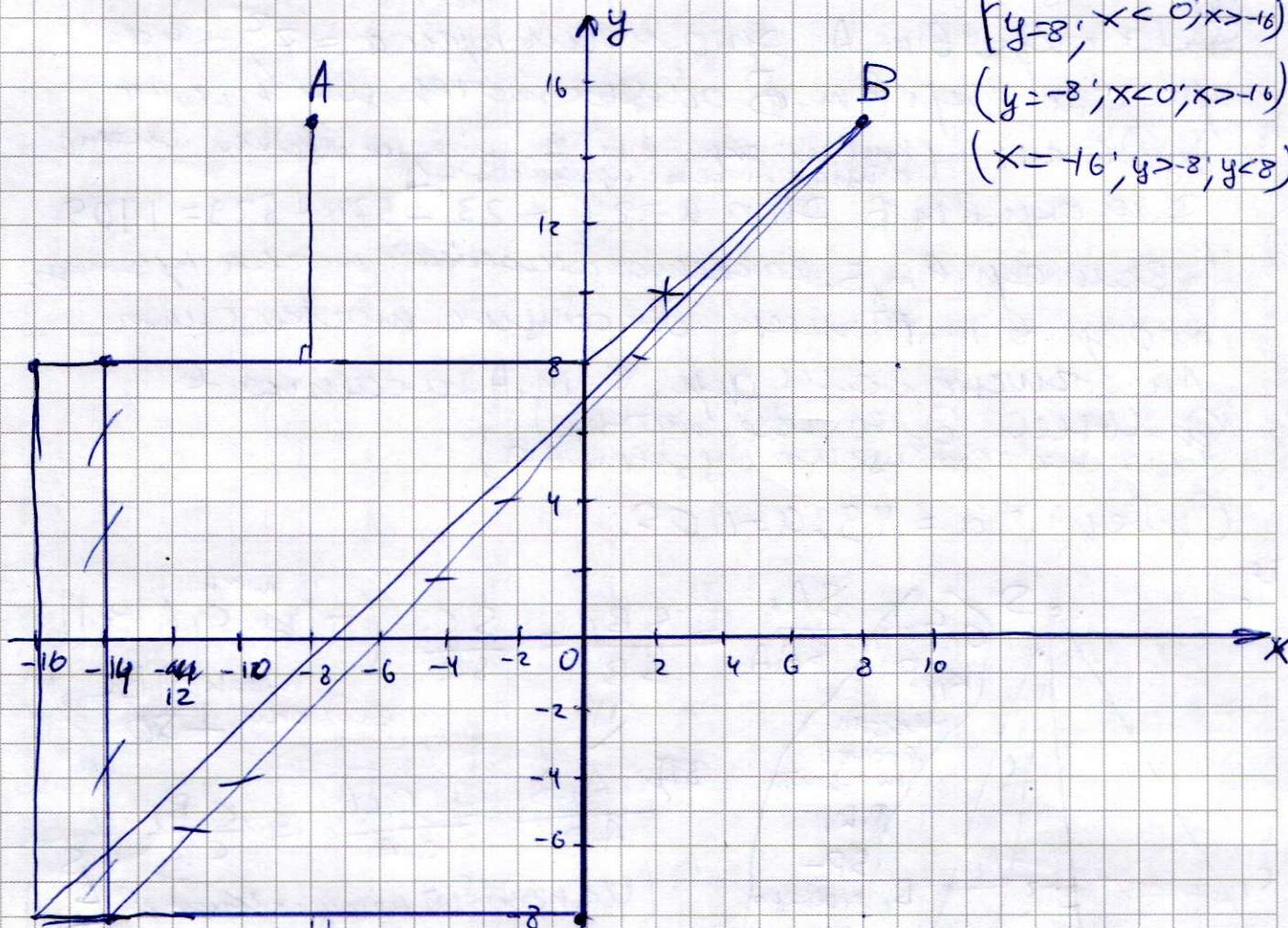
Подставим $y = x-4$

$$(-x^7)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(x(x-4)^2)} \cdot (x-4)^{\ln(4-x)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (x+8)^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$$

Первое уравнение задает
прямоугольник из
отрезков $\begin{cases} x=0, y>-8; y \leq 8 \\ y=8, x < 0; x > -16 \\ y=-8, x < 0; x > -16 \\ x=-16, y > -8; y \leq 8 \end{cases}$



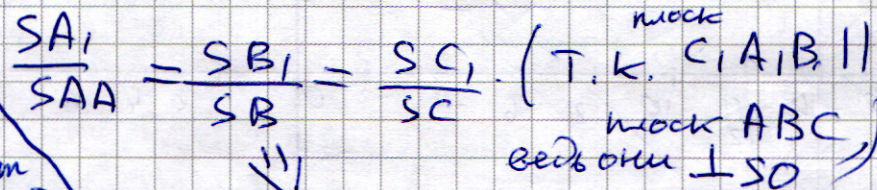
Второе уравнение задает семейство окружностей с радиусом $=\sqrt{a}$, и координатами центров $(\pm 8, \pm 15)$.
Ровно два решения — ровно два пересечения
прямоугольника и окружностей.

Ввиду симметрии рисунка относ. Ox .
Если прямая перес. с окружностью с
центром выше Ox , то она перес. с окружностью с
центром ниже Ox

Для окр. в т. А это лишь при $a = 7^2 = 49$
причем окр. в т. Б общих точек иметь не
будет. (причем окр. в т. А уже не будет иметь
общих точек с окружностью Б)

(если окр. θ т. Б. касается близлежащей точки прямой, то окр. θ т. A имеет две общие точки с ней. Аналогично, если окр. θ т. А касается в дальней для неё точке, то окр. θ т. Б. имеет две общие точки с ней.)

4.



(из подобия треугольников )

T.KC, A, B, || ABC, mo Sk2 =

$$= \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB} = 3/4, \text{ not } S$$

$$\sin k_2 = \frac{GR}{k_2 k_1} = \frac{GR}{2R} \text{ Toda } \angle A S O \sin \angle K S O = \frac{OK}{SI} = \frac{IR}{2R} = \frac{1}{2} \rightarrow \angle K S O = \arcsin \frac{1}{2} \text{ (ou } < 90^\circ)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда сечение $KLM \parallel ABC$, т.к. $\triangle SOK \sim \triangle SPK$,
по двум углам с $\cos \varphi = \frac{SO}{SP}$. $\frac{14}{\sqrt{3}}R \rightarrow K = \frac{3.7R}{14R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $SP = \frac{SK}{\cos \alpha_{SP}} = \frac{8R}{\frac{2\sqrt{3}}{7}} = \frac{7 \cdot 8R}{4\sqrt{3}}$

Тогда S_{Δ} обр. отрезками $\parallel AB, BC$ и AC и прох. перз.
 K, L и $M = \frac{3}{4} \cdot S_{\Delta ABC} = 16 \cdot \frac{3}{4} = 12$

Dibuat: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$, $S_{ceruk} = 12$

7. $x \in \mathbb{Z}, x \in (4; 31), \text{ т.к.}$

При $x = 4$ $3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 81 + 4 \cdot 3^{28} \approx 12 + 12$ / уменьш.
и при $x < 4$, правая часть будет ~~уменьш.~~,
а левая, ~~уменьш.~~ тоже уменьш.,
но незначит. (левая всегда $> 4 \cdot 3^{28}$, а правая
будет $\leq 4 \cdot 3^{28}$)

При $x = 31$

$$27 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28} = \cancel{93} + 31 \cdot 3^{28} - \cancel{3 \cdot 31}$$

и при дальнейших x правая часть будет
с кажд. $\#(x+1)$ увелич²⁸ а левая $\sim \sum + 2 \cdot 3^{28}$
Т.е. левая часть всегда будет больше правой.

При фикс. x найдем возм. $y = 93 \cdot 3^{28} - 3^x - 4 \cdot 3^{28} - 3x$

$$\begin{aligned} \text{Тождa кал-во наp} &= \sum_{x=5}^{30} (93 + x \cdot 3^{28} - 3x - 4 \cdot 3^{28}) = \\ \sum_{x=5}^{30} &= \frac{35 \cdot 26}{2} = 455 \\ &= 93 \cdot 26 + \sum_{x=5}^{30} x \cdot 3^{28} - 3 \left(\sum_{x=5}^{30} x \right) - 4 \cdot 3^{28} \cdot 26 - 3^{30} - 3^{29} - \dots - 3^5 \end{aligned}$$

$$= 2238 + 351 \cdot 3^{28} - 3^{30} - 3^{29} - \dots - 3^5 =$$

$$= 873 + 351 \cdot 3^{28} - 3^{30} - 3^{29} - \dots - 3^5$$

~~Если расм. на расм $3^5 + 3^6 + \dots + 3^{27}$~~

$$= 3^{28} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{23}} \right)$$

Еще $1 + 3 + 9 + 81 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{27} =$

~~$\frac{3^{28} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{28} - 1}{2}$~~

Тогда $3^{30} = 9 \cdot 3^{28}$, $3^{29} = 3 \cdot 3^{28}$, а $3^5 + \dots + 3^{27} =$

$$= \frac{3^{28} - 1}{2} - 94$$

Итого кол-во пар = ~~967~~ $+ (351 - 13) \cdot 3^{28} + \frac{3^{28} - 1}{2} =$

$$= 967,5 + 337,5 \cdot 3^{28}$$

Ответ: $967,5 + 337,5 \cdot 3^{28}$

2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

~~$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (2 \cos^2 2x - 1) = 0$~~

~~$2 \cos 5x (\sqrt{2} \cos(\frac{3x - \pi}{4})) + \sqrt{2} (2 \cos^2 2x - 1) = 0$~~

~~$\cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos^2 2x = \cos^2 \frac{\pi}{4} = 0$~~

~~$(\cos 2x - \cos \frac{\pi}{4})(\cos 5x + \cos \frac{\pi}{4}) = 0$~~

~~$(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2})(\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

~~$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$~~

8/15/2018

$$\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cancel{\cos 2x} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$2\left(\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$3,5 \times + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad u \in \mathbb{Z}$$

$$X = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \pi n}{3,5} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$1,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n}{1,5}$$

$$\downarrow$$

 ~~$\sqrt{2} \sin(2x)$~~
 $\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

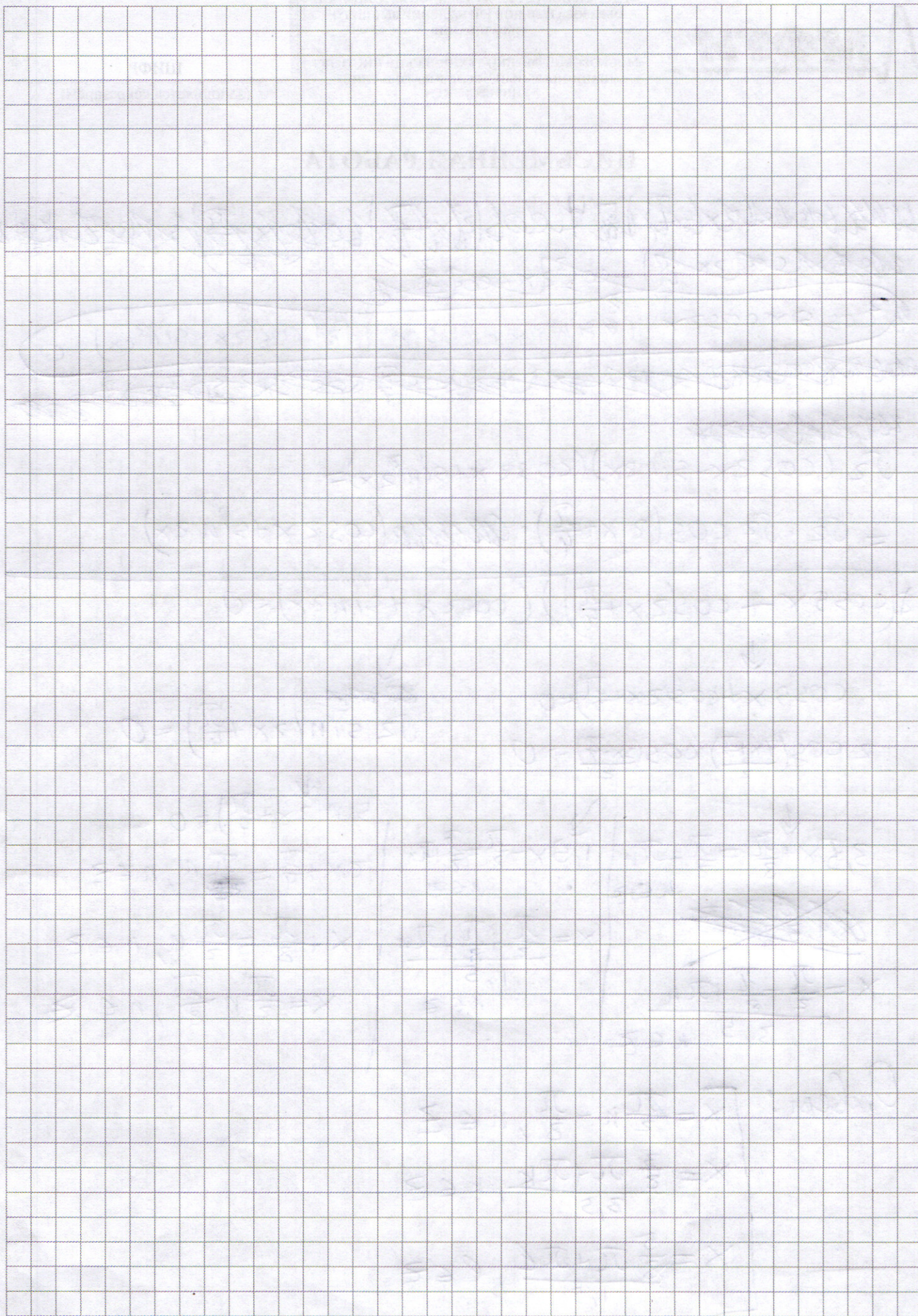
$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \frac{\pi}{2} n \cdot \frac{\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}$$

Orbiter:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{8}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\frac{3}{8}\pi + \pi k}{3,5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\frac{5}{8}\pi + \pi l}{1,5}, l \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} \cdot y^{-\ln(-y)} = \cancel{x^2 \ln(xy^2)} (2x+4)^2 - 4(12x-3x^2) =$$

$$= 4x^2 + 16x + 16 - 48x + 12x^2 =$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 =$$

$$= (4x-4)^2$$

$$y^2 + 2xy + x^2 -$$

$$(2x+4)(y+6)$$

$$y^2 - 3x^2 - 24$$

$$(y-x)^2 + 4xy$$

y

$$\frac{-2x-4 \pm \sqrt{4x^2-4}}{2}$$

$$-x-2 \pm \sqrt{x^2-1}$$

Пусть $2x$

$$\left(\frac{x^7}{x^3}\right)^{\ln(3x)} = x^2 \ln(9x^3)$$

$$-x-2 \pm \sqrt{x^2-1}$$

$$y = x-4 \quad y = -3x$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^2 \ln 9x^3$$

$$x^{\ln 3x} \neq 0$$

$$x^{6 \ln 3x} \cdot 3^{-\ln 3x} = x^2 \ln(9x^3)$$

$$\cos^2 2x - \cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos 5x \cos \left(2x \frac{\pi}{4} - 2x \right)$$

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$K_{83H} \cdot 64827 \rightarrow$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 9} \\ - 63 \\ \hline 18 \\ - 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ - 6 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 27 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 15 \\ \hline 280 \\ 56 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 21} \\ - 21 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 21 \end{array}$$

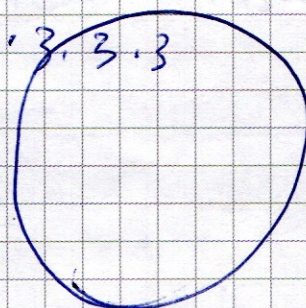
$$350 = 87.50$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 27 \\ \hline 343 \\ 98 \\ \hline \times 1323 \\ 49 \\ \hline 11307 \\ 5292 \\ \hline 64827 \end{array}$$

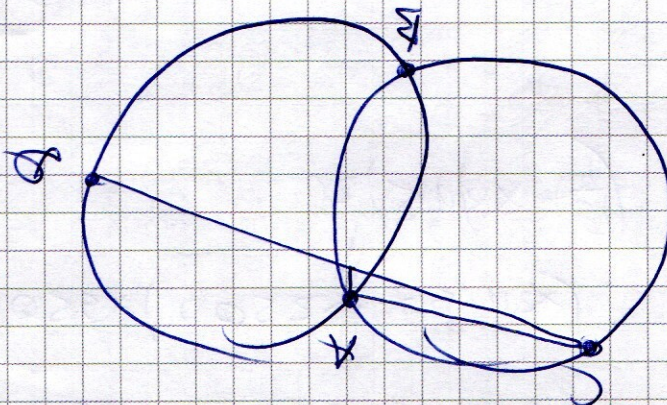
$$\frac{8.7}{2} = 6.5$$

$$7.49$$

$$7.7.7.7.3.3.3$$



$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 8 \\ \hline 280 \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \quad 3^5 + 3^6 + 3^7 + \dots + 3^{27}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$\frac{3^{26} - 3^5}{3 - 1} = 104$$

$$4 \cdot 3^{28} \cdot x - 3x + 93 \geq y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$4 \cdot 3^{28} - 12 + 93 \geq y > 3^4 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$81 \geq y >$$

$$\begin{array}{r} 455 \\ 3 \\ \hline 1365 \end{array}$$

$$1 + 4 \cdot 3^{28} \quad \begin{array}{r} 873 \\ 94 \\ \hline 967 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2238 \\ - 1365 \\ \hline 873 \end{array}$$

$$5 \cdot 3^{28} - 12 + 93 \geq y > 3^5 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$8 \cdot x \cdot 3^{28} - 3x + 93 \geq 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$\begin{array}{r} 1365 \\ 873 \\ \hline 2238 \end{array}$$

$$3^{28}(x - 4) - 3^x - 3x + 93 > 0$$

$$6 \cdot 3^{28} - 24 + 93 \geq y > 3^6 + 4 \cdot 3^{28}$$

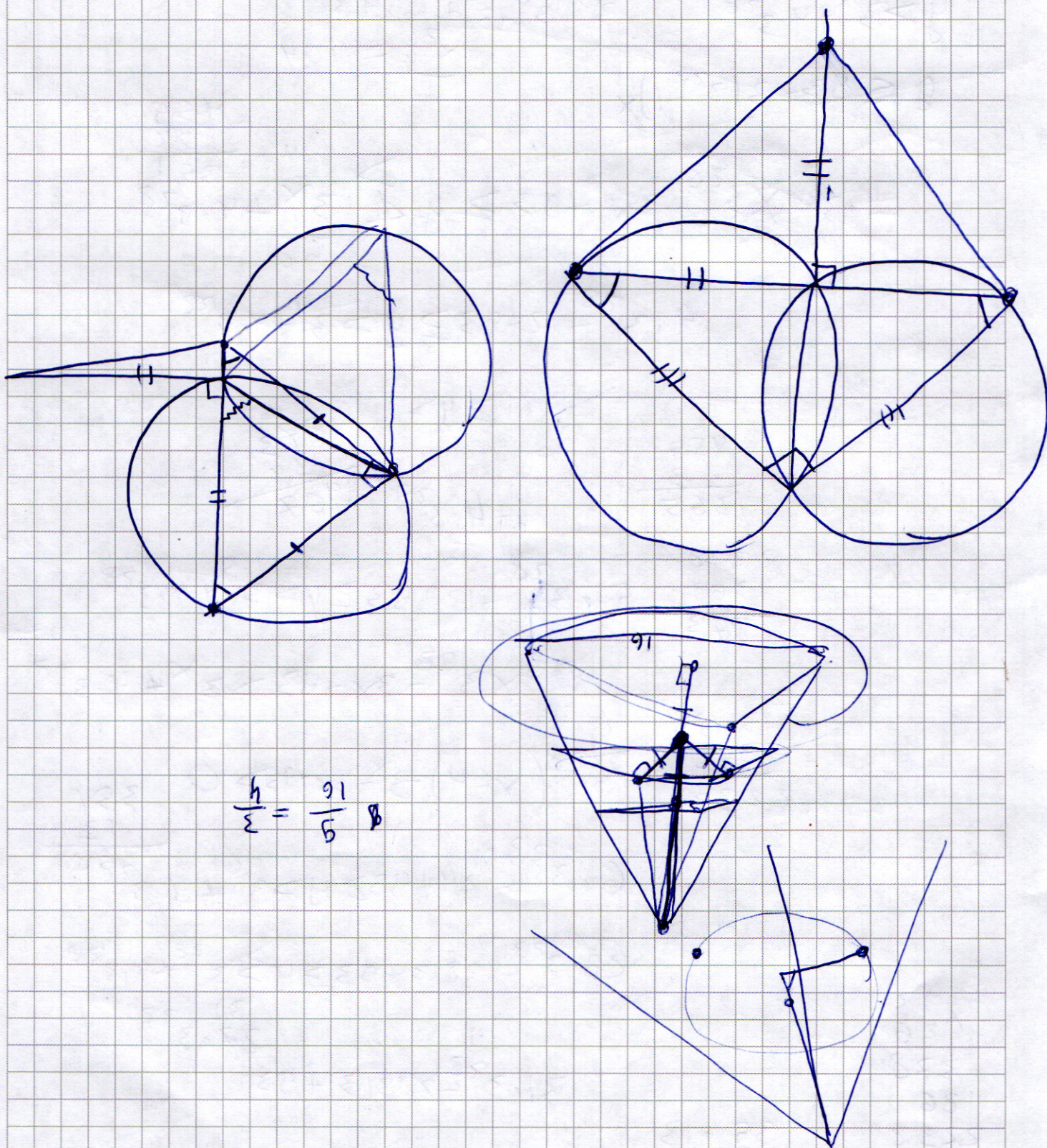
$$28 \cdot 3^{28} - 28 \cdot 3 + 93 \geq y > 3^{28} + 4 \cdot 3^{28}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ \times 26 \\ \hline 378 \\ 186 \\ \hline 2238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \cdot 13 \\ 13 \\ \hline 105 \\ 35 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$31 \cdot 3^{28} - 28 \cdot 31 \cdot 3 + 93$$

$$\begin{array}{r} 351 \\ 13 \\ \hline 288 \end{array}$$



$$\frac{h}{2} = \frac{91}{5} \text{ B}$$