

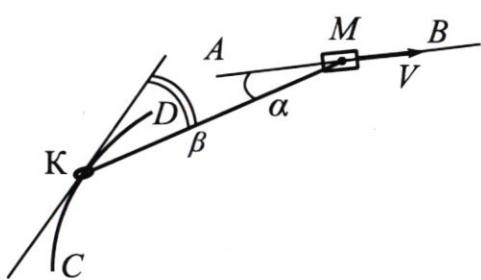
Олимпиада «Физтех» по физике,

Класс 11

Вариант 11-02

Бланк задания обязательно должен быть вложен в работу. Работы без е

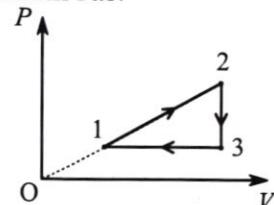
1. Муфту M двигают со скоростью $V = 40$ см/с по горизонтальной направляющей AB (см. рис.). Кольцо K массой $m = 1$ кг может двигаться без трения по проволоке CD в виде дуги окружности радиусом $R = 1,7$ м. Кольцо и муфта связаны легким тросом длиной $l = 17R/15$. Система находится в одной горизонтальной плоскости. В некоторый момент трос составляет угол $\alpha (\cos \alpha = 3/5)$ с направлением движения муфты и угол $\beta (\cos \beta = 8/17)$ с направлением движения кольца.



- 1) Найти скорость кольца в этот момент.
- 2) Найти скорость кольца относительно муфты в этот момент.
- 3) Найти силу натяжения троса в этот момент.

2. Термовая машина работает по циклу, состоящему из изохоры, изобары и участка прямо пропорциональной зависимости давления P от объема V (см. рис.). Рабочее вещество – одноатомный идеальный газ.

- 1) Найти отношение молярных теплоемкостей на тех участках цикла, где происходило понижение температуры газа.
- 2) Найти для процесса 1-2 отношение количества теплоты, полученной газом, к работе газа.
- 3) Найти предельно возможное максимальное значение КПД такого цикла.

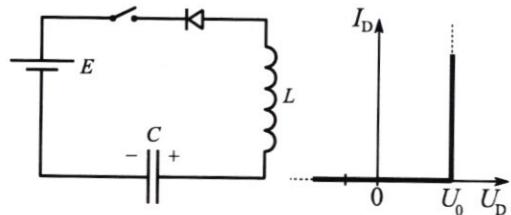


3. Обкладки конденсатора – квадратные металлические сетки, сторона квадрата во много раз больше расстояния d между обкладками. Положительно заряженная частица движется на большом расстоянии к конденсатору по оси симметрии, перпендикулярно обкладкам, влетает в него со скоростью V_1 и останавливается между обкладками на расстоянии $0,2d$ от положительно заряженной обкладки. Удельный заряд частицы $\frac{q}{m} = \gamma$.

- 1) Найдите продолжительность T движения частицы в конденсаторе до остановки.
- 2) Найдите напряжение U на конденсаторе.
- 3) Найдите скорость V_0 частицы на бесконечно большом расстоянии от конденсатора.

При движении частицы электрическое поле, созданное зарядами конденсатора, считать неизменным, а электрическое поле внутри конденсатора вблизи оси симметрии считать однородным.

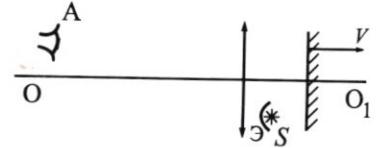
4. В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ разомкнут, ЭДС идеального источника $E = 3$ В, конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ заряжен до напряжения $U_1 = 6$ В, индуктивность идеальной катушки $L = 0,2$ Гн. Вольтамперная характеристика диода дана на рисунке, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В. Ключ замыкают.



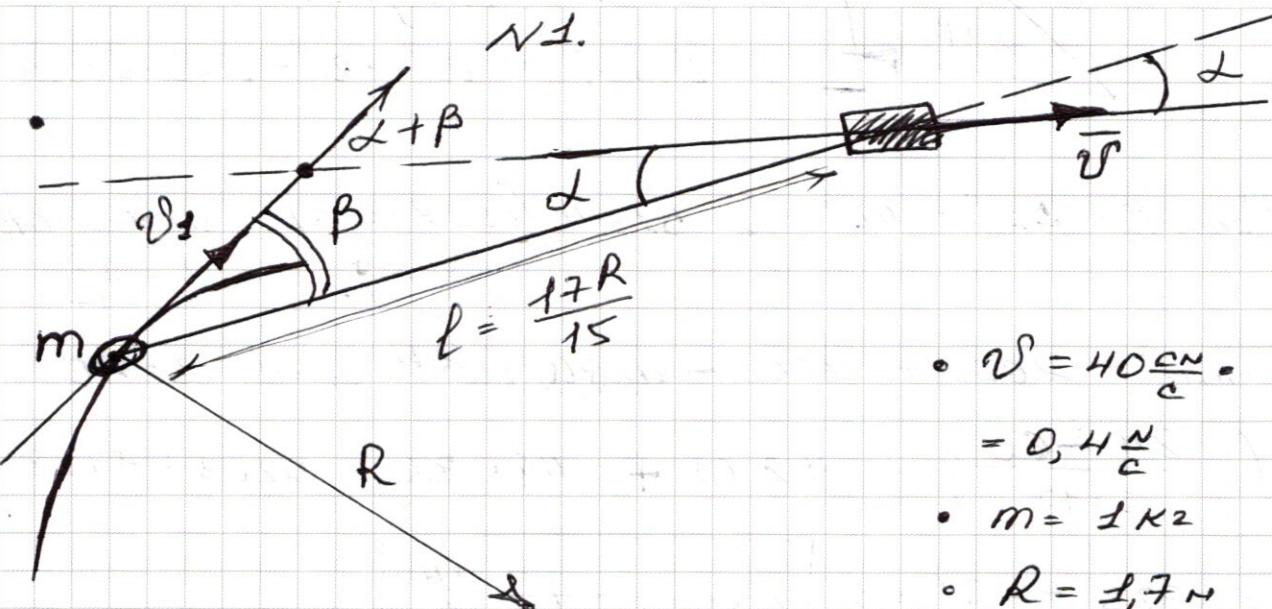
- 1) Найти скорость возрастания тока сразу после замыкания ключа.
- 2) Найти максимальный ток после замыкания ключа.
- 3) Найти установившееся напряжение U_2 на конденсаторе после замыкания ключа.

5. Оptическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием F , плоского зеркала и небольшого экрана Э, расположенного так, что свет от источника S может попасть на линзу только после отражения от зеркала (см. рис.). Зеркало расположено перпендикулярно главной оптической оси ОО₁ линзы. Источник S находится на расстоянии $8F/15$ от оси ОО₁ и на расстоянии плоскости F/3 от линзы. Линза и источник неподвижны, а зеркало движется со скоростью V вдоль оси ОО₁. В некоторый момент зеркало оказалось на расстоянии F от линзы.

- 1) На каком расстоянии от плоскости линзы наблюдатель А сможет увидеть в этот момент изображение источника в системе?
- 2) Под каким углом α к оси ОО₁ движется изображение в этот момент? (Найти значение любой тригонометрической функции угла.)
- 3) Найти скорость изображения в этот момент.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



- $V = 40 \frac{\text{см}}{\text{с}} =$

- $= 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

- $m = 1 \text{ кг}$

- $R = 1,7 \text{ м}$

- $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

- $\cos \beta = \frac{8}{17}$

Решение:

1) В силу неравенства тряси:

Проекция скорости колеса в направлении на направление - "троя" равна: \Rightarrow

$$\Rightarrow V_1 \cdot \cos \beta = V \cdot \cos \alpha \Rightarrow V_1 = \frac{V \cdot \cos \alpha}{\cos \beta};$$

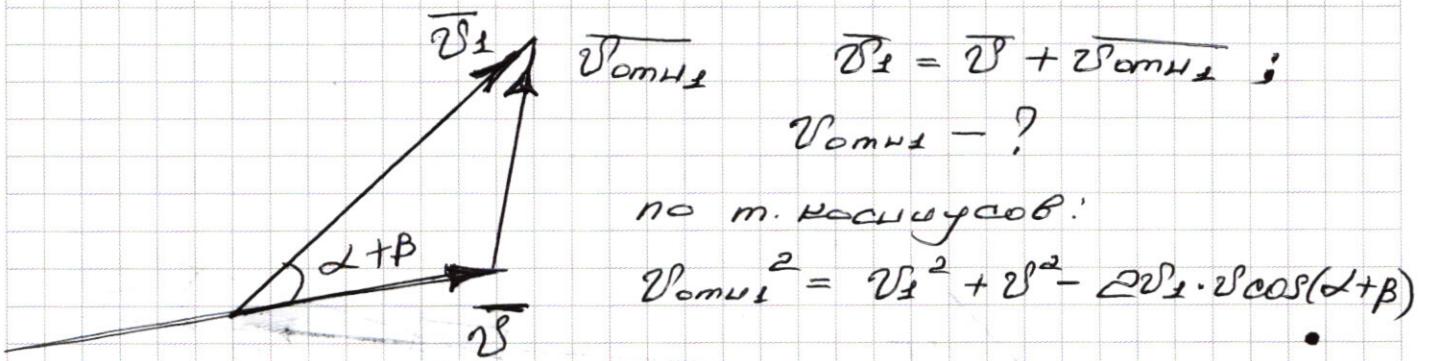
$$V_1 = \frac{0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{8}{17}} = \frac{3 \cdot 17}{25 \cdot 8} = \frac{51}{100} = 0,51 \frac{\text{м}}{\text{с}} = \\ = 51 \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

2) Проекция скорости колеса на направление движения ее траектории:

$$V_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{отн},N} = V_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) - V \quad (\overline{V}_{\text{дис}} = \overline{V}_{\text{отн},N} + \overline{V}_{\text{неп}})$$

или через треугольник скоростей:



$$\overline{V}_2 = \overline{V} + \overline{V_{\text{омн}}}; \\ V_{\text{омн}} - ?$$

по м. насижусов:

$$V_{\text{омн}}^2 = V_2^2 + V^2 - 2V_2 \cdot V \cos(\alpha + \beta)$$

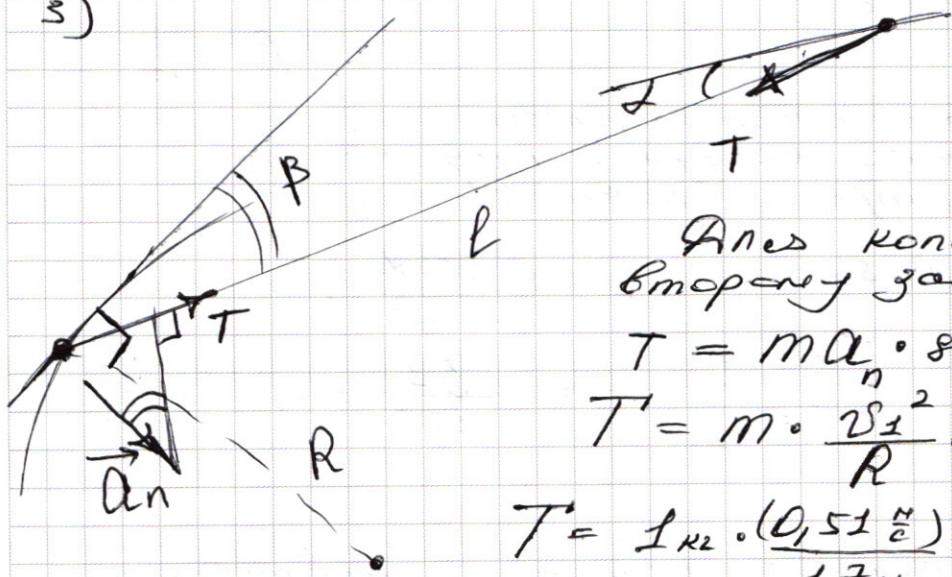
$$V_{\text{омн}}^2 = 51^2 + 40^2 - 2 \cdot 51 \cdot 40 \left(\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{17}} \right)$$

$$V_{\text{омн}}^2 = 2601 + 1600 - \cancel{4080} \cdot \cancel{2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 40} = 4201 + 48 \cdot 36 = 4201 + 1728 =$$

$$\cancel{\left(\frac{24 - 60}{5 \cdot 17} \right)} = 4201 + 48 \cdot 36 = 4201 + 1728 =$$

$$\approx 5929 = 77^2 \Rightarrow \boxed{V_{\text{омн}} = 77 \frac{\text{см}}{\text{с}}}$$

3)



Анал. колеса по
второму закону Ньютона

$$T = m a_n \cdot \sin \beta$$

$$T' = m \cdot \frac{V_1^2}{R} \cdot \sin \beta$$

$$T' = f_{\text{кд}} \cdot \frac{(0,51 \frac{\text{м}}{\text{с}})^2}{1,7 \text{ м}} \cdot \frac{15}{17}$$

$$T = \frac{1 \cdot 9 \cdot 17^2 \cdot 15 \cdot 10}{1000 \cdot 17^2} = \frac{135}{1000} = 0,135 \text{ Н}$$

$$\bullet 3) T' = m \left(\frac{V \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} \right)^2 \cdot \sin \beta / R = 0,135(\text{Н})$$

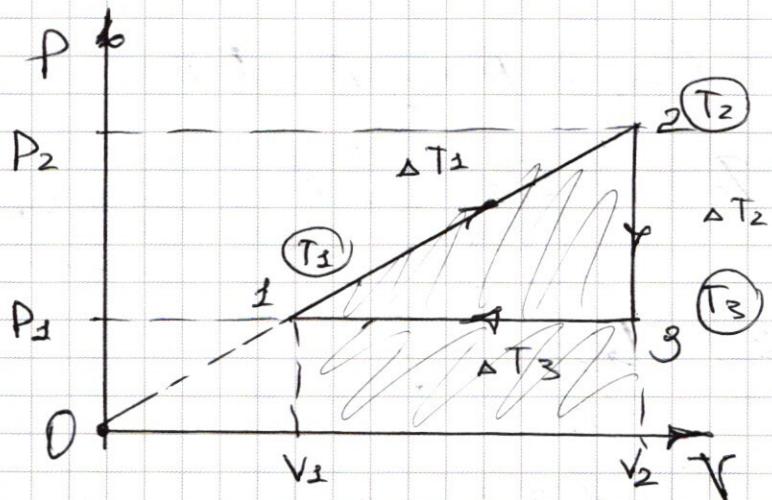
Ответ: 1) $V_1 = \frac{V \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} = 51 \frac{\text{см}}{\text{с}}; 2)$

$$V_{\text{омн}} = \left(\frac{V \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} \right)^2 + V^2 - 2 \left(\frac{V \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} \right) V \cdot \cos(\alpha + \beta) = 77 \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2.

- 1) $\frac{C_{23}}{C_{31}} - ?$
- 2) $\frac{Q_{32}}{A_{32}} - ?$
- 3) $y_{(max)} - ?$



Решение:

$$\textcircled{1} \quad P_1 V_1 = \nu R T_1 \quad \rightarrow \text{увеличение температуры}$$

$$\textcircled{2} \quad P_2 V_2 = \nu R T_2 \quad \rightarrow \text{уменьшение температуры}$$

участок 1-2: $P = \alpha V \rightarrow P_1 = \alpha V_1 \rightarrow P_2 = \alpha V_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{V_2}$, тогда $\frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$;
 $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow (P_1 V_2 = P_2 V_1) \rightarrow \left(\frac{P_1 V_2}{P_2 V_1} = 1\right)$

$$\textcircled{3} \quad \text{Процесс 2-3: } P_2 V_2 = \nu R T_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_3}{T_2}} \quad \text{понижение темпер.}$$

$$(изохоры) \quad P_1 V_1 = \nu R T_3$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Процесс 3-1: } P_1 V_2 = \nu R T_3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_3}} \quad \text{поправки темпер.}$$

$$P_1 (V_3 - V_2) = \nu R \Delta T_3 \quad \rightarrow \quad P_1 V_1 = \nu R T_1$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \quad \frac{C_{123}}{C_{31}} - ? \quad \text{1 шаг по термодинамике для участка 2-3:}$$

$$C_{123} \nu \Delta T_2 = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_2 \quad \rightarrow \quad C_{23} = \frac{3}{2} R$$

1) Нарисовать термодинамический процесс участка 3-1:

$$Q_{31} = A_{31} + \Delta V_{31}$$

$$C_{31} \Delta R_{\Delta T_3} = \underbrace{P_1(V_1 - V_2)}_{\Delta V_{\Delta T_3}} + \frac{3}{2} \Delta R_{\Delta T_3}$$

~~$$Q_{31} \Delta R_{\Delta T_3} = \Delta Q_{\Delta T_3} + \frac{3}{2} \Delta R_{\Delta T_3}$$~~

$$C_{31} = R + \frac{3}{2} R = \frac{5}{2} R$$

$$\text{Тогда } \frac{C_{23}}{C_{31}} = \frac{\frac{3}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

2) $\frac{Q_{32}}{A_{32}} - ?$

П.к. 1-2-3-1 — замкнутый цикл (у 3 в Н.Т.):

$$Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = A_{32} + \cancel{A_{23}} + A_{31}$$

(полное изменение внутренней энергии за цикл равно 0)

$$Q_{32} + \Delta V_{23} + A_{31} + \Delta V_{31} = A_{32} + A_{31}$$

$$Q_{32} = A_{32} - \Delta V_{23} - \Delta V_{31}$$

$$(A_{32} = P_2(V_2 - V_1) P_1(T_2 - T_1) + (P_2 - P_1)(T_2 - T_1) = (A_{32} > 0 \rightarrow))$$

$$= (V_2 - V_1)(P_1 + \frac{P_2 - P_1}{2}) = (V_2 - V_1)(\frac{P_1 + P_2}{2})$$

$$\Delta V_{23} = \frac{3}{2} \underbrace{\Delta R}_{T_2(P_2 - P_1)} (T_3 - T_2); \quad \Delta V_{31} = \frac{3}{2} \underbrace{\Delta R}_{P_1(T_3 - T_1)} (T_3 - T_1)$$

$$\frac{Q_{32}}{A_{32}} = \frac{(V_2 - V_1)(\frac{P_1 + P_2}{2}) - \frac{3}{2} V_2(P_1 - P_2) - \frac{3}{2} P_1(V_1 - V_2)}{(V_2 - V_1)(\frac{P_1 + P_2}{2})} =$$

$$= \cancel{V_2 P_3} - \cancel{V_3 P_2} + \cancel{V_2 P_2} - \cancel{V_1 P_2} - 3 \cancel{V_2 P_1} + 3 \cancel{V_2 P_2} - 3 P_1 V_1 + 3 P_1 V_2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{Q_{32}}{A_{32}} = \frac{\cancel{4}V_2 p_1 + 4 V_2 p_2 - 4 V_1 p_1 - \cancel{4} V_1 p_2}{(V_2 - V_1)(p_1 + p_2)} =$$

Лз соотн, выведенного в ① и ② пусть:

$$p_1 V_2 = p_2 V_1 \Rightarrow$$

$$\frac{Q_{32}}{A_{32}} = \frac{\cancel{p_2 V_2} + 4 p_2 V_2 - 4 p_1 V_1 - \cancel{p_2 V_2}}{\cancel{V_2 p_1} - V_1 p_1 + V_2 p_2 - \cancel{p_2 V_2}} =$$

$$= \frac{4(p_2 V_2 - p_1 V_1)}{(p_2 V_2 - p_1 V_1)} = 4 \Rightarrow \frac{Q_{32}}{A_{32}} = 4 !$$

$$3) KTD: \underline{J} = \frac{A}{Q_{nonyz}} ;$$

$$A = A_{32} + \cancel{A_{23}}^0 + A_{31} = Q_{32} + Q_{23} + Q_{31}$$

$$Q_{nonyz} = Q_{32} ! \text{, т.к. } Q_{23} < 0 \text{ и } Q_{31} < 0 .$$

$$\underline{J} = \frac{A_{32} + A_{31}}{A_{32} + \Delta V_{32}} = \frac{\frac{(V_2 - V_1)(p_1 + p_2)}{2} + p_1(V_1 - V_2)}{\frac{(-V_2 - V_1)(p_1 + p_2)}{2} + \frac{3}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1)} =$$

$$= (V_2 - V_1) \left(\frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} - p_1 \right) \cdot 2$$

$$= \frac{p_1 V_2 - p_1 V_1 + p_2 V_2 - p_2 V_1 + 3 p_2 V_2 - 3 p_1 V_1}{p_1 V_2 - p_2 V_1 + 4 p_2 V_2 - 4 p_1 V_1} = \frac{p_2 V_2 + p_1 V_1 - 2 p_1 V_2}{4(p_2 V_2 - p_1 V_1)}$$

$$= \frac{T_2 + T_1 - 2T_3}{4(T_2 - T_1)} ; \frac{T_3^2}{T_1 T_2} = 1 \Rightarrow T_3^2 = T_1 T_2 \Rightarrow$$

лз пусть ① - ④

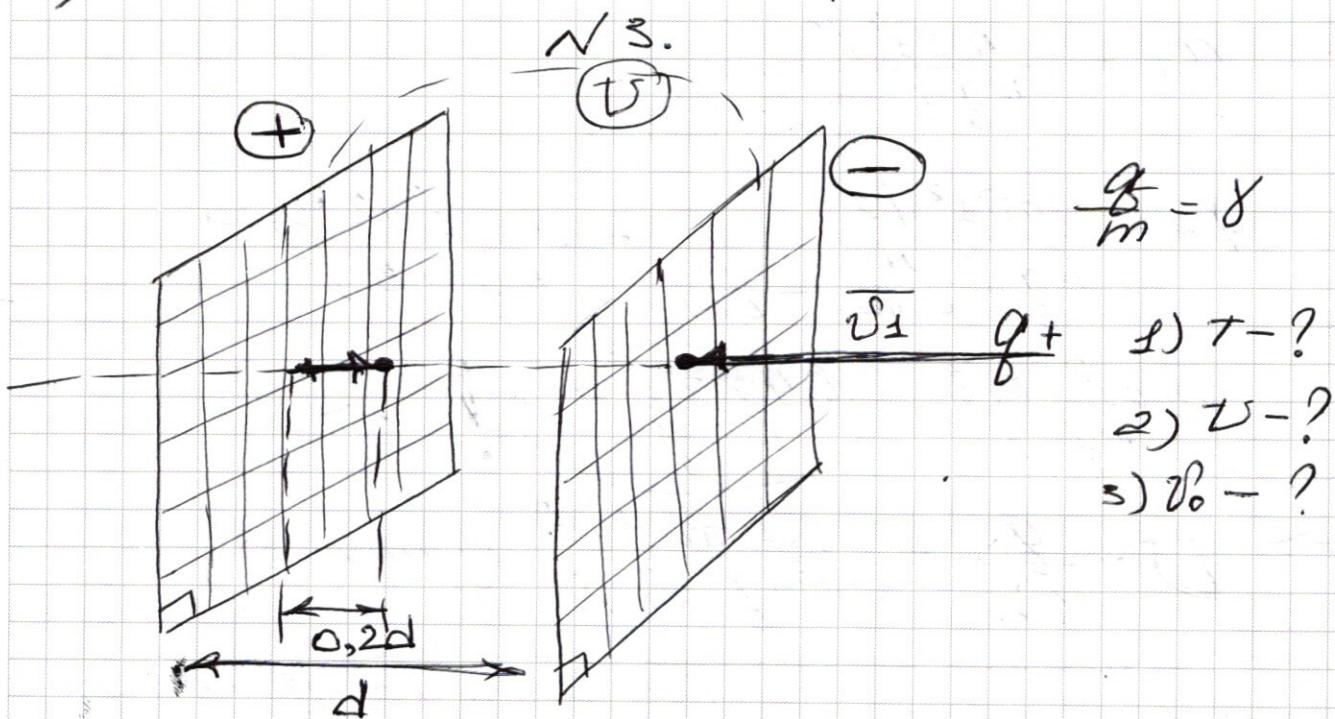
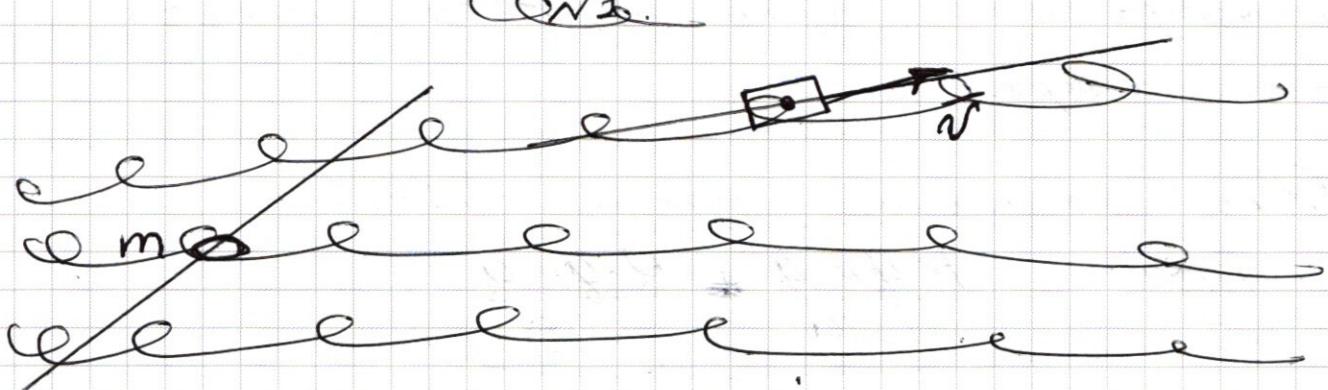
$$\Rightarrow \eta = \frac{T_2 + T_1 - 2\sqrt{T_2 T_1}}{4(T_2 - T_1)} = \frac{(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2}{4(T_2 - T_1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{4(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})}$$

Ответ: 1) $\frac{C_{23}}{C_{33}} = 36$; 2) $\frac{C_{12}}{A_{33}} = 4$;

$\Rightarrow \eta = 25\%$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$q_K = C U \Rightarrow U = \frac{q_K}{C} \rightarrow \text{где } q_K - \text{ заряд}$$

на обкладках конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$F = q \cdot E = q \cdot \frac{k q_K}{r^2}$$

3) Давно решалось пунка 3) Запишем

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{\rho g K}{2 \rho_0} S$$

(здесь используется первым было напротивленное нанесение конденсатора)

Давно начального момента ЗСТ:

$$\frac{m v_1^2}{2} = \frac{\rho g K \cdot q}{0,2d} = \frac{\rho \cdot g K \cdot q}{0,8d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_K = \frac{m v_1^2 / 2}{\rho g \left(\frac{1}{0,2d} - \frac{1}{0,8d} \right)}$$

$$q_K = \frac{m v_1^2 / 2}{\rho g \left(\frac{4}{0,8d} - \frac{1}{0,2d} \right)} = \frac{m v_1^2 / 2 \cdot 0,8d}{\rho g \cdot 3}$$

$$= \frac{m v_1^2 \cdot 0,8d}{2 \rho g \cdot 3} = \frac{0,4 m v_1^2 d}{3 \rho g} ! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{q_K}{C} = \frac{0,4 m v_1^2 d^2}{3 \rho g \cdot C_0 \cdot S} \text{ (пункт 2)}$$



Т.к. заслонка движется
быстро достаточно пунка
электрического
поле в конденсаторе
по 234:

$$E \cdot q = m a \Rightarrow E = \frac{q_K}{C_0} = \frac{q_K}{\rho \cdot C_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho g K}{d^2} \cdot q = m a$$

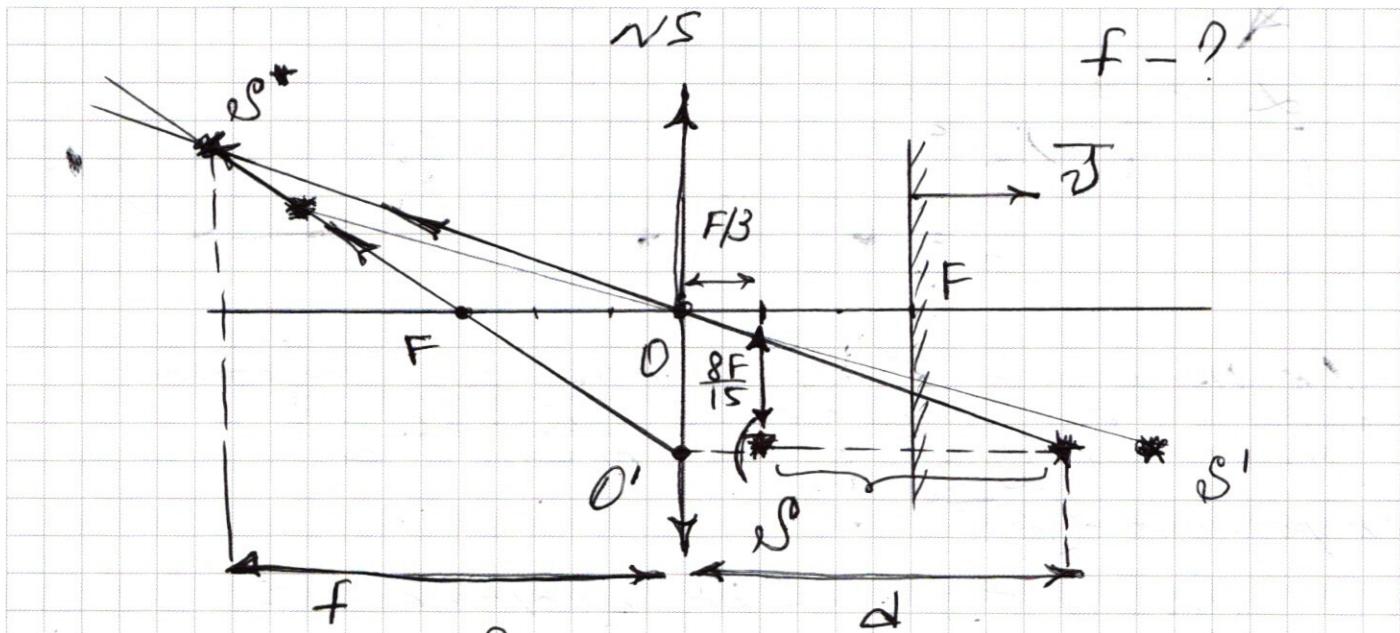
$$U_1' = U_1 = a \cdot T \Rightarrow$$

$$T = \frac{U_1}{E \cdot q}$$

$$T = \frac{U_1}{a} \Rightarrow T = \frac{U_1 m}{E q}$$

$$\text{Ответ: 1) } T = \frac{U_1}{E \cdot q}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Решение:

① Т.к. в системе присутствует зеркало, то изображение источника в зеркале будет находиться на расстоянии d

$$d = F/3 + (F - F/3) \cdot 2 = F/3 + 4F/3 = \\ = \frac{5}{3}F$$

Тогда по формуле тонкой линзы:

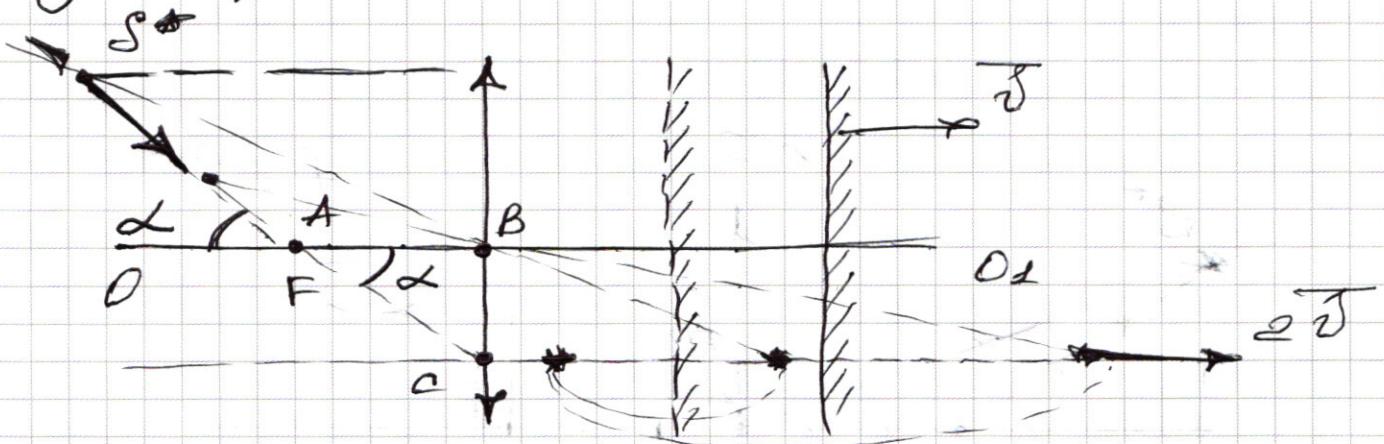
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \Rightarrow f - \text{расстояние от}$$

изображения источника в поле до плоскости линзы $\Rightarrow f$ - расстояние от изображения до плоскости линзы (исконное)

$$\frac{1}{\frac{5}{3}F} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{3}{5F} = \frac{2}{5F} \Rightarrow \\ \Rightarrow f = 2,5F$$

② Изображение источника

будет прямой S^*O' !



Р.к. источник всегда остается на одном месте, его изображение в зеркале движется без остановки со

скоростью $2v$. =>

\Rightarrow путь, проходимый от изображения источника в зеркале параллельно OO' и прополченный ~~один раз~~ и проходящий через действительный фокус не изменяется (его направление и угол с прямой OO' остаются постоянными) \Rightarrow

\Rightarrow изображение источника движется без остановки по прямой OO' в силу

удаления источника (его изображения в зеркале от пульса) \Rightarrow

\Rightarrow угол между этим путем и OO' .

Найдем α из $\triangle ABC$ (на рис.) : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB}$;

$$BC = 8F/15; AB = F \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \arctg \frac{8}{15}}$$

③ Скорость источника $2v$. Пусть скорость изображения $2v^*$ — $\overline{U} = \frac{\overline{U}}{\overline{f}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$T_{\text{согр}} \approx \Delta t = \Delta d ; \quad \frac{H \cdot \cos \alpha}{2 \vartheta} = \frac{\Delta f}{\Delta d}$$

$$H \cdot \cos \alpha \cdot \Delta t = \Delta f$$

$$\frac{H \cdot \cos \alpha}{2 \vartheta} = \Gamma^2, \text{ где } \Gamma - \text{увеличение:}$$

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{2,5 F}{5,3 F} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 7} = 1,5$$

$$H = \frac{(2,5)^2 \cdot 2 \vartheta}{\cos \alpha} = \frac{9 \cdot 2 \vartheta}{4 \cdot \cos \alpha}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{64}{225} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{289}{225} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{15}{17}$$

$$H = \frac{3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 17}{4 \cdot 15} \vartheta = \frac{51}{10} \vartheta = 5,1 \cdot \vartheta$$

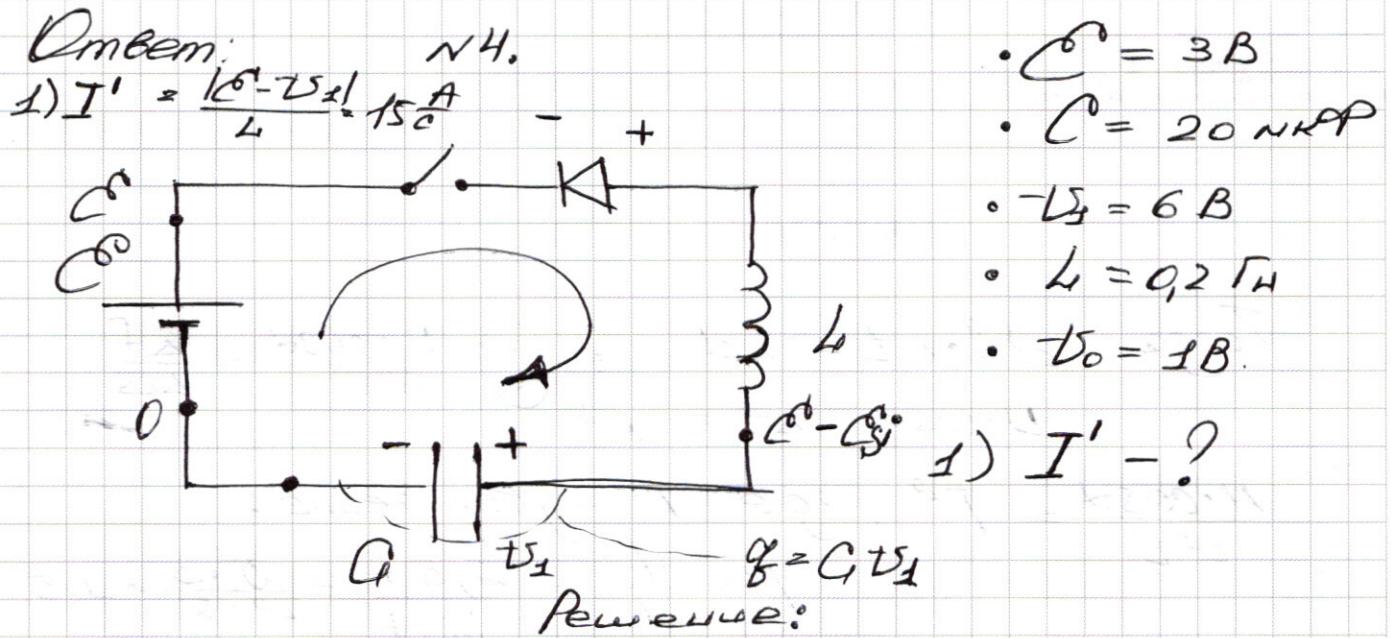
Добавление формулы: Проста v_1 -скорость
протяжки, v_2 - скорость изображения.

$$\Gamma = \frac{f_2}{d_2} = \frac{f_1 + \Delta f}{d_1 + \Delta d} ; \quad d_2 \Delta f = f_2 \Delta d \Rightarrow \frac{f_1}{d_1} = \frac{\Delta f}{\Delta d}$$

$$\text{Решение: 1)} \quad f = 2,5 F$$

$$2) \quad \alpha = \arctan \frac{f}{7,5}$$

$$3) \quad H = 2 \vartheta \cdot \left(\frac{2,5 F}{5,3 F} \right)^2 ; \quad \boxed{H = 5,1 \vartheta}$$



① Ток схемы не меняется $\Rightarrow I(0) = 0$, тогда
(после замыкания клюза)

\Rightarrow ~~заряд~~ напряжение на зонде $= 0$, тогда
рассматриваем параллельно $\Rightarrow C^0 - C^0 s i = U_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C^0 s i = C^0 - U_1 ; C^0 s i = L \cdot I' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I' = \frac{C^0 - U_1}{L} = \frac{3 \text{ В}}{0,2 \text{ ГН}} = 15 \frac{\text{А}}{\text{с}}$$

② Тока не будет пока зонд закрыт,
зонд откроется, когда напряжение на нем
становится равно U_0

$$C^0 + U_f = C^0 s i + U_0 \quad (\text{в начале (заряд)} \quad \text{после открытия зонда})$$

При max токе $C^0 s i = L \cdot I' = 0 \Rightarrow$

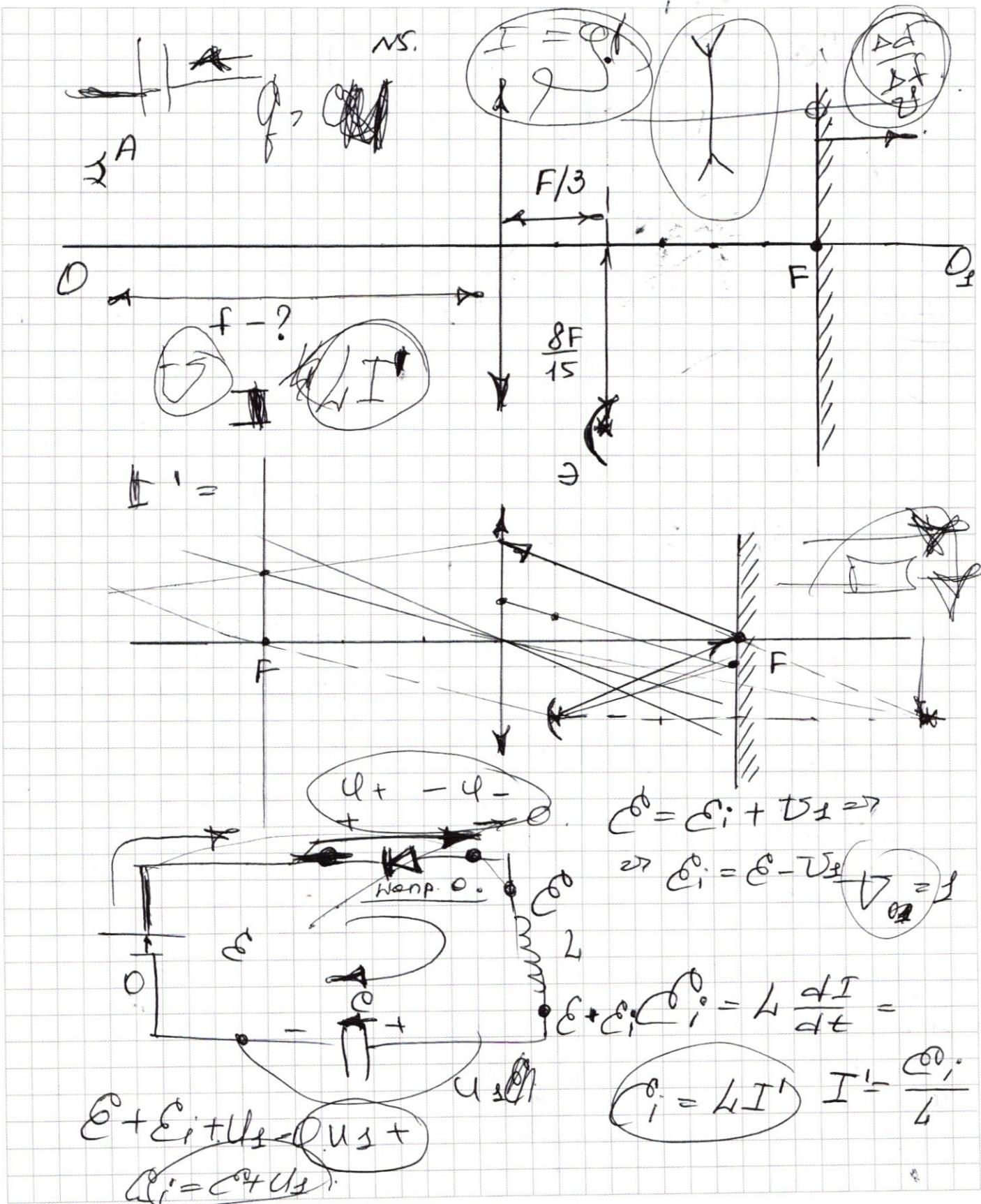
$$\Rightarrow C^0 + \frac{Q^0}{C} = U_0 \Rightarrow Q^0 = (U_0 - C^0) C -$$

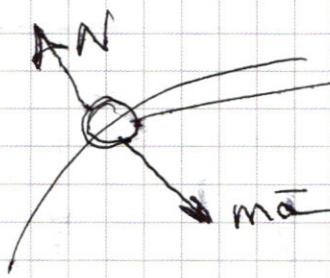
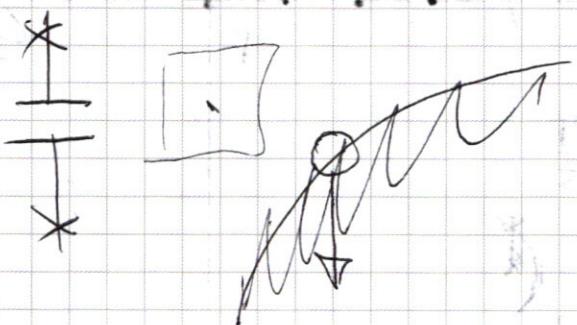
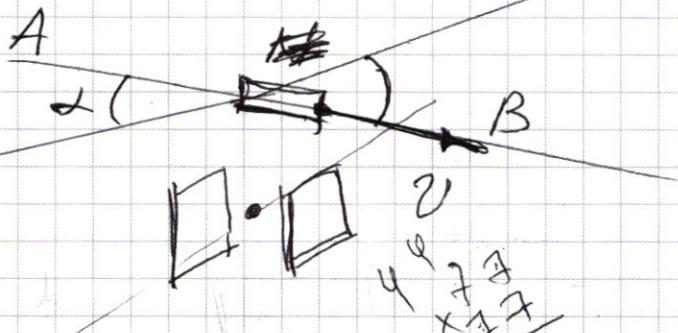
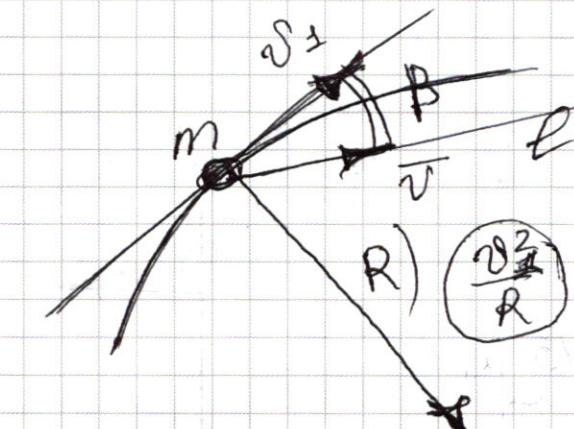
- заряд конденсатора при начальном токе

Напряжение на зонде $(U_0 - C^0)$

③ В установившемся состоянии ток
не может $\rightarrow U_2 = C^0 + U_0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\begin{array}{r} 4 \ 7 \\ \times 3 \\ \hline 1 \ 4 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 3 \\ \times 3 \\ \hline 1 \ 5 \ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 9 \\ \times 2 \\ \hline 1 \ 1 \ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \ 5 \ 2 \ 7 \ 3 \\ \times 7 \ 3 \\ \hline 1 \ 7 \ 5 \ 2 \ 1 \ 9 \\ + 5 \ 1 \ 1 \\ \hline 5 \ 5 \ 2 \ 9 \end{array}$$

$$\boxed{\sqrt{v_2} \cdot \cos \beta = v \cdot \cos \alpha}$$

$$17^2 =$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 1 \ 1 \\ \times 17 \\ \hline 1 \ 1 \ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 11 \\ \hline 17 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 64 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 53 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 102 \\ \times 4 \\ \hline 408 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 6 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 248 \\ + 36 \\ \hline 288 \\ - 24 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times 51 \\ \hline 255 \\ + 151 \\ \hline 2601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4201 \\ \times 1728 \\ \hline 5929 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 9 \\ \hline 135 \end{array}$$

