

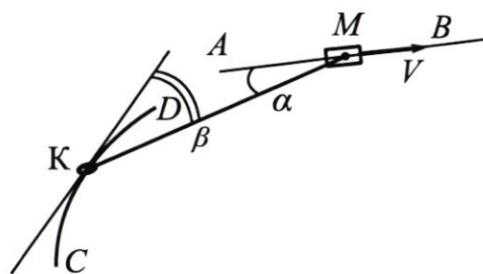
Олимпиада «Физтех» по физике, 1

Класс 11

Вариант 11-01

Бланк задания обязательно должен быть вложен в работу. Работы без в.

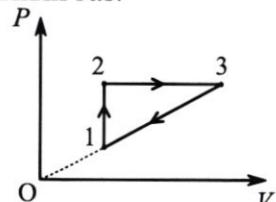
1. Муфту M двигают со скоростью $V = 68$ см/с по горизонтальной направляющей AB (см. рис.). Кольцо K массой $m = 0,1$ кг может двигаться без трения по проволоке CD в виде дуги окружности радиусом $R = 1,9$ м. Кольцо и муфта связаны легкой нитью длиной $l = 5R/3$. Система находится в одной горизонтальной плоскости. В некоторый момент нить составляет угол $\alpha (\cos \alpha = 15/17)$ с направлением движения муфты и угол $\beta (\cos \beta = 4/5)$ с направлением движения кольца.



- 1) Найти скорость кольца в этот момент.
- 2) Найти скорость кольца относительно муфты в этот момент.
- 3) Найти силу натяжения нити в этот момент.

2. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из изохоры, изобары и участка прямо пропорциональной зависимости давления P от объема V (см. рис.). Рабочее вещество – одноатомный идеальный газ.

- 1) Найти отношение молярных теплоемкостей на тех участках цикла, где происходило повышение температуры газа.
- 2) Найти в изобарном процессе отношение количества теплоты, полученной газом, к работе газа.
- 3) Найти предельно возможное максимальное значение КПД такого цикла.

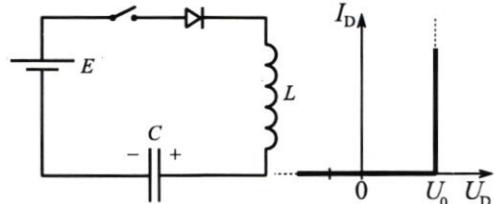


3. Обкладки конденсатора – круглые металлические сетки площадью S , расстояние между обкладками d ($d \ll \sqrt{S}$). Из точки, находящейся между обкладками на оси симметрии на расстоянии $0,25d$ от положительно заряженной обкладки, стартует с нулевой начальной скоростью положительно заряженная частица и через время T вылетает из конденсатора перпендикулярно обкладкам. Удельный заряд частицы $\frac{q}{m} = \gamma$.

- 1) Найдите скорость V_1 частицы при вылете из конденсатора.
- 2) Найдите величину Q заряда обкладок конденсатора.
- 3) С какой скоростью V_2 будет двигаться частица на бесконечно большом расстоянии от конденсатора?

При движении частицы электрическое поле, созданное зарядами конденсатора, считать неизменным, а электрическое поле внутри конденсатора вблизи оси симметрии считать однородным.

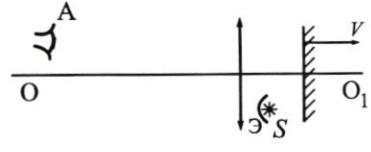
4. В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ разомкнут, ЭДС идеального источника $E = 9$ В, конденсатор емкостью $C = 40$ мкФ заряжен до напряжения $U_1 = 5$ В, индуктивность идеальной катушки $L = 0,1$ Гн. Вольтамперная характеристика диода дана на рисунке, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В. Ключ замыкают.



- 1) Найти скорость возрастания тока сразу после замыкания ключа.
- 2) Найти максимальный ток после замыкания ключа.
- 3) Найти установившееся напряжение U_2 на конденсаторе после замыкания ключа.

5. Оптическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием F , плоского зеркала и небольшого экрана \mathcal{E} , расположенного так, что свет от источника S может попасть на линзу только после отражения от зеркала (см. рис.). Зеркало расположено перпендикулярно главной оптической оси OO_1 линзы. Источник S находится на расстоянии $3F/4$ от оси OO_1 и на расстоянии $F/2$ от плоскости линзы. Линза и источник неподвижны, а зеркало движется со скоростью V вдоль оси OO_1 . В некоторый момент зеркало оказалось на расстоянии F от линзы.

- 1) На каком расстоянии от плоскости линзы наблюдатель А сможет увидеть в этот момент изображение источника в системе?
- 2) Под каким углом α к оси OO_1 движется изображение в этот момент? (Найти значение любой тригонометрической функции угла.)
- 3) Найти скорость изображения в этот момент.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3.

$$\left. \begin{array}{l} d, 0,25d \\ T, \gamma = \frac{q}{m} \\ V_1 - ? Q - ? V_2 - ? \end{array} \right\}$$

1) Заряд движется по прямой OO_1 m.k. На него действует сила $F = Eq$ в этом направлении (он находился вблизи)

2) $F = Eq = ma$ внутри
 $E = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$ — поле конденсатора

3) Кинематика: $\begin{cases} V_1 = aT \\ d = \frac{d}{4} + \frac{aT^2}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{3d}{4} = \frac{V_1 \cdot T}{2}$

$$V_1 = \frac{3d}{2T}$$

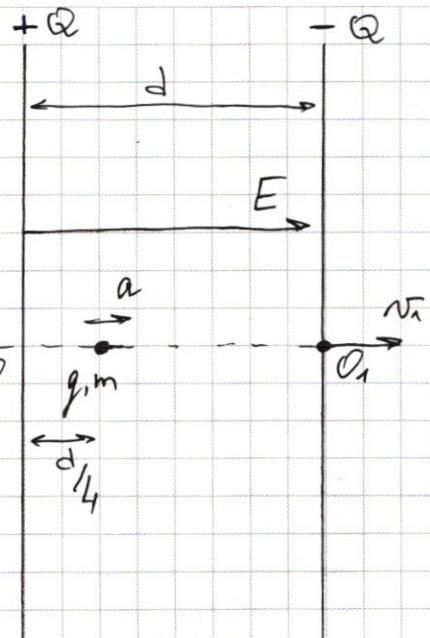
4) $\begin{cases} Eq = ma \\ a = \frac{3d}{2T^2} \end{cases} \rightarrow \frac{Q}{S\varepsilon_0} \cdot \gamma = \frac{3d}{2T^2} \rightarrow Q = \frac{3dS\varepsilon_0}{2T^2\gamma}$

5) Когда частица находится в точке O_1 , она имеет $E_k = \frac{mv_1^2}{2}$ и $E_n = q \cdot E$, где $E = Ed$ — напряженность левой пластины. После выхода из конденсатора частица перестает разгоняться

$$\text{заряд} \Rightarrow \frac{mv_1^2}{2} + Edq = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$v_1^2 + 2Ed\gamma = v_2^2$$

$$v_2^2 = \left(\frac{3d}{2T}\right)^2 + 2 \cdot \frac{Qd}{S\varepsilon_0} \gamma \cancel{\neq \frac{v_1^2}{2}}$$



$$2. \frac{3dS\epsilon_0}{2T^2 S\epsilon_0} + \cancel{\frac{d\gamma}{}} \frac{9d^2}{4T^2} = v_2^2$$

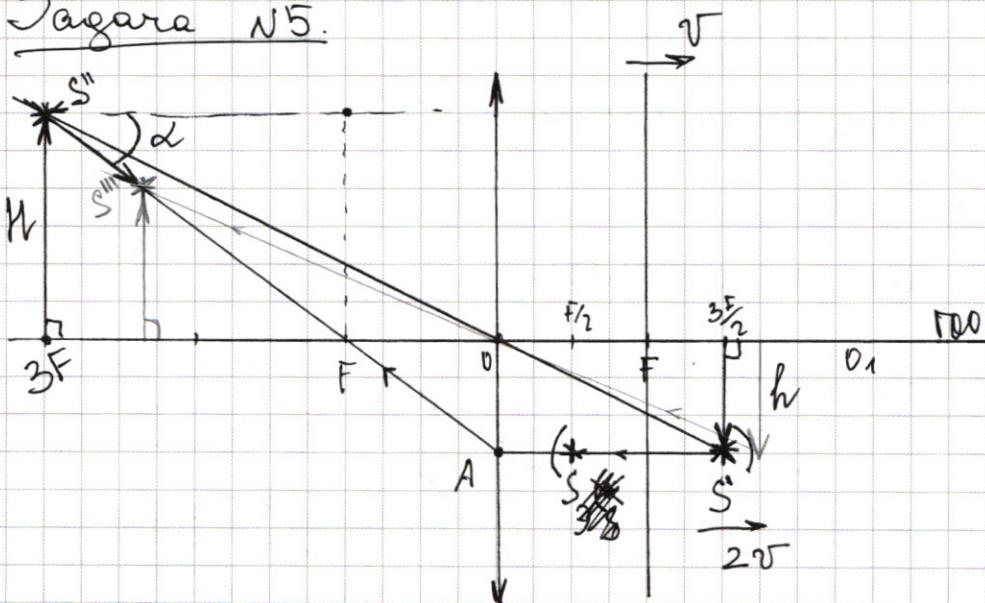
$$\frac{3d^2}{T^2} + \frac{9d^2}{4T^2} = v_2^2$$

$$v_2^2 = \frac{21d^2}{4T^2}$$

$$v_2 = \boxed{\frac{d\sqrt{21}}{2T}}$$

(демонстрируем: $\frac{3d}{2T} \rightarrow \frac{3dS\epsilon_0}{2T^2\gamma} \rightarrow \frac{d\sqrt{21}}{2T}$)

Задача №5.



1) Построим изображение предмета в зеркале, а затем в линзе. Тогда $d = \frac{F}{2} + \frac{F}{2} + \frac{F}{2} = \frac{3F}{2}$.

Тогда по 1-му приз $\frac{1}{F} = \frac{2}{3F} + \frac{1}{f} \rightarrow f = 3F$.

2) Заметим, что когда зеркало едет влево со скоростью v , S' едет влево со скоростью $2v$. Заметим, что изг, излучающий II-го гоо, всегда будет включать в себе тонкую - изобр. S' . Тогда S'' "едет" по прямой $S''A$. Т.к.

$$\frac{H}{h} = \Gamma = \frac{3F}{\frac{3F}{2}} = 2, H = \frac{3F}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3F}{2 \cdot 2F} = \frac{3}{4} //$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значим, $\alpha = \arctg \frac{3}{4}$.

3) Возьмем и рассмотрим проекцию на ось ГОО.

Из гр-ны линзы $\frac{f}{d} = \left(\frac{f}{d}\right)^2 = 4$, значит $V_x = 4\delta$

и находим случаи. Заметим, что V_x - проекция скорости на прямую, угол с которой α ,

значим $\frac{V_x}{V_{ном.}} = \cos\alpha$. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow$

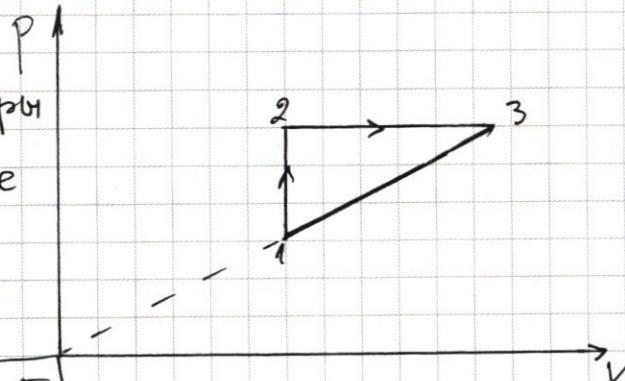
$$\rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \rightarrow V_{ном.} = \frac{\frac{4}{5}V}{\frac{4}{5}} =$$

$$= \boxed{5\sqrt{5}}$$

Ответ: 3F, $\arctg \frac{3}{4}$, $5\sqrt{5}$.

Задача №2.

1) Повышение температуры происходит на изобаре 2-3 и изотерме 1-2.



Теплоемкости мол

$$\text{значим: } \frac{C_p}{C_v} = \frac{5R \cdot 2}{2 \cdot 3R} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

$$2) \text{ На изобаре } Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2} \partial R(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2) \\ + p_2(V_3 - V_2) = \frac{3}{2} \partial R(T_3 - T_2) + \partial R(T_3 - T_2) = \frac{5}{2} \partial R(T_3 - T_2)$$

$$\text{Числова } \frac{Q_{23}}{A} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{3}, \frac{5}{2}.$$

Zagara №5.

1) Конусо движущееся
по окружности, значит по осо-
бенству направлено

но касательной. Проекции скорости не
могут равны т.к. она переставлена.

$$v_k \cdot \cos \beta = v \cdot \cos \alpha$$

$$v_k = \frac{68 \cdot 15 \cdot 5}{17 \cdot 5} = 75 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

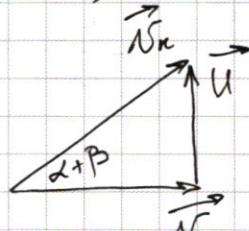
2) По закону изменения скорости, сумма проекций

на неподвижной, $\vec{u} = \vec{v}_k - \vec{v}$

$$|u| = \sqrt{68^2 + 75^2 - 2 \cdot 68 \cdot 75 \cdot \cos(\alpha + \beta)}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta =$$

$$= \frac{15}{17} \cdot \frac{4}{5} - \frac{8}{17} \cdot \frac{3}{5} = \frac{60 - 24}{17 \cdot 5} = \frac{36}{17 \cdot 5}$$



$$|u| = \sqrt{68^2 + 75^2 - 2 \cdot 68 \cdot 75 \cdot \frac{36}{17 \cdot 5}} \approx 78 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$3) \text{Ox: } T \cdot \cos(90 - \beta) + mg \cos(\alpha + \beta) = m \frac{v_k^2}{R}$$

$$T \cdot \sin \beta + mg \cos(\alpha + \beta) = m \frac{v_k^2}{R}$$

$$T = \frac{m v_k^2}{R} - mg \cos(\alpha + \beta)$$

$$T = \frac{0,1 \cdot 75^2}{17} - 0,1 \cdot 10 \cdot \frac{36}{17 \cdot 5} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.

1) Кирхгоф:

$$\mathcal{E} = U_{\text{диод}} + U_L + U_C$$

Когда только замк-

нули, заряд конденсатора C не изменился \rightarrow

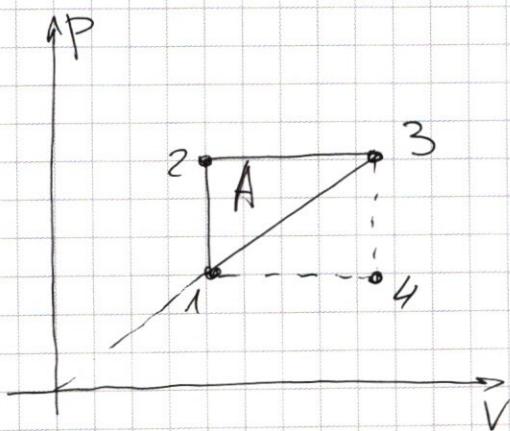
\rightarrow напряжение тоже.

$$\mathcal{E} = U_0 + L \dot{U} + U_1 \rightarrow \dot{U} = \frac{\mathcal{E} - U_0 - U_1}{L},$$

$$\dot{U} = \sqrt{30 \frac{A}{C}}.$$

$$2) U - \max \rightarrow \dot{U} = 0 \rightarrow \mathcal{E}_i = 0$$

Задача №2 (продолжение)



3) Заменим, что $U - \max$,
когда $\max A$. $A = A_{23} - A_{31} \rightarrow$
 $\rightarrow A_{31}$ как можно меньше.
 \rightarrow когда m. 1 и 4 лежат
на оси, $A_{31} - \min$, $A_{31} = A$,
т.к. 1234 - квадрат.

$$A = A_{23} - A$$

$$2A = A_{23}$$

$$\eta = 50\%$$

Задача 4 (продолжение)

2) $y - \max \rightarrow \dot{y} = 0 \rightarrow \ddot{c}_i = 0 \rightarrow$

$$E = U_0 + U_c$$

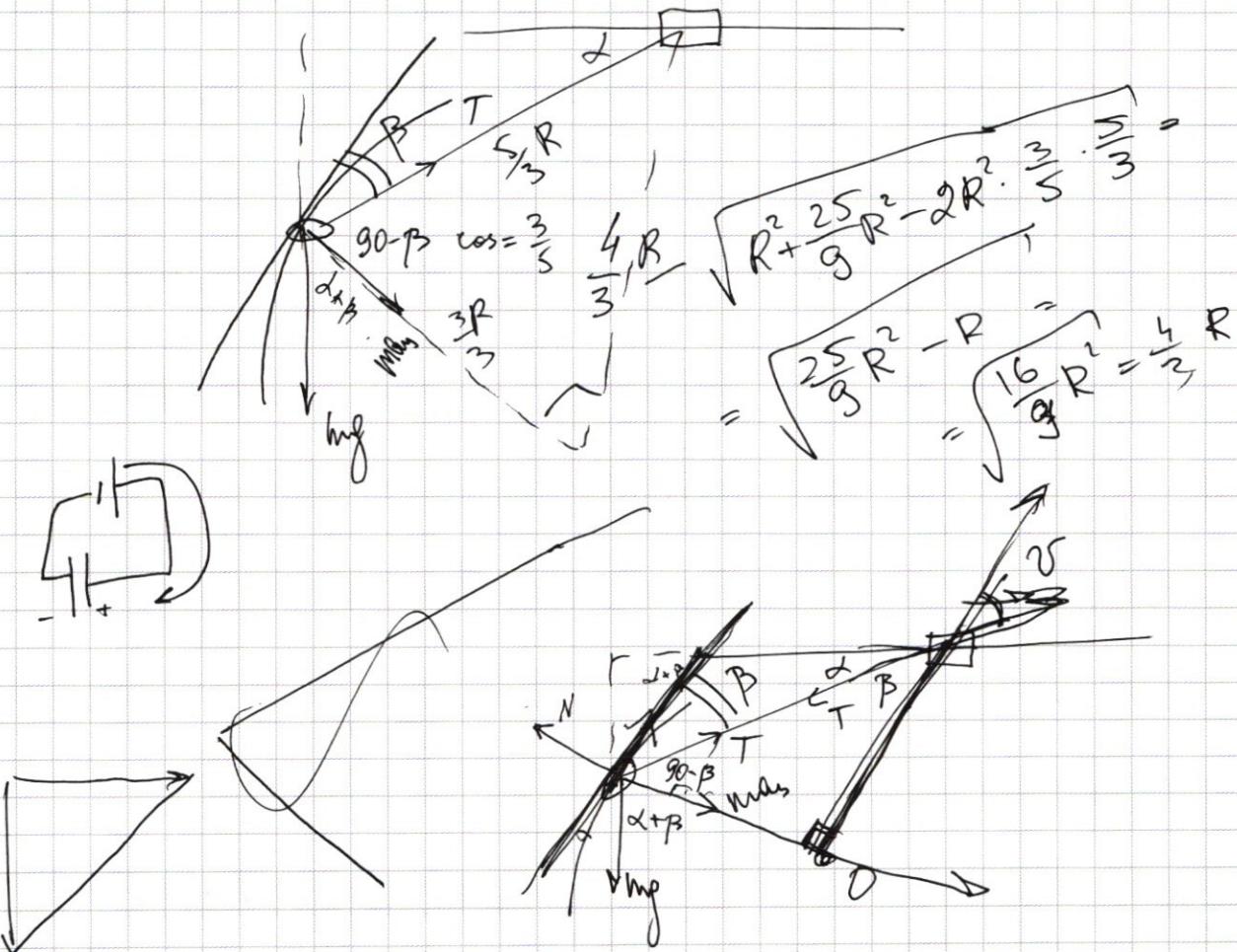
3) Yem. решения $\rightarrow y=0, \dot{y}=0$

$$E = U_0 + U_c$$

$$U_c = \boxed{8B}$$

(Линии: $30 \frac{A}{C}, \dots, 8B$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\mathcal{E} = U_0 + U_0 + U_c$$

$$q \dot{y} = \frac{30}{0,1} = 300 \text{ A}$$

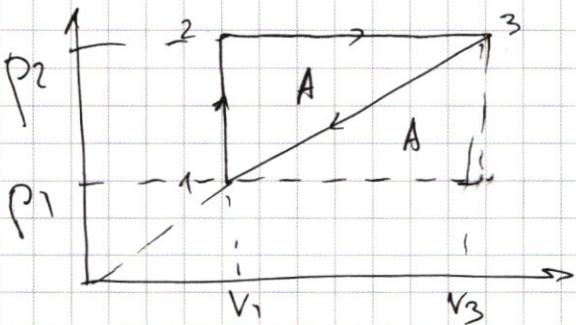
$$U_2 = \mathcal{E} - U_0$$

$$mV^2$$

max min

$$y=0$$

$$\mathcal{E} = U_0$$



$$12: A_{12} = 0, Q_{12}$$

$$23: A_{23} = \frac{2}{5} Q_{23} = P_2 \Delta V_{23}$$

$$Q_{31}: A_{31} = \frac{(P_2 + P_1)(V_3 - V_1)}{2}$$

$$\Delta Q_{31} = \frac{3}{2} \Delta R(T_1 - T_3)$$

$$\underline{P_2 V_3 - P_2 V_1 + P_1 V_3 - P_1 V_1} (V_3 - V_1) \cdot P_2 = \frac{2}{5} Q_{23}$$

$$\frac{2}{5} Q_{23}$$

$$B_3 K_2 \sim P_3 V_1 + P_1 V_3 - P_2 V_2$$

$$\underbrace{P_1 V_3 - P_1 V_1}_{P_2 V_1 - P_1 V_1} =$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{V_3}$$

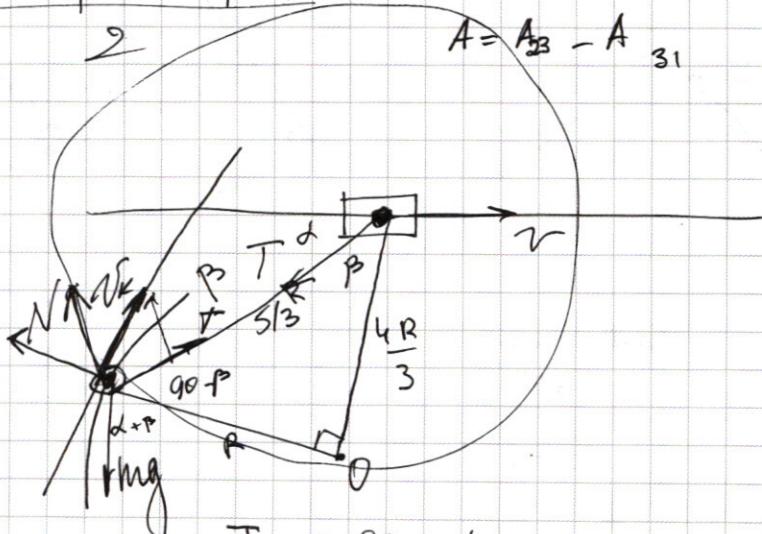
$$V_3 P_2 - P_2 V_2$$

$$\underline{\frac{2}{5} Q_{23} + P_1 V_3 - P_1 V_1}$$

$$\frac{3}{2} P_1 V_1 - \frac{3}{2} P_2 V_3$$

$$A = A_{23} - A_{31}$$

75



75: 19
65 S

S₁

75 S

75 S

75 S

75 S

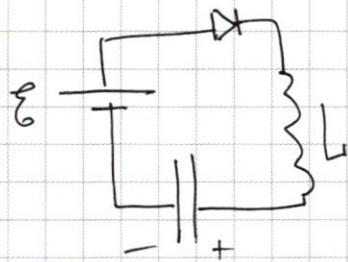
75 S

T = max 6

$$72: T \approx \frac{4}{3} \cdot S =$$

$$\frac{4}{3} \Delta - 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\mathcal{E} = U_D + U_L + U_C$$

$$S = 1 + S + U_L \quad \eta =$$

~~$$Q_{12} + Q_{23} -$$~~

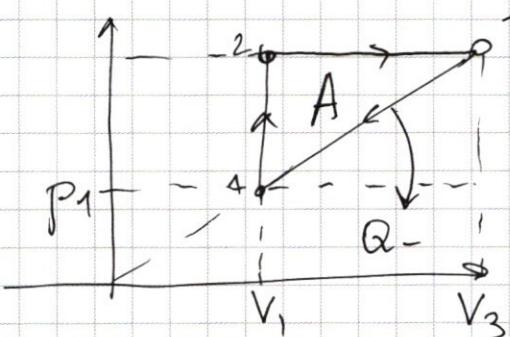
~~$$- A - Q_{12} -$$~~

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = \frac{A}{Q_+}$$

$$1 = Q_- + A = Q_+$$

~~$$J = R(T_1 - T_2 - \frac{3}{2}T_1 + \frac{5}{2}T_3)$$~~

$$Q_+ = \frac{3}{2}JR(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}JR(T_3 - T_2)$$



$$P_1 V_3 = P_2 V_1$$

$$Q_- = \Delta U_{31} + A_{31}$$

$$A_{31} = A + P_1(V_3 - V_1) =$$

$$= A + P_2 V_1 - P_1 V_1 =$$

$$= A + \underbrace{JR(T_2 - T_1)}_{Q_{12}}$$

$$A + JR(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}JR(T_3 - T_1) = A_{31} = A + Q_{12}$$

$$= \frac{3}{2}JR(T_2 - T_1) + \Delta U_{31} = \frac{3}{2}JR(T_3 - T_1) + \frac{3}{2}JR(T_3 - T_2)$$

$$\Delta U_{31} = \Delta U_{12} - \Delta U_{23}$$

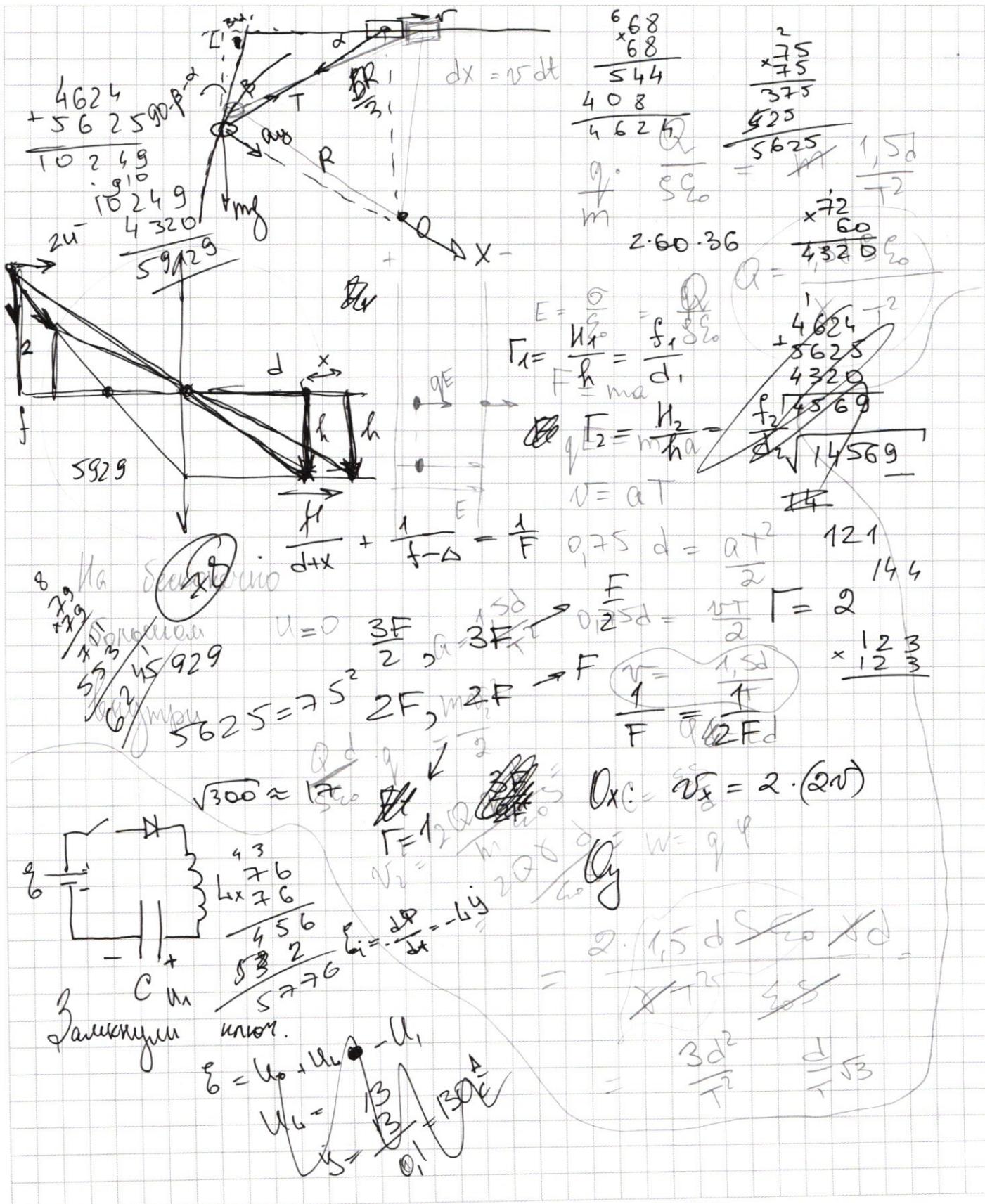
$$\frac{3}{2}JR(T_3 - T_2)$$

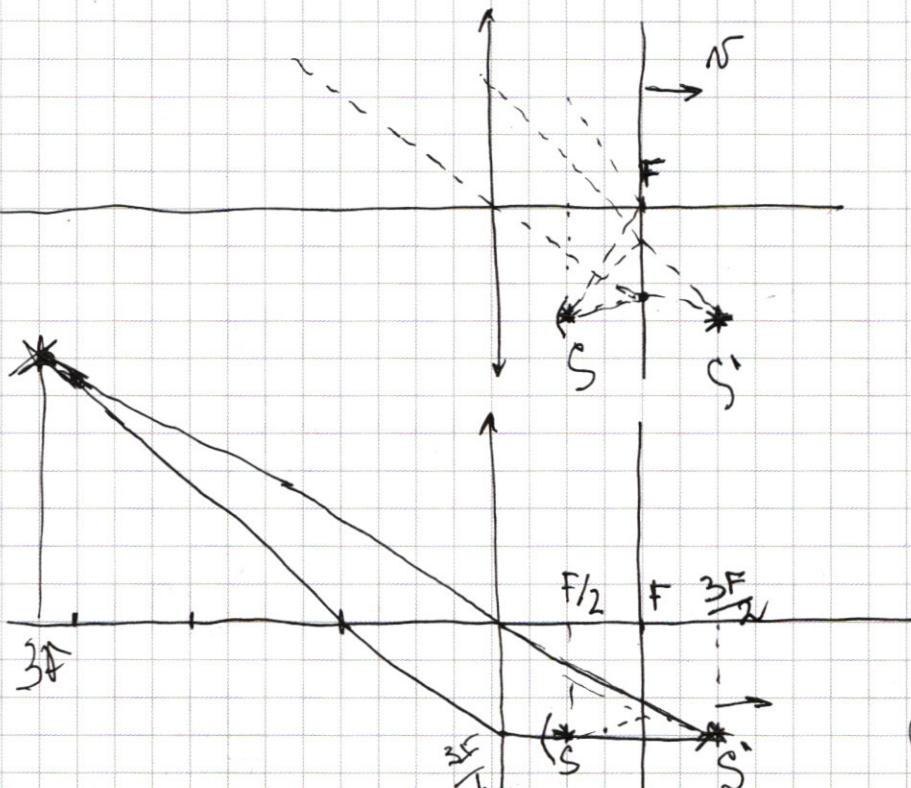
$$A = \frac{3}{2}JR(T_3 - T_2) - \frac{3}{2}JR(T_3 - T_1) + \frac{3}{2}JR(T_3 - T_2) + \frac{3}{2}JR(T_1 - T_2)$$

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № _____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





В п.д. зеркале

$$N_S = -V$$

$$V_S = V$$

$$\frac{2}{3F} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{3F}$$

$$f = 3F \quad \Gamma = \frac{3F}{\frac{3F}{2}} = 2 \rightarrow \frac{H}{h} = 2 \rightarrow h = \frac{3F}{2}$$

[Соотношение проекции на начальную прямую]

$$N_K \cdot \cos \beta = N_{\text{коэф}}$$

$$N_K = 68 \frac{m}{c} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{17} = 45 \frac{m}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{289-225}{289}} = \frac{4}{5}$$

$$= \sqrt{\frac{64}{289}} \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{17}$$

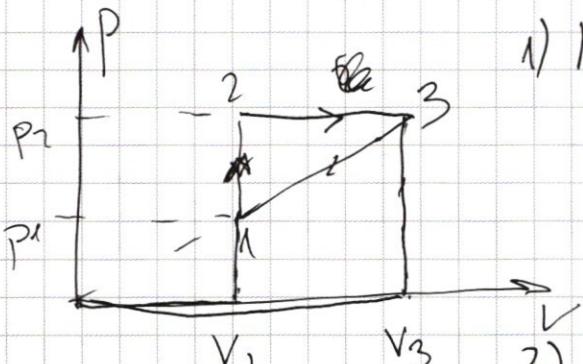
$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{15}{17} \cdot \frac{4}{5} - \frac{8}{17} \cdot \frac{3}{5} = \frac{60-24}{17 \cdot 5} = 36$$

$$N_K = V_{\text{норм.}} + V_{\mu}$$

$$V_{\text{норм.}}^2 = V_K^2 + V_{\mu}^2 - 2V_K V_{\mu} \cos(\alpha + \beta)$$

$$68^2 + 75^2 - 2 \cdot 68 \cdot 75 \cdot \frac{36}{17 \cdot 5} = \\ = 68^2 + 75^2 - 2 \cdot 4 \cdot 36 \cdot 25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$Q_+ = Q_{12} =$$

$$= \frac{3}{2} \Delta R (T_2 - T_1)$$

$$Q_f = Q_{23} =$$

$$= \frac{5}{2} \Delta R (T_3 - T_2)$$

$$Q_- = Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31} =$$

$$= \frac{3}{2} \Delta R (T_1 - T_3) + \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot (V_3 - V_1)$$

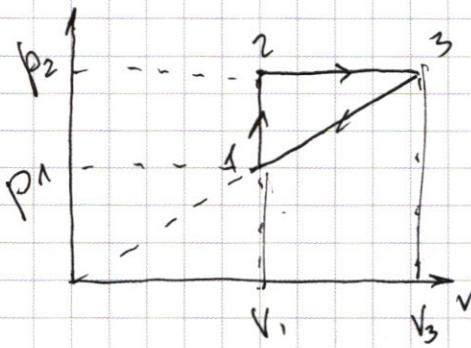
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{V_3}$$

$$\frac{3}{2} \Delta R (T_1 - T_3) + \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot \frac{V_1}{V_3} (V_3 - V_1) = \cancel{P_1 V_3 + P_2 V_1} - \cancel{\frac{P_1 P_2}{V_3}}$$

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{1}{2} (V_3 - V_1) (\cancel{P_2} - P_1)$$

$$\frac{\frac{3}{2} (P_2 V_1 - P_1 V_1)}{\cancel{\frac{3}{2} (P_2 V_1 - P_1 V_1)}} + \frac{5}{2} (P_2 V_3 - P_1 V_1)$$

$$\max \eta \rightarrow \max \frac{A}{Q_+} = \cancel{\frac{A}{Q_+}}$$



$$\eta_{\text{max}} = \frac{A}{Q_+} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (V_3 - V_1) (P_2 - P_1)}{Q_{12} + Q_{23}} =$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{V_3}$$

$$= \frac{1}{2} (V_3 P_2 - V_1 P_2 + P_1 V_1 - P_1 V_3) =$$

$$\frac{3}{2} (P_2 V_1 - P_1 V_1) + \frac{5}{2} (P_2 V_3 - P_2 V_1) \quad P_1 = P_2 \frac{V_1}{V_3}$$

$$= \frac{1}{2} (JRT_3 - JRT_2 + JRT_1 - P_1 V_3) =$$

~~$$\frac{3}{2} V_1 (JRT_3 - P_1 V_3)$$~~

$$\frac{3}{2} JR(T_3 - T_1) + \frac{5}{2} JR(T_3 - T_2)$$

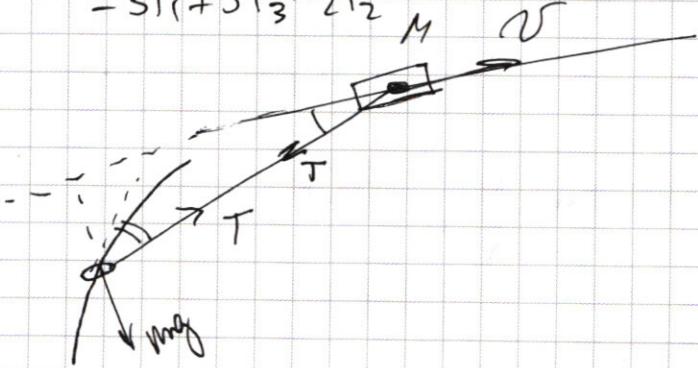
$$= \frac{JR(T_3 - T_2 + T_1) - P_1 V_3}{3JR(T_2 - T_1) + 5JR(T_3 - T_2)} =$$

$$= \frac{JR(T_3 - T_2 + T_1) - P_1 V_1}{3JR(T_2 - T_1) + 5JR(T_3 - T_2)} = \frac{JR(T_3 - T_2 + T_1) - JRT_2}{3JR(T_2 - T_1) + 5JR(T_3 - T_2)} =$$

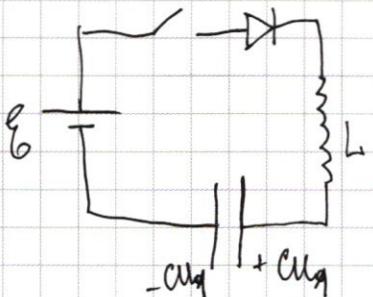
$$= \frac{T_3 - T_2 + T_1 - T_2}{3T_2 - 3T_1 + 5T_3 - 5T_2} = \frac{T_1 + T_3 - 2T_2}{-3T_1 + 5T_3 - 2T_2} =$$

$$= \frac{-3T_1 + 5T_3 - 2T_2 + 4T_1 + 4T_3}{-3T_1 + 5T_3 - 2T_2} =$$

$$= 1 + \frac{4T_1 - 4T_3}{-3T_1 + 5T_3 - 2T_2}$$



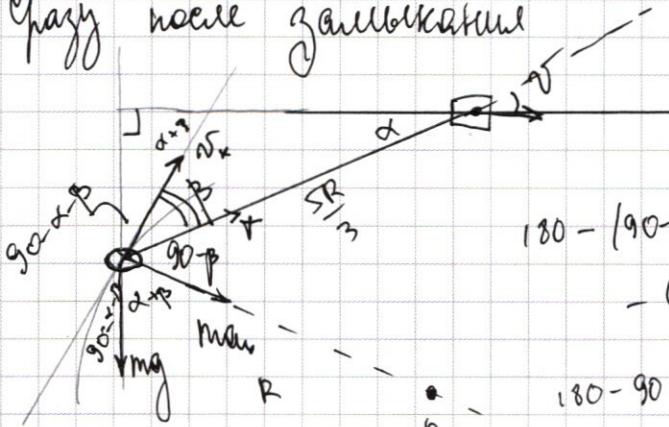
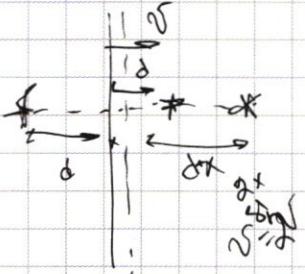
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$E = U_D + U_L - U_C$$

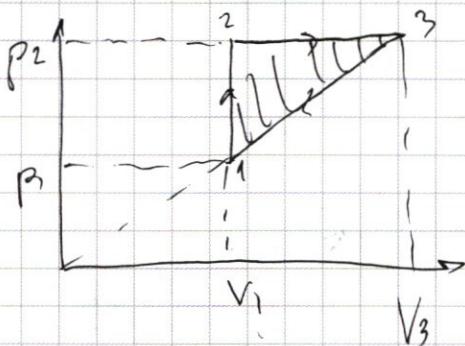
$$U_D = \begin{bmatrix} 0 \\ U_0 \end{bmatrix}$$

Сразу после замыкания



$$180 - (90 - \alpha - \beta) - \beta - (\alpha + \beta) \lambda = 0$$

$$\begin{aligned} mg \cdot \cos(\alpha + \beta) + f \cos(90 - \beta) - \\ = m \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$



$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{out}}}$$

$$Q_{\text{out}} = \frac{3}{2} \partial R \cancel{(T_2 - T_1)} + \frac{5}{2} \partial R (T_3 - T_2)$$

$$\begin{aligned} p_2 V_3 - p_2 V_1 = \\ = \partial R T_3 - \partial R T_1 \end{aligned}$$

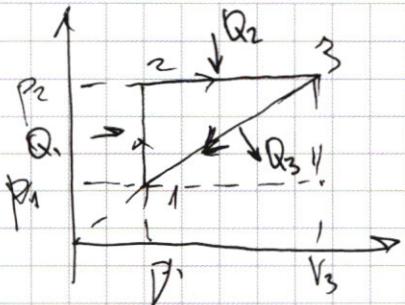
$$T_3 > T_2 > T_1$$

$$p_2 V_1 - p_1 V_1$$

$$A = (V_3 - V_1)$$

$$\begin{aligned} A = \left(\frac{1}{2} \partial R (T_3 - T_2) \right) \cdot \cancel{\left(\frac{1}{2} \partial R (T_2 - T_1) \right)} = \\ = \frac{1}{2} (\partial R)^2 (T_3 - T_2)(T_2 - T_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \partial R (T_2 - T_1) + \frac{5}{2} \partial R (T_3 - T_2) \\ = \cancel{\frac{3}{2} \partial R T} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 A &= (V_3 - V_1) (P_2 - P_1) = \\
 &= \cancel{\partial R T_3} - \cancel{\partial R T_2} - P_1 V_3 + \cancel{\partial R T_1} = \\
 &= \frac{\partial R}{2} (T_1 + T_3 - 2T_2)
 \end{aligned}$$

$$P_1 V_3 = P_2 V_1 = \partial R T_2$$

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{\partial R (T_1 + T_3 - 2T_2)}{\partial R (5T_3 - 3T_1 - 2T_2)} - \max_m
 \end{aligned}$$

$$T_1 + T_3 - 2T_2 = 5mT_3 - 3mT_1 - 3mT_2$$

$$(1+3m)T_1 + (1-5m)T_3 + (3m-2)T_2 = 0$$

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \downarrow \\
 \eta = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{Q_1 + Q_2} = 1 - \sqrt{\frac{Q_3}{Q_1 + Q_2}} = \frac{A}{Q + Q_2}
 \end{array}$$

$$A_{23} = \frac{2}{3} Q_2 \quad \frac{2}{3}$$

$$\Gamma - 2 \Rightarrow \lambda = 4 \quad A_{31} = \cancel{(P_3 + P_1) \cdot (V_3 - V_1)}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram showing a lens-shaped region with focal length } f \text{ and distance } d. \\
 \text{The lens equation is } \frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{x} \text{ where } x \text{ is the image distance.} \\
 \text{The magnification is } m = \frac{x}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d}.
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f} &= \frac{1}{d} + \frac{1}{x} \\
 F &= \frac{fd}{d+f} \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d} \\
 (fd)' &= f'd + d'f \\
 \frac{d'}{f^2} &= \frac{f^2}{f^2} d + d' f^2 + d^2 f' + d' f^2 + d' f d - f f d - (f' d + d' f)(f+d) - f d (f' + d') \\
 (f^2 + d)^2 &= 0 \quad (f+d)^2
 \end{aligned}$$