

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в |
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Прочув-е ~~чисел~~ цифр ~~8-ми~~ ^{знак.} числа - 3345
 $3345 = 3^3 \cdot 5^2$

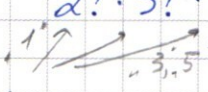
Число 3345 можно представить как пр-е 8-ми цифр:

(1) $3345 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

(2) $3345 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

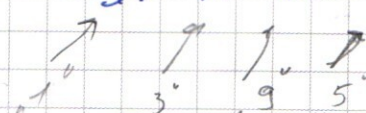
Т.е. в (1) случае число должно состоять из ~~двух~~ ^{двух} "1", трёх "3", трёх "5".
 Кол-во этих 8-ми значковых чисел будет определяться как кол-во перестановок с повторениями восьми указанных цифр.

(1) $\bar{P} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$


 повторения

Аналогично в (2) случае: число состоит из трёх "1", одной "3", одной "9", трёх "5" $\Rightarrow$
 кол-во перестановок этих цифр с повторениями

(2) $\bar{P} = \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1120$



Общее кол-во 8-ми значковых чисел, пр-е цифр которого равно 3345: $560 + 1120 = 1680$

52

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) + (\sin 3x - \sin 11x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} + 2 \sin \frac{3x-11x}{2} \cos \frac{3x+11x}{2} = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin(-4x) \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \left(\sin \frac{\pi}{4} \sin 7x + \cos \frac{\pi}{4} \cos 7x \right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = \cos 14x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 14x \right)$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) (\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cdot 2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{8} + \frac{3}{2}x = 0 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{8} + \frac{11}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{11}{2}x = \frac{5\pi}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{4}{11}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

53

$$\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^{2 \lg xy}$$

ОДЗ:
 $x > 0$
 $y > 0$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

Рассмотрим второе ур-е:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) - y^2 - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$((x-y)^2 - 4y^2) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-y-2y)(x-y+2y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x + y - 4 = 0$$

Рассмотрим первое ур-е:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^{2 \lg xy}$$

Классифицируем обе части

$$\frac{y^5 \lg x}{x^5 \lg x} = \frac{y^{2 \lg xy}}{y^{2 \lg xy}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^5 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x} \Rightarrow y^{5 \lg x - 3 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$\frac{y^3 \lg x}{x^3 \lg x} = (y^2)^{\lg y} \cdot x^{\lg x} \Rightarrow \left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg y}$$

53 (проверка)

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg y}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg y}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg y}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\lg\left(\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}\right) = \lg(y^{2 \lg xy})$$

$$\lg x \cdot \lg \frac{y^5}{x} = 2 \lg xy \cdot \lg y$$

$$\lg x (\lg y^5 - \lg x) = 2 \lg xy \cdot \lg y$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = (2 \lg x + 2 \lg y) \lg y$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$3 \lg x \lg y - \lg^2 x - 2 \lg^2 y = 0$$

$$2 \lg x \lg y - 2 \lg^2 y + \lg x \lg y - \lg^2 x = 0$$

$$2 \lg y (\lg x - \lg y) + \lg x (\lg y - \lg x) = 0$$

$$(2 \lg y - \lg x) (\lg x - \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} 2 \lg y - \lg x = 0 \\ \lg x - \lg y = 0 \end{cases}$$

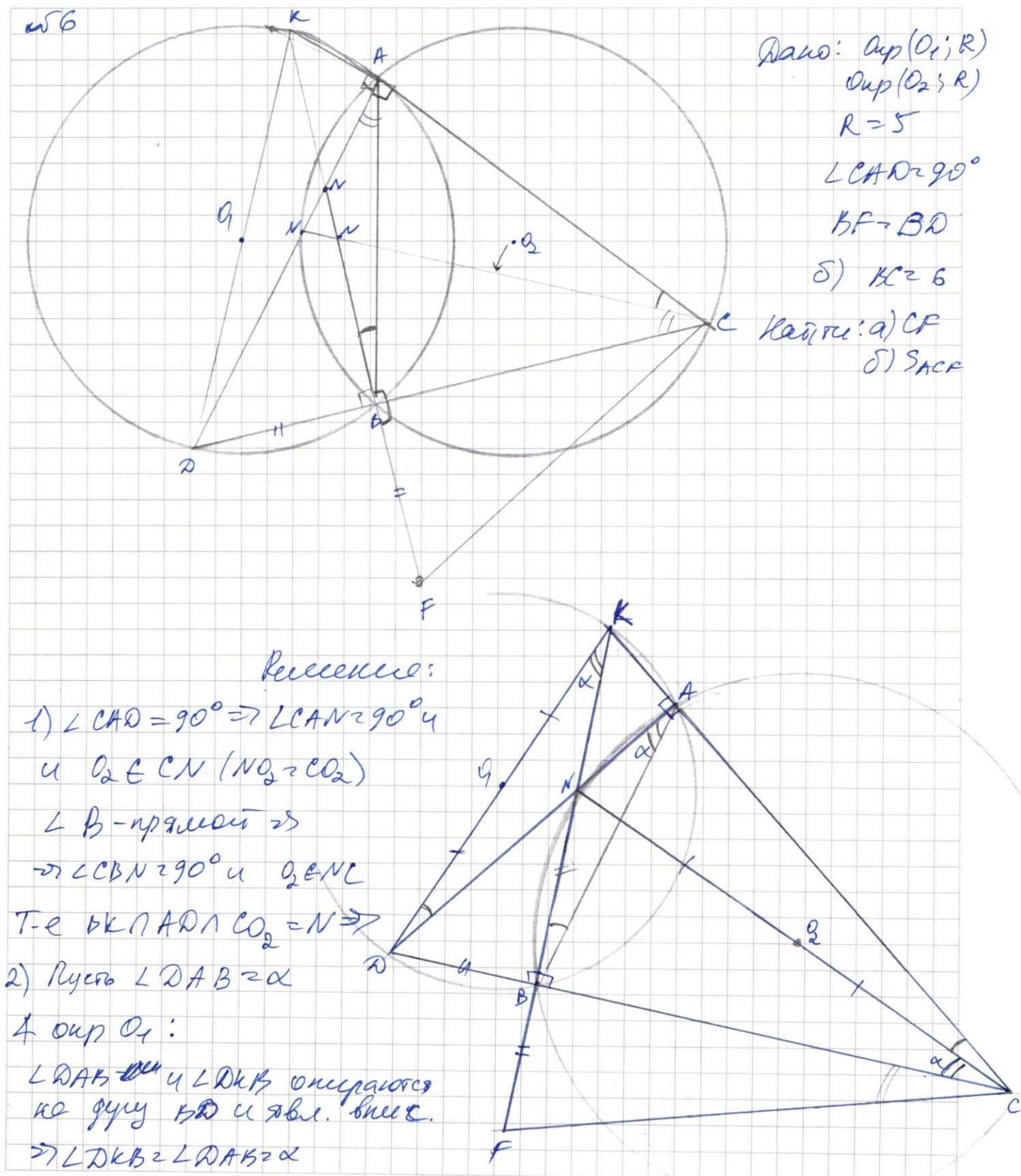
$$\begin{cases} \lg y^2 = \lg x \\ \lg x = \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \\ y^2 = x \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^2 = x \\ x = y \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№55

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

Рассмотрим 1 ур-е:

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ y-3-x + y-3+x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \\ y-3-x - y+3-x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ -y+3+x + y-3+x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \\ -y+3+x - y+3-x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 ур-е:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases} \Rightarrow \text{круги:} \\ \text{окружность с центром } O_1(4;3), r = \sqrt{a}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \leq 0 \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = a \end{cases} \Rightarrow \text{окр } O_2(4;-3), r = \sqrt{a}$$

$$\begin{cases} x < 0, y \geq 0 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases} \Rightarrow \text{окр } O_3(-4;3), r = \sqrt{a}$$

$$\begin{cases} x < 0, y < 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = a \end{cases} \Rightarrow \text{окр } O_4(-4;-3), r = \sqrt{a}$$

56 (продолжение)

2) 4 окр O_2 : $\angle DAB$ и $\angle NCB$ опираются на BN и явл. вписк $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle NCB = \alpha$

3) 4 $\triangle KNC$ - прямоугол: $BC = CN \cos \alpha = 2R \cdot \cos \alpha$.

4 $\triangle KBD$: $BD = KD \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \sin \alpha$.

4) 4 $\triangle CFB$ - прямоугол: по т. Пифагора:

$$CF^2 = BF^2 + BC^2 = BD^2 + BC^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha =$$
$$= 4R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{CF = 2R = 10}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin \alpha = \frac{3}{5} \end{array}}$$

6) $\boxed{BC = 6} \Rightarrow BC = 2R \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\cos \alpha = \frac{BC}{2R}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

5) $CF = 2R \Rightarrow \triangle KBD = \triangle CFB \Rightarrow \angle BCF = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 4 $\triangle NBC$ и $\triangle BCF$: BC - общ; $NC = CF$; $\angle NCB = \angle BCF \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle NBC = \triangle BCF \Rightarrow NB = BF$

6) 4 $\triangle KDN$: $BD = NB$; 4 прямоугол $\Rightarrow \angle DNB = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KNA = 45^\circ$ (вертикальные) $\Rightarrow \angle ANB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

7) 4 $\triangle ANB$: $\angle NAB + \angle NAB = 180^\circ \Rightarrow \angle ANB + \angle ACB = 180^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ACB = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

8) 4 $\triangle ACN$: $AC = CN \cdot \cos(\angle NCA) = 2R \cdot \cos(45^\circ - \alpha)$

$$\angle NCA = \angle ACB - \alpha = 45^\circ - \alpha$$

$$9) S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(\angle ACF) = \frac{1}{2} \cdot 2R \cos(45^\circ - \alpha) \cdot 2R \cdot \sin(45^\circ + \alpha)$$

$$\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = 45^\circ + \alpha$$

$$S_{ACF} = 2R^2 \cdot \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \sin(90^\circ - 45^\circ + \alpha) =$$
$$= 2R^2 \sin^2(45^\circ + \alpha)$$

$$\sin^2(45^\circ + \alpha) = (\sin(45^\circ + \alpha))^2 = \left(\sin 45^\circ \cos \alpha + \sin \alpha \cos 45^\circ \right)^2 = \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$S_{ACF} = 2R^2 \cdot \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = R^2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 25 \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 24$$

Ответ: $CF = 10$; $S_{ACF} = 24$

☐ черновик

☒ чистовик

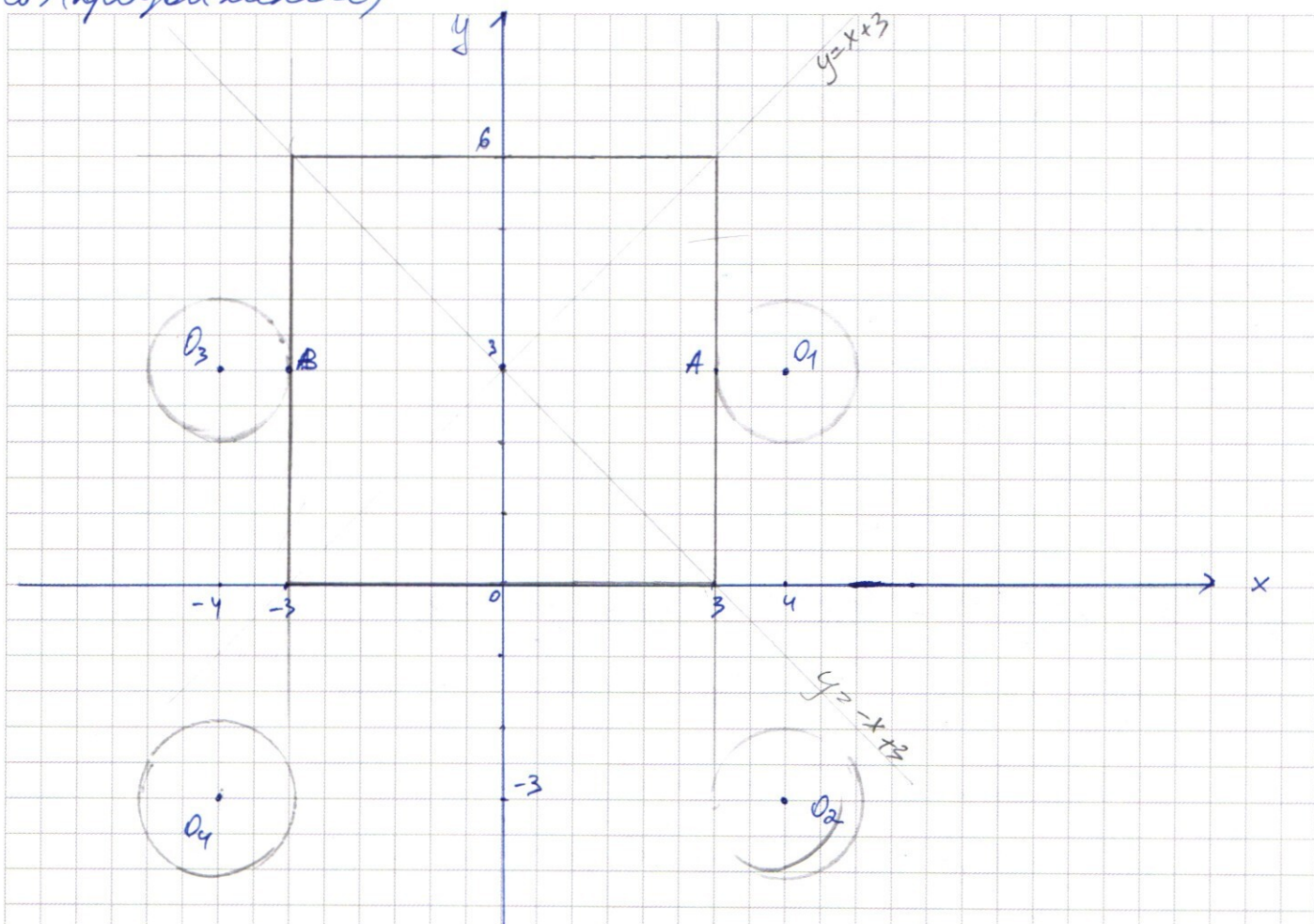
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

25 (продолжение)



- 1) $a \geq 0$ $\Rightarrow$ все окр. вырождаются в точку $\Rightarrow$ решений нет
- 2) 2 решения будет когда окр. O_1 и O_2 будут касаться квадрата в точках A и B соответственно $\Rightarrow A = 4 - 3 = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a \geq 1$

~~3)~~

Ответ: $a \geq 1$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x$$

$$x \geq 1$$

$$2 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{64} - 1$$

$$2(1 + 3 \cdot 2^{64}) < y \leq 69 + 2^{64}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\lg\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = \lg y^{2 \lg xy}$$

$$\lg x \cdot \lg \frac{y}{x} = 2 \lg xy \cdot \lg y$$

$$\lg x \cdot (\lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$5 \lg y \lg x - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$3 \lg y \lg x = \lg^2 x + 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg y \lg x - 2 \lg^2 y + \lg y \lg x - \lg^2 x =$$

$$= 2 \lg y (\lg x - \lg y),$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$16SP = SP + 2R$$

$$15SP = 2R$$

$$R_1 = 4R^2 + 12R^2 = 16R^2$$

$$SP = \frac{2R^2 \pm 4R}{3} =$$

$$4SP^2 = SP^2 + 4RSP + 4R^2$$

$$3SP^2 - 4R \cdot SP - 4R^2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0.$$

$$(x-y)^2 - 4y^2 - 4(x-3y) = 0.$$

$$(x-y-2y)(x-y+2y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x-y+2y) - 4(x-3y) = 0.$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0.$$

$$x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg(3y \cdot y)}$$

$$\frac{y^{5\lg 3y}}{3y^{\lg 3y}} = y^{2\lg 3y^2}$$

$$y^{5\lg 3y} = 3y^{\lg 3y + 2\lg 3y^2} = 3y^{3\lg 3y + 2\lg y}$$

$$y^{5\lg 3y - 3\lg 3y + 2\lg y} = 3$$

$$y^{2\lg 3y - 2\lg y} = 3$$

$$y^{2\lg 3} = 3$$

$$2\lg 3 = 3 \lg y \Rightarrow \lg y = \frac{2\lg 3}{3}$$

$$x = 4 - y$$

$$y^{\lg 3y}$$

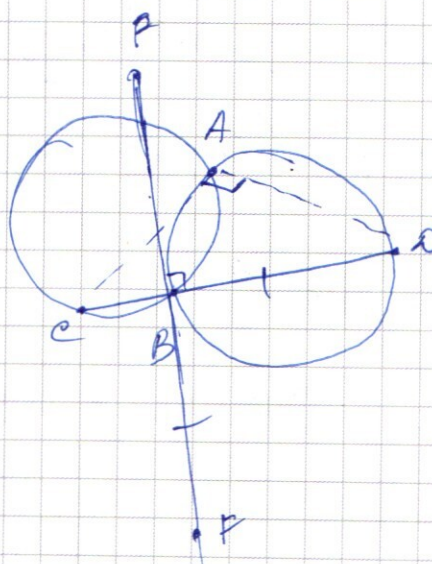
$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2(\lg x + \lg y)}$$

$$y^{5\lg x} = x^{\lg x} (y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y})$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}} = x^{\lg x}$$

$$y^{5\lg x - 2\lg x - 2\lg y} = x^{\lg x}$$

$$\frac{y^{3\lg x}}{y^{2\lg y}} = x^{\lg x}$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x = ~~2 \cos~~ -2 \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} = -2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin \frac{3x-11x}{2} \cos \frac{3x+11x}{2} = -2 \sin 4x \cos 7x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) \right)$$

$$\sin 7x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos 7x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = \cos 14x.$$

$$\cos(14x + \frac{\pi}{4} + 7x) + \cos(14x - \frac{\pi}{4} - 7x)$$

$$\cos 14x = \cos(7(1x + 3x))$$

$$\cos 14x = \cos 2(7x) = \cos \sin\left(\frac{\pi}{2} + 14x\right) = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = \cos 14x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$- \sin 4x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 14x\right) = \cos 14x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$- \sin 4x \cdot \cos 14x = \cos 14x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$\cos 14x (\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sin 4x) = 0.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\cos 14x = \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33355571 \\ 39555111 \end{array}$$

$$P_n = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$$

$$P_n = \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!}$$

$$\frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560 \cdot 2 = 1120$$

$$\sin 3x - \cos 3x = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$$

$$\cos 11x - \sin 11x = \cos 4x$$

$$\cos 4x \cos 11x - \sin 4x \sin 11x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 11x\right)$$

$$\cos 11x - \cos 3x = 2 \cos$$

$$-2 \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} =$$

$$= -2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin 3x - \sin 11x = -2 \sin 4x \cos 4x$$

$$-1/2 \sin 7x \sin 4x + \sin 4x \cos 7x$$

$$-2 \sin 4x / \sin 7x + \cos 7x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \frac{1}{2} / \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = 2 \cos 14x$$

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x = \cos 14x.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x.$$

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 11x + 3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 11x + 3x + \frac{\pi}{4}}{2} = \cos 14x.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 11x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \cos 14x.$$

$$-2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 11x + \frac{\pi}{4} + 3x}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 11x - \frac{\pi}{4} - 3x}{2} = \cos 14x.$$

$$-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 14x\right) \sin 4x = \cos 14x.$$

$$\cos 14x = \cos(11x + 3x) = \cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x.$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x$$

$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x + \sin 11x (\sqrt{2} \sin 3x - 1) + \sin 3x.$$

$$\cos 11x - \sin 11x$$

$$\sqrt{2} \cos$$

$$-2 \sin 4x \cos\left(\frac{\pi}{4} - 14x\right) = \cos 14x.$$

x > 0

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x + 2 \lg y} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{y^{2 \lg x}} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$\frac{y^{3 \lg x}}{y^{2 \lg y}} = x^{\lg x}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y$$

$$(x-y)^2 - 4(y^2 + x - 3y) = 0$$

$$(x-y)^2 - 4y^2 =$$

$$= (x+y)(x-y-2y)(x-y+2y)$$