

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$, 0 не может присутствовать в нашей числе.
Цифры, которая делится на 5 единичная, это и есть 5, следовательно в числе делится присутствовать равно 4
5-ки. Цифры, делющиеся на 3 две, это 3 и 9, тогда в нашей числе делится либо одна 3 и одна 9, либо три 3. Итого имеем два возможных набора цифр 55559311, 55553331

$$P(4, 1, 1, 2) = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 20 \cdot 42 = 840$$

$$P(4, 3, 1) = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 280$$

$$\text{Итого } 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 3x + \sin 7x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ \sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x = 0 & (2) \end{cases}$$

1) $\cos 5x = \sin 5x$, заметим что $\cos 5x = 0$ не является решением уравнения, тогда поделим на $\cos 5x$

$$\operatorname{tg} 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 2x$$

$$\begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi n \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

~3

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x}{y^2} \right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y &= 0 \quad (2) \end{aligned} \right.$$

$$2) x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решить уравнение как квадратное относительно x .

$$D = 16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{-4 - y \pm (3y - 4)}{2}$$

$$x_1 = y - 4 \quad x_2 = -2y$$

$$1) \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

Заметим, что $y > 0$, $x < 0$, тогда обе части уравнения положительны и мы можем логарифмировать.

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg y \cdot \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) = (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x)$$

$$\lg y (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg y$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

Пусть $\lg(-x) = u$, $\lg y = v$

$$u^2 - 3uv + 2v^2 = 0$$

Решим уравнение как квадратное относительно u

$$D = 9v^2 - 8v^2 = v^2$$

$$u = \frac{30 \pm 10}{2}$$

$$\begin{cases} u = 20 \\ u = 10 \end{cases} \begin{cases} \lg(1-x) = 2 \lg y \\ \lg(1-x) = \lg y \end{cases} \begin{cases} -x = y^2 \\ -x = y \end{cases}$$

Теперь возвращаемся к системе

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ x = -2y \\ -x = y^2 \\ -x = y \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \begin{cases} y - 4 = -y^2 \\ y - 4 = -y \\ -2y = -y^2 \\ -2y = -y \\ x \end{cases} \begin{cases} y - 4 = -y^2 \\ x = y - 4 \\ y - 4 = -y \\ x = y - 4 \\ -2y = -y^2 \\ x = -2y \\ -2y = -y \\ x = -2y \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \\ y = 2 \\ x = -2 \\ y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right), (-2; 2), (-4; 2)$

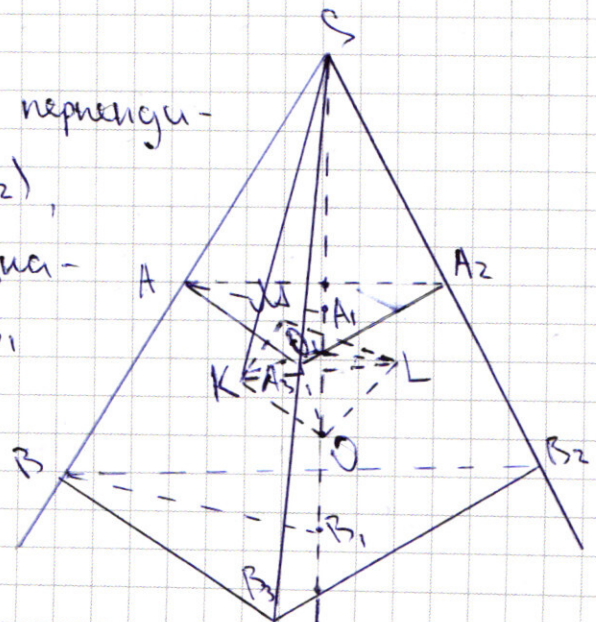
~4

Пусть α — касательная сфера и m -ей перпендикулярных SO A_1 и B_1 , $(AA_1A_2) \parallel (BB_1B_2)$,

AA_1 и BB_1 лежат в одной m -ой, значит $AA_1 \parallel BB_1$, тогда $\triangle SAA_1 \sim \triangle SBB_1$

по 2-ым углам $\frac{SA_1}{SB_1} = \frac{AA_1}{BB_1}$

$\triangle AA_1A_2 \sim \triangle BB_1B_2$ в силу параллельности m -ой



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

SO — линиями то есть равноудаленных от граней трехгранного угла, тогда A_1 — центр впис. сфер. $\triangle AA_2A_3$, S_1 B_1 — центр впис. сфер. $\triangle BB_2B_3$, значит AA_1 и BB_1 совпадают также, как и стороны $\triangle AA_2A_3$ и $\triangle BB_2B_3$, тогда $\frac{SA_1}{SB_1} = \frac{AA_3}{BB_3} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{2}{3}$

$OA_1 = OB_1 = r$, тогда

$$\frac{SA_1}{SB_1} = \frac{SA_1}{SA_1 + 2r} \quad \frac{SA_1}{SA_1 + 2r} = \frac{2}{3}$$

$$3SA_1 = 2SA_1 + 4r$$

$$SA_1 = 4r$$

Рассмотрим $\triangle SKO$, K — т. касания, $\angle K = 90^\circ$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{r}{4r + r} = 0,2$$

$$\angle KSO = \arcsin 0,2$$

2) $\triangle KSO = \triangle MSO = \triangle LSO$ по 2-м катетам касаясь и т.п., значит высоты опущенные на гипотенузу будут проходить на одну точку — срезка SO и эти высоты будут образовывать т.о., проходящую через т. K, M, L и перпендикулярную SO. $SO \perp (KML) = O_1$.

$$\cos \angle KOS = \sin \angle KSO = 0,2$$

$$\triangle KO_1O, \angle O = 90^\circ$$

$$OO_1 = KO \cdot \cos \angle KOS = 0,2r$$

$$SO_1 = SA_1 + r - OO_1 = 4,8r$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \left(\frac{SA_3}{SA_1}\right)^2, \text{ т.е. } (KML) \parallel (AA_2A_3), \triangle AA_2A_3 \sim \triangle KML \text{ подобен тре-}$$

угольнику, который был сечением трехгранного угла пи-
рамиды KML

$$S_3 = S_1 \left(\frac{4,85}{4}\right)^2 = 4 \cdot \frac{36}{25} = \frac{144}{25} = 5,76$$

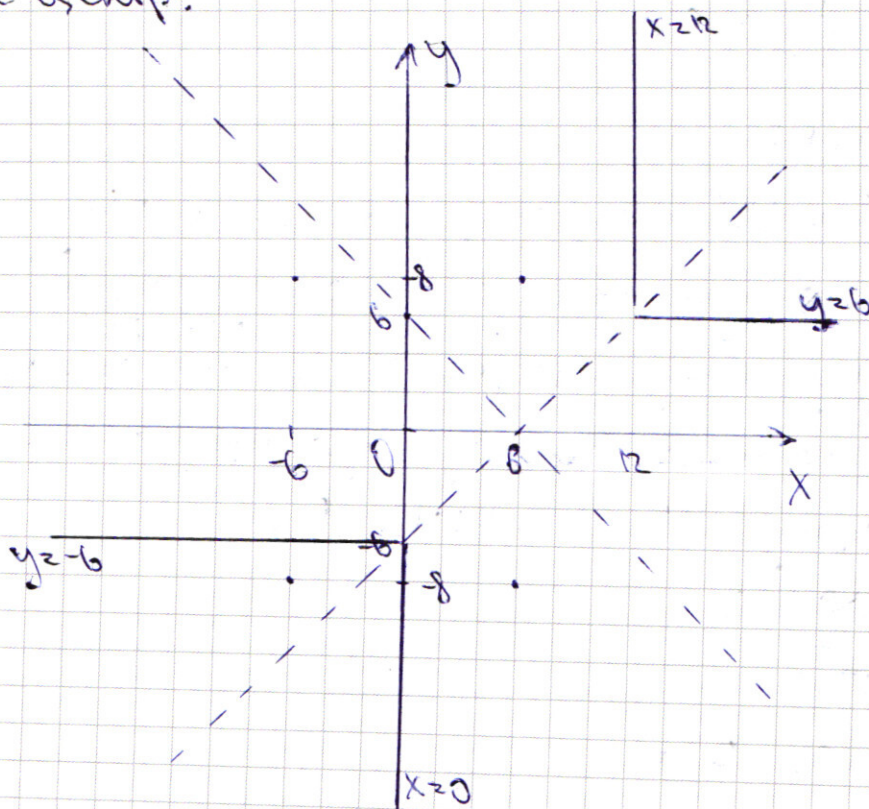
$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin 0,2; S_3 = 5,76$$

~5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \quad (2)$$

Ур-не (1) описывает 4 луча ограниченных прямых
 $y = x-6$ и $y = -x+6$. Ур-не (2) описывает 4 дуг с цен-
трами в т. $(6;8)$ $(-6;8)$ $(-6;-8)$ $(6;-8)$ и радиусом 3,
каждая из которых ограничена четвертью, в которой на-
ходится ее центр.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $0 < \gamma < 2$ нет р-ми., при $\gamma = 2$ получается одна п-р.
пересечения в III четверти. Затем, с увеличением γ ур-
~~не имеет 2-х~~ ~~механизма~~ ур-ми имеет 2 решения до $\gamma = 6$.
Далее, с увеличением γ механизма имеет 3 и более р-ми.

$$2 < \gamma < 6$$

$$2 < \beta < 6$$

$$4 < \alpha < 36$$

Ответ: при $\alpha \in (4; 36)$

~6

Дано

Решение

$$\gamma = 13$$

т.е. окружности

$$\angle CAD = 90^\circ$$

одинаковые, то

$$BF = BD$$

$\angle AB$ равна в обоих

Найти:

опр., тогда

$$CF$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AB = \angle ADB$$

$$\angle ACB + \angle ADB = 90^\circ$$

значит $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$, $\triangle CAD$ - р/б

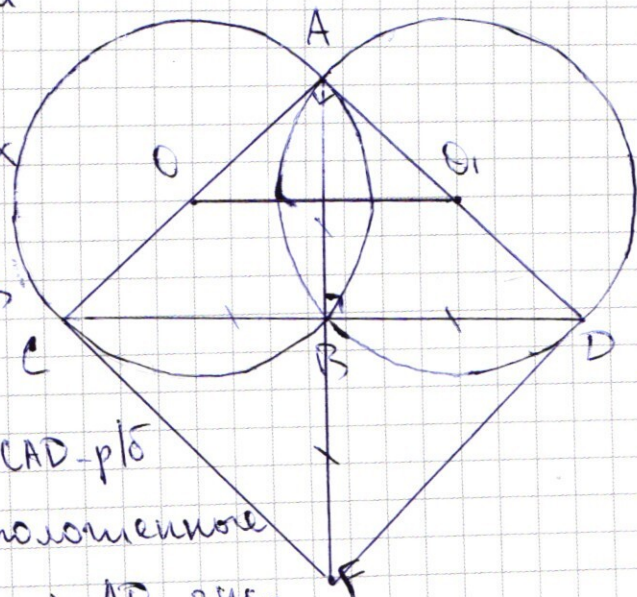
$AC = AD$, а это хорды расположенные

в равных о-р., тогда $\angle AC = \angle AD$, зна-

чит $CD \parallel CO$, тогда $AEBF$, в $\triangle ABD$ ~~$\angle B = 90^\circ$~~ $\angle B = 90^\circ$ $\angle D = 45^\circ$

значит AD - диаметр. По т. Пифагора

$$BD^2 + AB^2 = AD^2$$



$$BD = r\sqrt{2}$$

$\angle BDF = 45^\circ$, $\angle ADB = 45^\circ$, следовательно $AD \perp FD$, FD — касательная

$$FD^2 = FB \cdot FA$$

$$FD^2 = r\sqrt{2} \cdot 2r\sqrt{2} = 4r^2$$

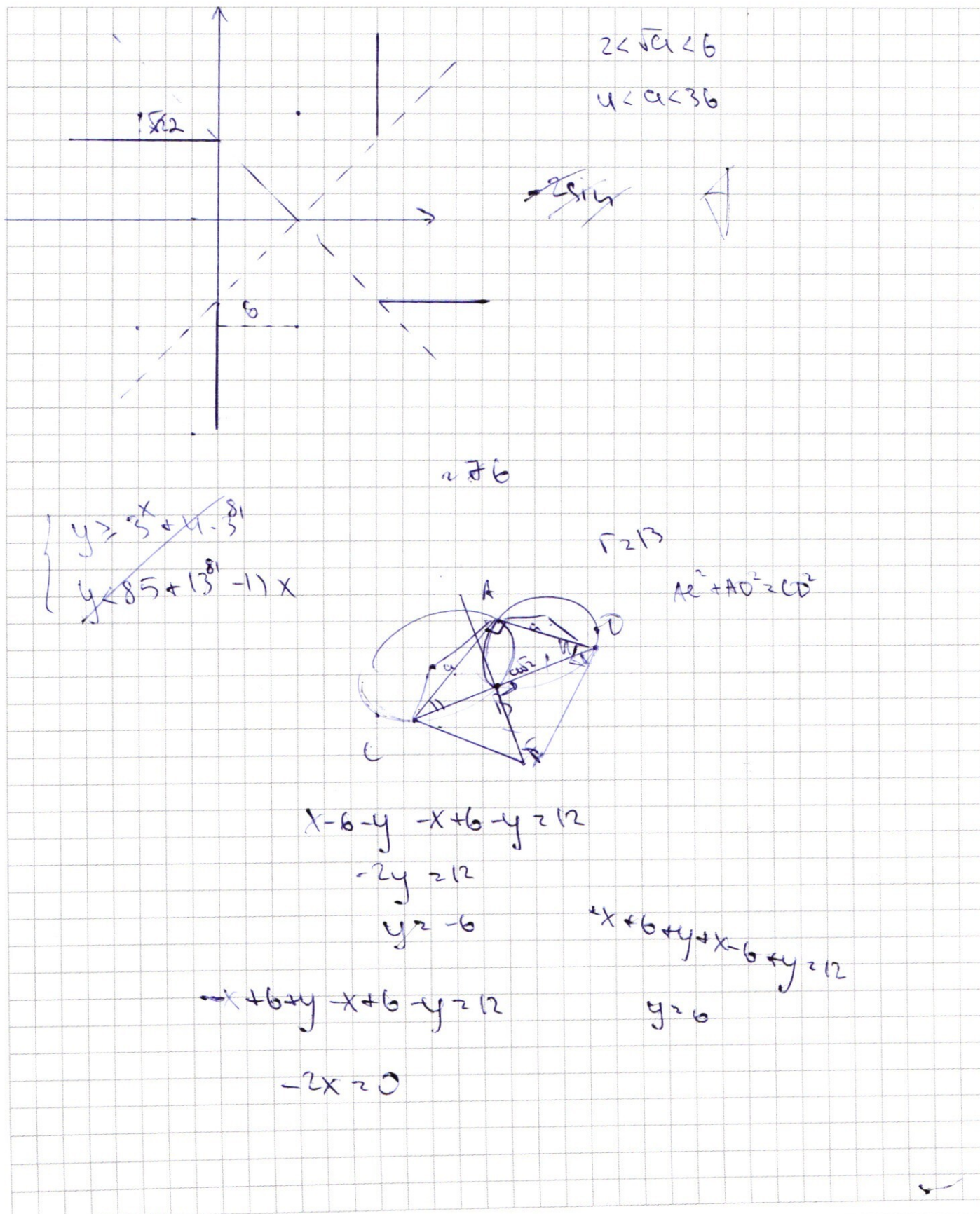
$$FD = 2r$$

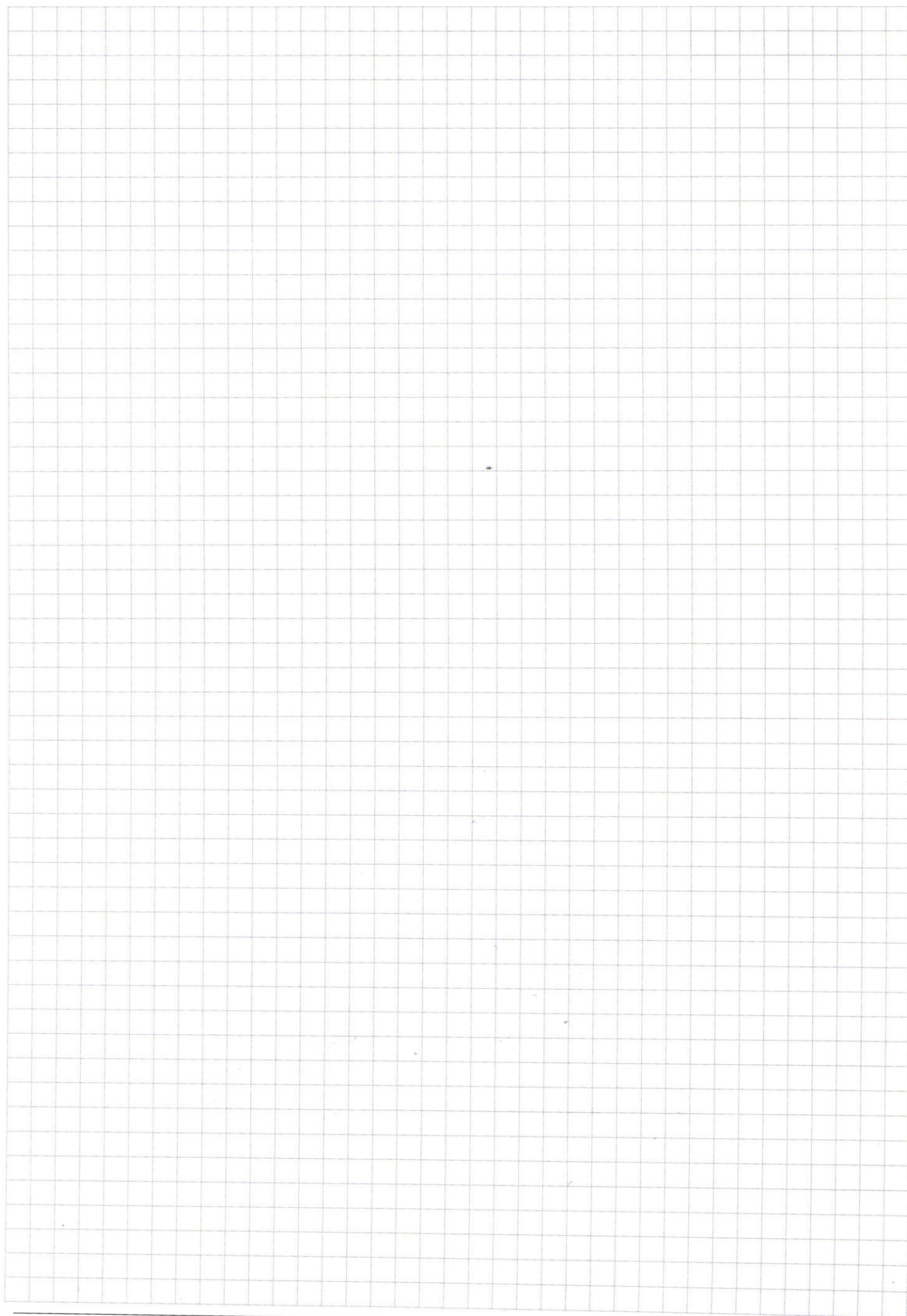
$\triangle CBF \sim \triangle FBD$ по 2-ум касаям.

$$CF = FD = 2r$$

27

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \\ 675 \\ 25 \end{array} \bigg/ \begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ 3 \\ 3 \end{array}$$

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

$$168 \times 4 + 3 = 675$$

~~187~~ 16875 $\begin{array}{r} 125 \\ 6675 \end{array}$ $\begin{array}{r} 875 \\ 125 \\ 175 \end{array}$
 -150
 187
 -150 175
 375 125

nr5 0

и истери

либо 9 и 3, либо 3, 3, 3

$$280 + 840 = 1120$$

55559311

55553331

$$P(4, 1, 1, 2) = \frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 20 \cdot 4 = 80$$

$$P(4; 3; 1) = \frac{8!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 40 \cdot 7 = 280$$

$$\cos 2x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 3x + \sin 7x$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1}{2} 2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x \quad \frac{1}{2} (\cos(10x + \frac{\pi}{4}) + \cos(10x - \frac{\pi}{4}))$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}}{2} \cos 10x = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 2 \cos^2 5x)$$

$$2\cos 5x \cos 2x - 2\sin 5x \sin 2x = \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\cos 5x (2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x) - \sin 5x (2\cos 2x - \sqrt{2}\sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x) - \sin 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 35x - \sin 5x)(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x) = 0$$

$$1) \cos 5x \cdot \sin 5x$$

$$2) \sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x \geq 0 \quad \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x \geq \frac{1}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \cos$$

$$(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$\sqrt{2} (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$\cos (5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 2x$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2x$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = -2x$$

23

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$xy < 0$$

$$y > 0$$

$$x < 0$$

$$x^2 - 4x - xy - 8y + 2y^2 = 0$$

$$x^2 + x(4+y) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$D = 16 + 8y + y^2 - 4(8y - 2y^2) = 9y^2 - 8y + 16 =$$

$$= (3y - 4)^2$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg y(4-y)}$$

$$x = \frac{-4-y \pm (3y-4)}{2}$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$x_1 = -4-y \quad x_2 = -2y$$

$$(x-y+4)(x+2y) = 0$$

$$\lg y(4 \lg x - 2 \lg y) = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\begin{cases} x = y-4 \\ x = -2y \\ -x = y \end{cases}$$

$$3 \lg y(2 \lg x - \lg y) = \lg(-x) + \lg y \lg(-x)$$

$$u \lg(-x) \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg y$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$u^2 - 3uv + 2v^2 = 0$$

$$D = 9v^2 - 8v^2 = v^2$$

$$u = \frac{3v \pm v}{2}$$

$$u = 2v \quad u = v$$

$$\lg(-x) = \lg y$$

$$\lg(-x) = 2 \lg y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y - 4z = y - 4z - y$ 2) $y - 4z = -y^2$ 3) $-2yz = y$
 $2yz = 4$ $y^2 + y - 4 = 0$ $y = 0$
 $2y = 4$ $D = 1 + 16 = 17$ $x = 0$
 $y = 2$ $y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ 4) $-2yz = -y^2$
 $x = -2$ $x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$ $y^2 - 2yz = 0$
 $y^2 + y - 4$ $y = 0, y = 2$
 $2 + 16 = 18$ $x = 0, x = -4$
 $y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$
 $УЧЕТ$ $ОДЗ!$

$y^2 - 2y = 0$
 $y = 2, y = 0$

$h = \frac{144}{25} = 5,76$
 $h = k$ $k^2 = \frac{94}{49}$ $k = \frac{31}{7}$
 $h = 2r$
 $\cos \angle KOS = 0,2$
 $\sin \angle KOS = \frac{2\sqrt{6}}{5}$
 $\frac{h}{h+2r} = \frac{2}{3}$
 $3h = 2h + 4r$
 $h = 4r$
 $\tan \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{r}{4r} = \frac{1}{4} = 0,25$
 $\angle KSO = \arctan 0,25$
 $\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{r}{5r} = 0,2$

$p = 4r + r - 0,2r = 4,8r$

~5

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$y \geq x-6 \quad y \geq -x+6$$

$$(|x-6|)^2 + (|y-6|)^2 = a$$

$x \geq 6, y \geq 6, r = \sqrt{a}, x > 0, y > 0$ и др. в разн. квад.

$$\begin{cases} x-y-6 \geq 0 \\ x+y-6 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

