

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

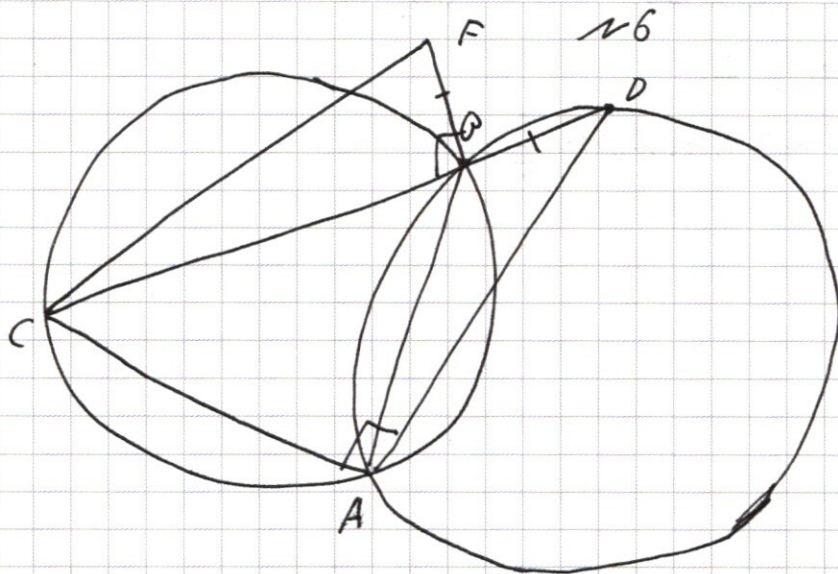
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1)  $\text{высота } CO = \frac{2}{3}$ ,  $BO = 1$

$$\partial U = \Gamma \partial \Sigma = 1$$

2)  $\Delta CBF$  излучен.  $CF^2 = C\theta^2 + \theta F^2 = x^2 + y^2$

3)  $\Delta$  COH биваат 8 орг. ~~чо~~ ~~meon~~ sin пагујача / 0  
чо meon. 5 ni

$$\rightarrow \frac{\sin C \theta}{\sin C A \theta} = 2 \cdot 10 \Rightarrow \sin B A \theta - \sin C A \theta = \frac{2}{20} \quad (1)$$

$\Delta EDBA$  вписан в окр. радиуса 10, ч. т. м. о. н. с. н.:

$$\frac{PV}{\sin \theta_{AV}} = 2.10$$

$$\angle CAO + \angle PAO = \angle CAD = 90^\circ \text{ (normal)} \Rightarrow \sin PAO = EO \sin (90^\circ - \angle CAD) = \cos \angle CAD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos C A D = \frac{x}{20} \quad (2)$$

4) возводим (1) (2) в квадрат и складываем

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 = \left(\frac{x}{20}\right)^2 + \left(\frac{y}{20}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 400$$

5) уг. м. 1  $CF = \sqrt{x^2 + y^2} = 20. \quad (3)$

$$CF = 20$$

б) Если  $PC = 12 = y$

из соотношения 3

$$y^2 = 20^2 \quad x^2 = 20^2 - y^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow x = 16, \text{ тогда } OF = OD = 16$$

по соотношению 2:

$$\cos \angle AOP = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \angle AOP = \frac{3}{5}$$

~ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$\cos 9x = \cos^2 x - \sin^2 x - \cos 5x + \cos 5x$$

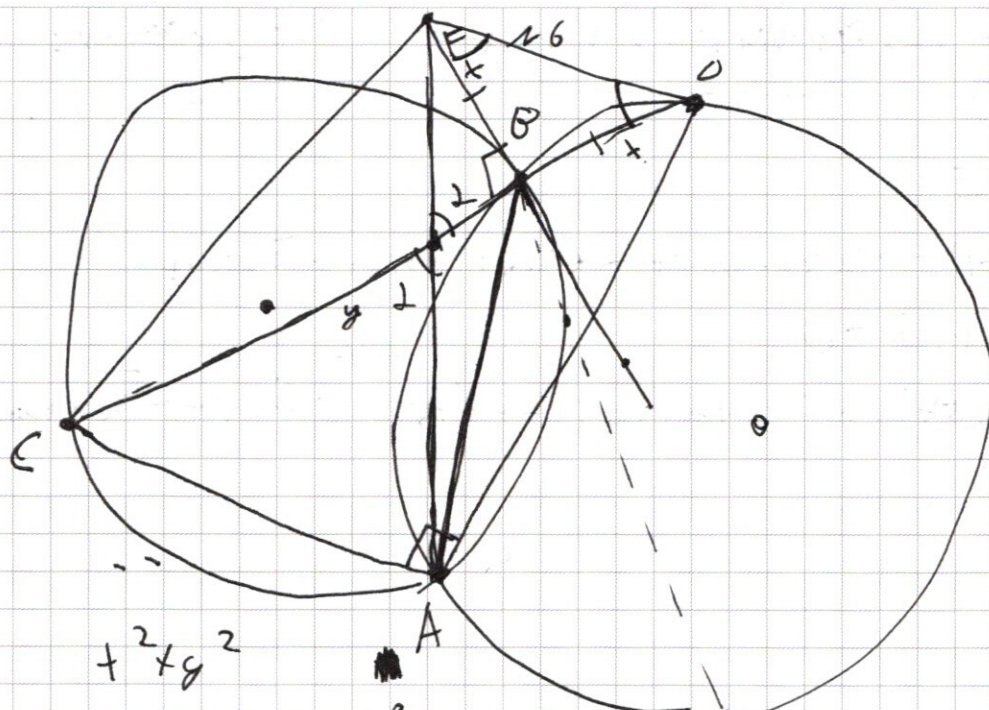
$$\cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 5x = 0 \quad | : \cos 4x \cdot \cos 5x$$

$$\sin(4x+5x) =$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1) - \sin 4x \cdot \sin 5x + \sin 4x + \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x (\cos 4x + 1) = 0$$

$$\sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) + \cos 4x (\cos 5x + \sin 5x) + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(x+y)y = cA^2$$

$$(x+y)t = DA^2$$

$$x^2 + y^2 = CA^2$$

$$y^2 + xy = 14^2$$

$$t^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \angle ADB$$

$$y^2 = CH^2 + AO^2 - 2CH \cdot AO \cdot \sin \angle AOC$$

$$\frac{OP}{\sin \theta_{AP}} = 20; \quad \frac{y}{\cos \theta_{AP}} = 20$$

$$\frac{y}{\cos \theta_{AD}} = 20$$

$$\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 = \sin^2 \theta$$

$$\frac{y^2}{20} = c s^2 \theta 40$$

$$\frac{y^2}{2400} + \frac{x^2}{200} = 1 \quad \Rightarrow$$

$\sim 7.$   
 Сравним числа  $2 + 3 \cdot 2^{34}$  и  
 $76 + 2^3(2^{32} - 1)$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \quad \text{12.}$$

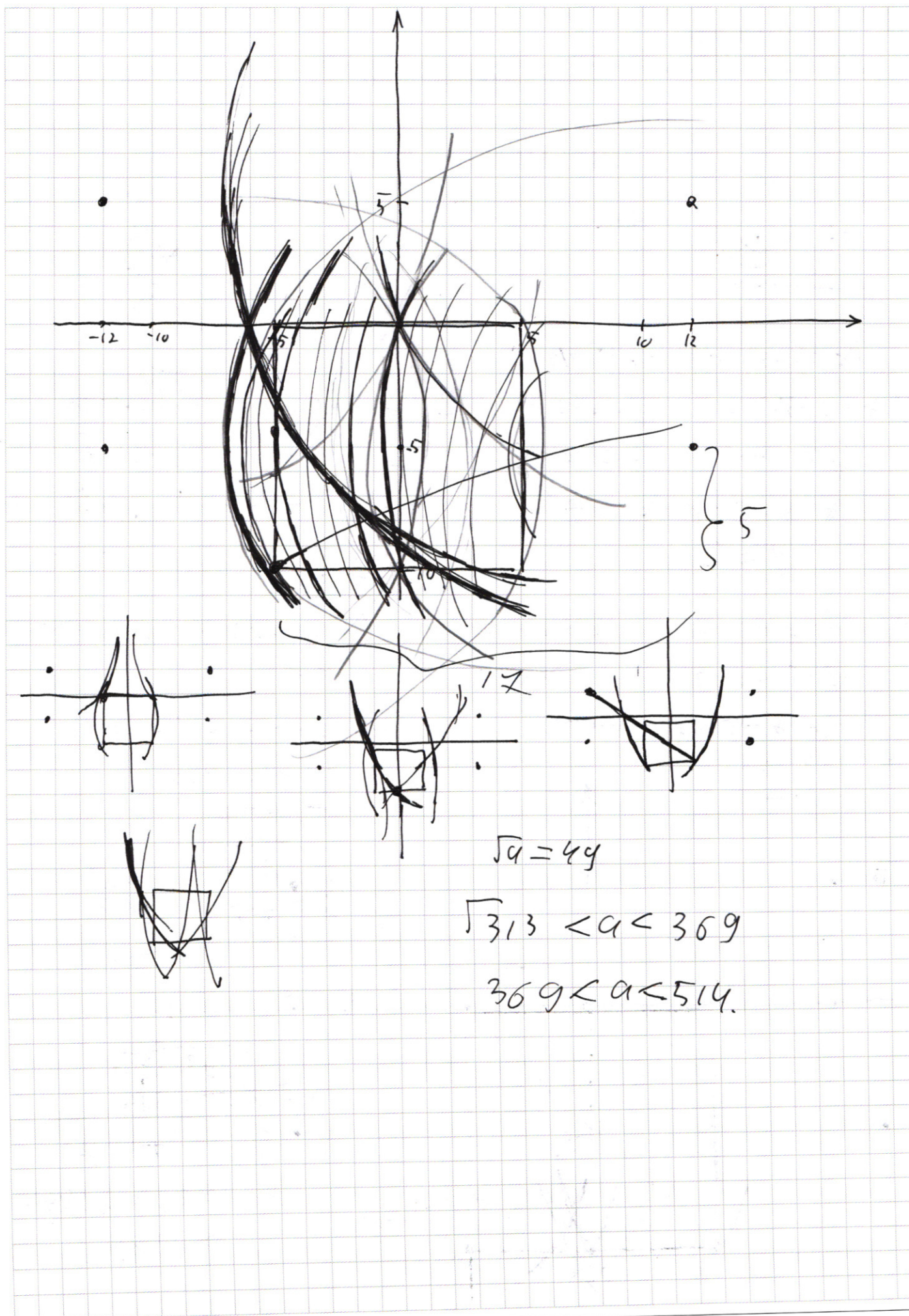
$$\cos 9x = \cos 5x - \cos 4x - \sin 5x - \sin 4x$$

$$\sin 9x = \cos 5x + \sin 4x - \sin 5x - \cos 4x$$

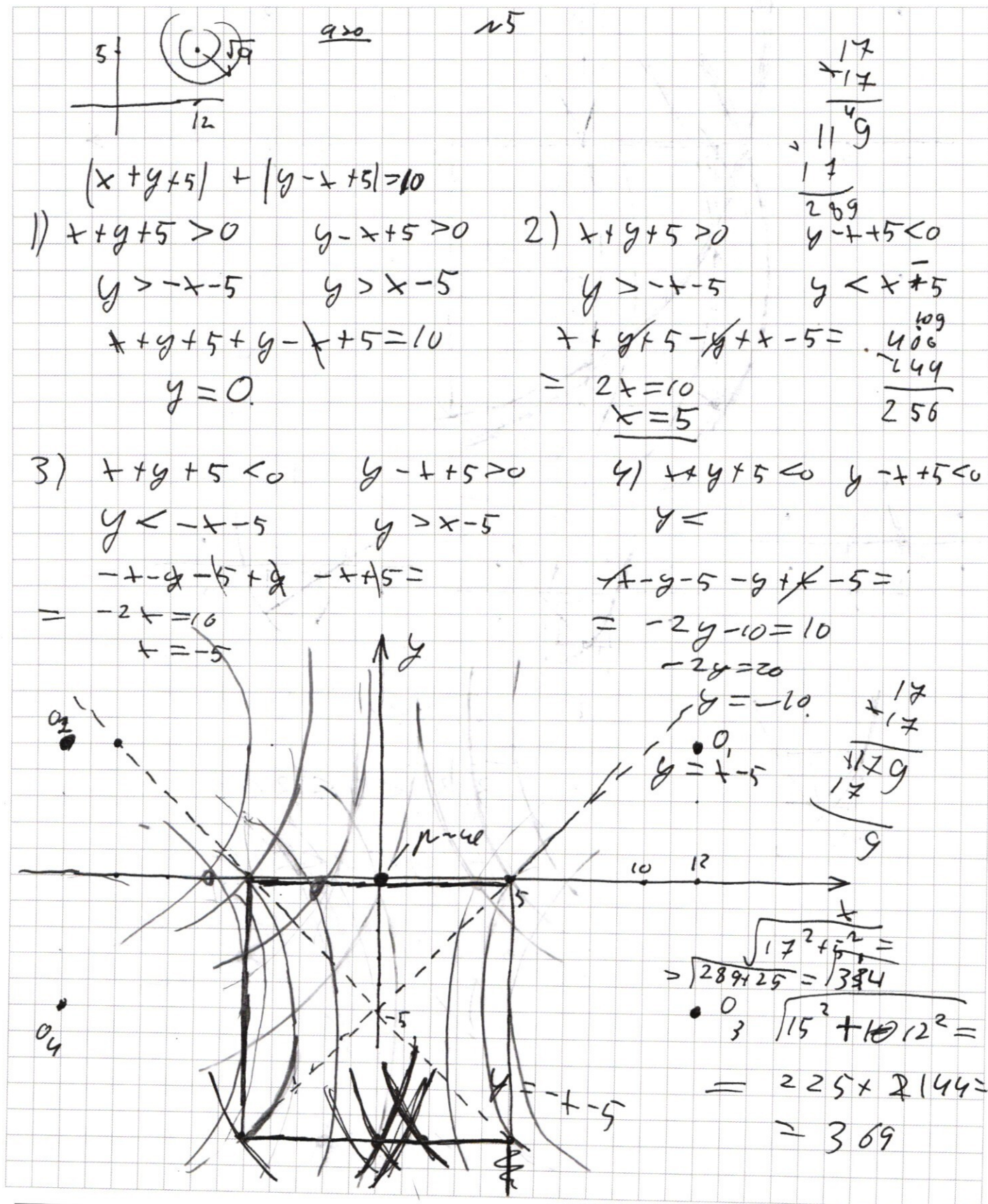
Используем эти соотношения.

Используя тригонометрические формулы  
и алгебраические преобразования  
ведем исходную систему к  
уравнению относительно переменной

$$t = \sin x$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



н/

представим число 9261 в виде произведения простых чисел (разложение на простые множители)

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Значит в 8-ми значном числе есть 3 цифры "3" и 3 цифры "7" и 2 цифры "1".

8-ми значное число представим в виде  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ .

где  $a_i$  - цифры.

таких чисел с разными перестановками 7! - а это 8! (перестановок  $n$  чисел  $n!$ )

3 цифры "7"  $\Rightarrow$  3 одинак. цифры  
одно и то же число учтено 3! раз  
3 цифры "3"  $\Rightarrow$  одно и то же число  
учтено 3! раз

2 цифры "1" одно и то же число  
учтено 1! раз

тогда всего таких 8-ми значн. чисел

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560.$$

Ответ: 560.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 881} \\ \underline{81} \phantom{00} \\ 116 \phantom{0} \\ \underline{81} \phantom{0} \\ 351 \end{array}$$

$$9+2+6+1 = 9+9 = 18.$$

$$\begin{array}{r} 926 \overline{) 19} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 26 \phantom{00} \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 81 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 343 \overline{) 6} \\ \underline{30} \phantom{00} \\ 43 \phantom{00} \\ \underline{42} \phantom{00} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 28} \\ \underline{63} \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \overline{) 49} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9_1 9_2 9_3 9_4 9_5 9_6 9_7 9_8 \\ 8! \\ \hline 2! \cdot 3! \cdot 3! \\ \times 16 \\ \hline 5 \\ \hline 830 \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1^2$$

1 1 7 7 7 3 3 3  
1 2 3 1 2 3

$$= \frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560.$$

$$\text{Q9 } \cos \theta + \cos 5 + -\sqrt{2} \cos 4 + \sin \theta + \sin 5.4 = 0$$

$$\sin(5x) \cdot \cos 65x + \sin 9x =$$

$$\cos 5x = a$$

$$\cos 54^\circ = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow \cos(5x+4x) = \cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x =$$

$$\sin(9t) = \cos 5t \cdot \sin 4t + \sin 5t \cdot \cos 4t$$

$$= \cancel{\cos 55^\circ} \cdot \cancel{\cos 44^\circ} = 1$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad \text{15}$$

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln y \cdot \ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$-\ln x \cdot (2\ln x + 4\ln y) = \ln y (\ln y - 2\ln x)$$

$$\ln x = a$$

$$\ln y = b$$

$$-a(2a + 4b) = b(b - 2a)$$

$$-2a^2 - 4ab = b^2 - 2ab$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$b = 2a$$

$$\ln y = 2\ln x$$

$$y = x^2$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = 2$$

$$8 - 4 - 12 + 8 = 0$$

$$\begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 0 \\ \downarrow \\ y > 0 \end{array}$$

$$y = 1$$

$$x = 1$$

$$1 - 1 - 2 + 8 - 4 =$$

$$= 2$$

$$\neq 0$$

$$b = a$$

$$\ln y = \ln x$$

$$y = x$$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

из 1-го ур-ия.

№ 13

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^7}}$$

применим логарифмы по основанию e

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln y^{\ln \frac{y}{x^7}}$$

$$-\ln x \cdot \ln x^2 y^4 = \ln \frac{y}{x^7} \cdot \ln y$$

$$-\ln x \cdot (2 \ln x + 4 \ln y) = \ln y \cdot (\ln y - 7 \ln x)$$

пусть  $\ln x = a$ ;  $\ln y = b$

$$-a(2a + 4b) = b(b - 7a)$$

$$-2a^2 - 4ab = b^2 - 7ab$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

по 1. Виета

$$b = 2a$$

или

$$b = a$$

$$\ln y = 2 \ln x \Rightarrow y = x^2$$

$$\ln x = \ln y \Rightarrow y = x$$

подставим во 2-ое ур-ие  $y = x$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2$$

подставим во 2-ое ур-ие  $y = x^2$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

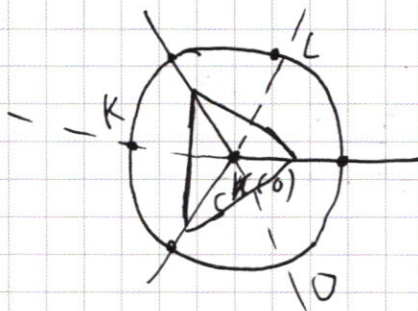
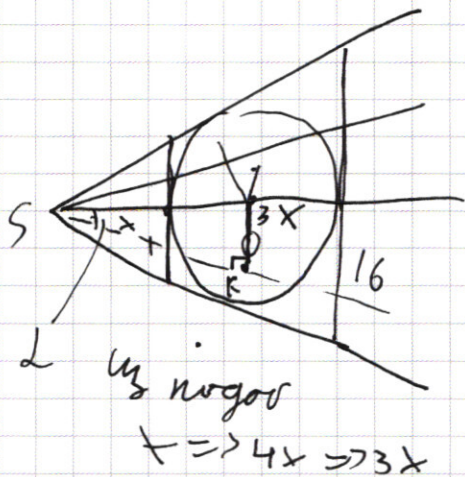
$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = 0 - \text{не}$$
$$y = 2 \cdot 0 = 0.$$

при  $x = 2$   $8 - 4 - 12 + 8 = 0$ ;  $x = 2$  - и

$$x(x-2)(x^2+4x-4) = 0$$

25.



$$3x = 2^1 R$$

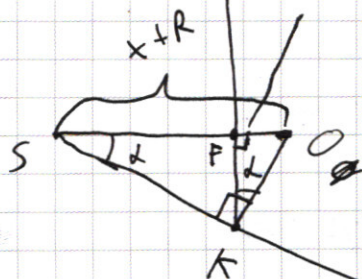
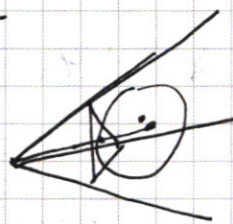
$$\tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$R \cong \mathbb{Z}^3 +$$

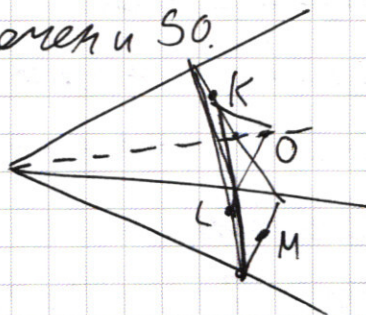
$$t = \frac{3}{3} R$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{x+R} = \frac{R}{\frac{2}{3}R+R} = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}$$

$$\angle = 90^\circ \sin\left(\frac{3}{5}\right)$$



F-пересеч. сечен и 50.



$\Delta FOK$

$$\sin \alpha = \frac{OF}{R} = \frac{3}{5} \Rightarrow OF = \frac{3}{5} R$$

$$SF = \cancel{1} + R - SO - OF = \cancel{1} + R - \frac{3}{5}R = \frac{2}{3}R + \frac{2}{5}R =$$

$$\frac{S_{\text{corr.}}}{S_{0_{\text{II}}}} = \left( \frac{\frac{16}{15} R}{1} \right)^2 = \left( \frac{16}{15} \cdot \frac{8}{8} \right)^2 = \frac{16}{15} R$$

$$s_{\text{err}} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$$

$$\frac{R}{\frac{2}{3}R} = \frac{3}{2}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 6x + 8 \mid x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 8} \\ -x^2 - 6x \phantom{+ 8} \\ \underline{-x^2 - 2x} \phantom{+ 8} \\ -4x + 8 \\ \underline{-4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + 4x - 4 > 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 = 32$$

$$x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = -2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow y = -4 + 4\sqrt{2}$$

$$x = -2 - 2\sqrt{2} \Rightarrow y = -4 - 4\sqrt{2}$$

2) по условиям

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

все корни  $x - 0$ ,

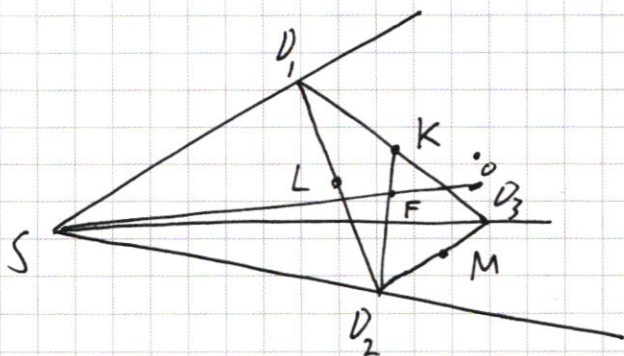
кроме нуля

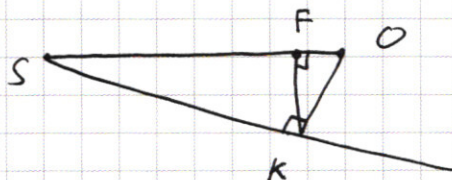
$$x = -2 - 2\sqrt{2}; y = -4 - 4\sqrt{2}$$

не подходят.

Ответ:  $(0; 0); (2; 2); (-2 + 2\sqrt{2}; -4 + 4\sqrt{2})$

3)


 $D_1, D_2, D_3$  - искомого  
семейства

 Внесем отрезки  $\Delta SOK$ .

 $\angle KFO = 90^\circ$  ( $\Delta D_1 D_2 D_3 \sim \Delta BOC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$ )  
(следует из подобия (\*))

$$\angle KSO = \alpha \quad (\sin \alpha = \frac{3}{5})$$

$$\Delta SOK \sim \Delta KFO (\angle L) \Rightarrow \angle FKO = \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{FO}{OK} = \frac{FO}{R} = \frac{3}{5} \Rightarrow FO = \frac{3}{5} R$$

$$SF = SO - OF = x + R - \frac{3}{5} R = \frac{2}{5} R + \frac{2}{5} R = \frac{16}{15} R$$

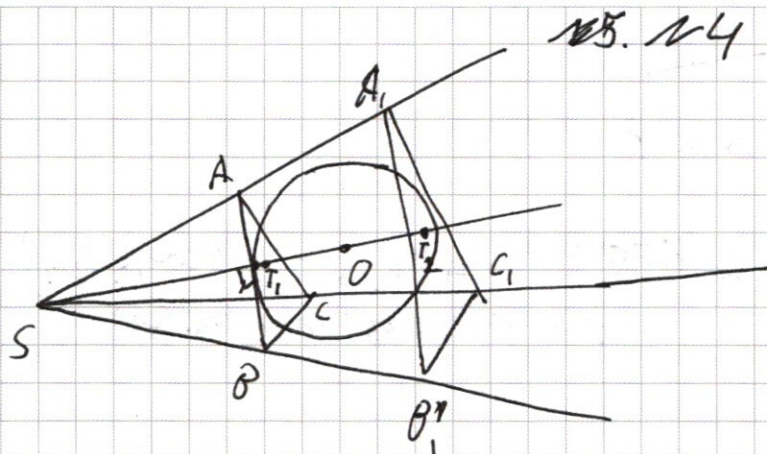
$$(\Delta S D_1 D_2 \sim \Delta S A B; \quad S D_2 D_3 \sim \Delta S C O; \quad S D_3 D_1 \sim \Delta S C A) (*)$$

$$\text{тогда} \quad \frac{S_{D_1 D_2 D_3}}{S_{A B C}} = \left( \frac{SF}{ST_1} \right)^2 = \left( \frac{\frac{16}{15} R}{\frac{2}{3} R} \right)^2 = \left( \frac{8}{5} \right)^2 \Rightarrow S_{D_1 D_2 D_3} = \frac{64}{25}$$

$$S_{A B C} = 1$$

$$\text{Ответ:} \quad \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}; \quad \frac{64}{25}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1)  $ABCT_1$  - сечение пл-тью  $\perp SO$  и касательн. окр.

$S_{ABCT_1} = 1$ ;  $ABCT_1$  - треугольник

$A_1B_1C_1$  - сечен. пл-тью  $\perp SO$  и касательн. окр.

$S_{A_1B_1C_1} = 16$ ;

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  / их стороны пропорциональны,

( $\triangle SBC \sim \triangle SB_1C_1$ ;  $\triangle SBA \sim \triangle SB_1A_1$ ;  $\triangle SAC \sim \triangle SA_1C_1$ )

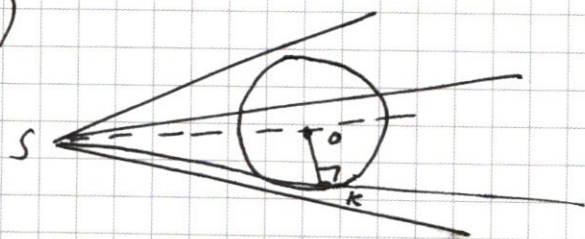
$K$  - коэф. подоб.  $K = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABCT_1}} = 16 \Rightarrow K = 4. \Rightarrow$

$\Rightarrow KST_1 = ST_2$

пусть  $ST_1 = x \Rightarrow ST_2 = 4x \Rightarrow T_1T_2 = 3x = 2R$  ( $R$  - радиус окр.)

$$x = \frac{2}{3}R$$

2)



$K$  - т. касания

границы окр.;

окр.;

$OK = R$  - радиус окр.

$OK \perp$  пл-ти грани

$\triangle SOK$  прямоуг. ( $\angle SKO = 90^\circ$ )

пусть  $\angle KSO = \alpha$ ;  $\sin \alpha = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{R+x} = \frac{R}{R+\frac{2}{3}R} = \frac{3}{5} = \sin \angle KSO$ .

2) графиком  $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$  явл.

4 окружности (центрированы в координатах  $(\pm 12; \pm 5)$  радиусом  $\sqrt{a}$ )

2 р-ия будет, если

1)  $\sqrt{a} = 7$  (окр.  $O_4, O_3$  касаются  $AB$ ;  $CD$  соотв.)

$$a = 49$$

2) при  $a$   $7 < \sqrt{a} \leq \rho_{O_3}$  ( $\rho_{O_3} = \sqrt{17^2 + 5^2} = \sqrt{314}$ )

будет более 2х р-ий.

3) при  $\rho_{O_3} < \sqrt{a} < O_2 T_1$  ( $O_2 T_1 = \sqrt{15^2 + 12^2} = \sqrt{369}$ )

будет больше 2х р-ий

при  $\sqrt{a} = O_2 T_1$  — 1 р-ия (каска  $T_1$ )

4) при  $O_2 T_1 < \sqrt{a} \leq \rho_{O_2}$  ( $\rho_{O_2} = \sqrt{17^2 + 15^2} =$

будет больше 2х р-ий

$$= \sqrt{289 + 225} = \sqrt{514}$$

5) при  $a > \rho_{O_2}$  нет р-ий

при  $\sqrt{a} < 7$  нет р-ий

ответ:

тогда 2 р-ия при  $a \in \{49\} \cup (314; 369) \cup$   
 $\cup (369; 514]$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) построим гр. ур-ия  $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

•  $x+y+5 > 0$        $y-x+5 > 0$       •  $x+y+5 > 0$        $y-x+5 < 0$

$y > -x-5$        $y > x-5$        $y > -x-5$        $y < x-5$

$x+y+5+y-x+5=10$        $x+y+5-y+x-5=10$

$y=0$        $x=5$

•  $x+y+5 < 0$        $y-x+5 > 0$       •  $x+y+5 < 0$        $y-x+5 < 0$

$y < -x-5$        $y > x-5$        $-x-y-5-y+x-5=10$

$-x-y-5+y-x+5=-2x=10$        $-2y=20$

$-2x=10$        $y=-10$

$x=-5$

строим графически для каждой из полученных областей

