МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$

Ограничения:

$\begin{cases} -\frac{x^7}{y} > 0 \\ -y > 0 \\ x > 0 \\ xy^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Решим уравнение (2) как квадратное относительно y.

$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$

$y^2 - (-2x-4)y - 3x(x-4) = 0$

По т. Виета: $y_1 = -3x$; $y_2 = x - 4$.

1) Рассмотрим случай $y = -3x$. Подставим в уравнение (1):

$\left(-\frac{x^7}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$

Прологарифмируем по основанию e:

$\ln(3x) \cdot \ln\left(\frac{x^6}{3}\right) = 2\ln(9x^3) \cdot \ln x$

$(\ln 3 + \ln x)(6\ln|x| - \ln 3) = 2(2\ln 3 + 3\ln x) \cdot \ln x$

Т. к. $x > 0$, $|x| = x$.

$(\ln 3 + \ln x)(6\ln x - \ln 3) = 2 \cdot (2\ln 3 + 3\ln x) \cdot \ln x$

Пусть $\ln x = t$, $\ln 3 = a$. Тогда:

$(a+t)(6t - a) = (4a + 6t) \cdot t$

$6at - a^2 + 6t^2 - at = 4at + 6t^2$

$at = a^2 \quad |: a = \ln 3 \neq 0$

$t = a \Rightarrow \ln x = \ln 3 \Rightarrow x = 3;\ y = -3x = -9.$

2) Рассмотрим случай $y = x - 4$. Подставим в уравнение (1):

$$\left(-\frac{x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x\cdot(x-4)^2)}$$

$$\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x\cdot(x-4)^2)}$$

Прологарифмируем по основанию e.

$$\ln(4-x)\cdot\ln\left(\frac{x^7}{4-x}\right) = \cancel{x^{2\ln}}\, 2\ln(x\cdot(x-4)^2)\cdot\ln x$$

$$\ln(4-x)\cdot(7\ln x - \ln(4-x)) = 2(\ln x + 2\ln|x-4|)\cdot\ln x$$

Т.к. $y = x - 4 < 0$, $|x-4| = 4 - x$.

$$\ln(4-x)\cdot(7\ln x - \ln(4-x)) = (2\ln x + 4\ln(4-x))\cdot\ln x$$

Пусть $\ln x = t$, $\ln(4-x) = z$. Тогда:

$$z\cdot(7t - z) = (2t + 4z)\cdot t$$

$$7tz - z^2 = 2t^2 + 4zt$$

$$2t^2 - 3tz + z^2 = 0$$

Решим уравнение как квадратное относительно t.

$$2t^2 - (3z)\cdot t + z^2 = 0$$

По т. Виета: $t_1 = z$; $t_2 = \frac{z}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} t = z \\ t = \frac{z}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = \ln(4-x) \\ \ln x = \frac{1}{2}\ln(4-x) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 - x \\ x = \sqrt{4-x} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x \neq \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Rightarrow y = x - 4 = -2 \\ \Rightarrow y = x - 4 = \frac{-9+\sqrt{17}}{2} < 0 \\ \end{array}$$

Ответ: $(3; -9)$, $(2; -2)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-9+\sqrt{17}}{2}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. $\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$

$3^x + 4\cdot 3^{28} < y \le 93 + 3\cdot(3^{27}-1)x$

$3\cdot 31 + 3(3^{27}-1)x \geqslant 3^x + 4\cdot 3^{28} + 1$

$3(3^{27}+30)x \geqslant 3^x + 4\cdot 3^{28} + 3^0$

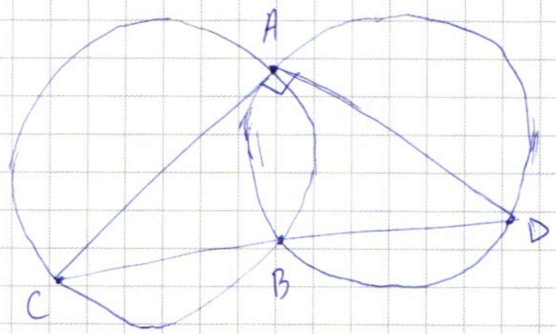
$(3^{27}+30)x \geqslant 3^{x-1} + 4\cdot 3^{27} + \frac{1}{3} > 3^{28}$

$3(3^{26}+10)x \geqslant 3^{x-1} + 4\cdot 3^{27} + \frac{1}{3}$

$(3^{26}+10)x \geqslant 3^{x-2} + 4\cdot 3^{26} + \frac{1}{9}$

$10x \geqslant 3^{x-2} + (4-x)\cdot 3^{26} + \frac{1}{9}$

6.



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

По формуле суммы косинусов $(\cos 7x + \cos 3x) = 2\cos 5x \cos 2x$, по формуле разности синусов $(\sin 7x - \sin 3x) = 2\sin 2x \cos 5x$.

$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x + \sin 2x = 0 \\ 2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = 0 \end{array}\right.$$

1) $\cos 2x + \sin 2x = 0$

Если $\cos 2x = 0$, то и $\sin 2x = 0$, но это невозможно, т.к. $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$. Значит, $\cos 2x \neq 0$.

$1 + \operatorname{tg} 2x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1$

$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

2) $2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = 0 \ |:2$

$\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = 0$

$\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};\ \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7};\ \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложим число 64827 на простые множители.

$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 3^3 \cdot 7^4$.

Чтобы произведение цифр числа делилось на 7^4, в нём обязательно должны быть четыре цифры „7" (т.к. любая цифра, кроме „7", не делится на 7).

Чтобы произведение цифр числа не делилось на 2 и делилось на 3^3, в числе должны быть одна цифра „9" и одна цифра „3" либо три цифры „3".

1) Пусть в числе одна цифра „9" и одна цифра „3". „9" мы можем поставить на любую из 8 позиций (8 вариантов), „3" – на любую из семи оставшихся (7 вариантов), на 4 позиции из 6 оставшихся ставим цифры „7" (таких вариантов C_6^4). На оставшиеся позиции мы однозначно ставим единицы, т.к. только цифра „1" не влияет на произведение цифр числа. Получается, всего подходящих чисел:

$8 \cdot 7 \cdot C_6^4 \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 40 \cdot 21 = 840$.

2) Пусть в числе три цифры „3". Тогда „тройки" мы можем поставить на любые 3 позиции из 8 (таких вариантов C_8^3), „семёрки" мы можем поставить на любые 4 позиции из 5 оставшихся (C_5^4 вариантов) на оставшуюся позицию ставим „1".

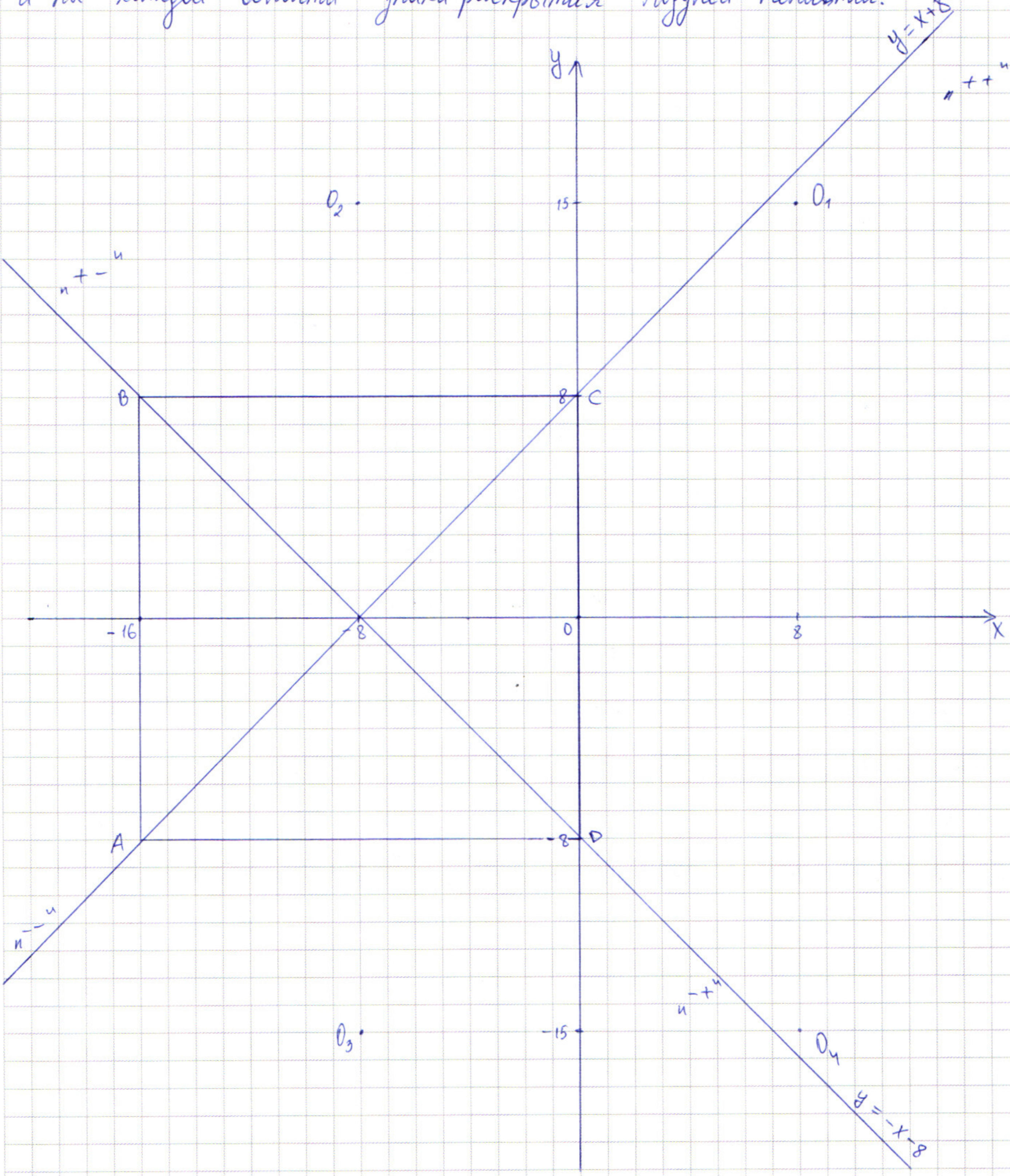
$C_8^3 \cdot C_5^4 \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 40 \cdot 7 = 280$.

Ответ: $840 + 280 = 1120$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$ (2 решения)

Изобразим на плоскости Oxy график первого уравнения системы.
Прямые $y = x+8$ и $y = -x-8$ разбили плоскость на 4 области, и на каждой области знаки раскрытия модулей меняются.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Условно обозначим эти области как „++", „+-", „-+" и „--", где первый и второй символ – знака раскрытия на этой области первого и второго модуля соответственно. Эти знаки определим подстановкой координат $(x;y)$ некоторых точек из каждой области в первый и второй модуль соответственно. Рассмотрим случаи:

1) „++": $x+y+8+x-y+8=16 \Rightarrow x=0$;

2) „+-": $x+y+8-(x-y+8)=16 \Rightarrow y=8$;

3) „-+": $-(x+y+8)+(x-y+8)=16 \Rightarrow y=-8$;

4) „--": $-(x+y+8+x-y+8)=16 \Rightarrow x=-16$.

Получаем, что графиком первого уравнения системы является квадрат с вершинами $A(-16;-8)$, $B(-16;8)$, $C(0;8)$, $D(0;-8)$.

Рассмотрим второе уравнение системы:

$(|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a$

1) $x \geq 0$, $y \geq 0$: $(x-8)^2+(y-15)^2=a$ – окружность с центром $O_1(8;15)$ и радиусом $\sqrt{a}$, только в пределах I четверти (при $a=0$ – точка O_1).

2) $x<0$, $y \geq 0$: $(-x-8)^2+(y-15)^2=a \Rightarrow (x+8)^2+(y-15)^2=a$

Окружность с центром $O_2(-8;15)$ и радиусом $\sqrt{a}$, только в пределах II четверти (при $a=0$ – точка O_2).

3) $x<0$, $y<0$: $(-x-8)^2+(-y-15)^2=a \Rightarrow (x+8)^2+(y+15)^2=a$

Окружность с центром $O_3(-8;-15)$ и радиусом $\sqrt{a}$, только в пределах III четверти (при $a=0$ – точка O_3).

4) $x \geq 0$, $y < 0$: $(x-8)^2 + (-y-15)^2 = a \Rightarrow (x-8)^2 + (y+15)^2 = a$.
Это окружность с центром $O_4(8; -15)$ и радиусом $\sqrt{a}$, только в пределах IV четверти (при $a = 0$ – точка O_4).
Нас не интересует случай $a < 0$, т.к. при $a < 0$ система не имеет решений. При $a = 0$ мы получаем 4 точки O_1, O_2, O_3, O_4 из второго ур-я системы, но т.к. ни одна из них не лежит на границах квадрата, при $a = 0$ также нет решений.
Заметим, что точки O_1 и O_4 и O_2 и O_3 симметричны относительно оси Ox, и все 4 точки симметричны относительно начала координат. Кроме того, точки O_2 и O_3 симметричны относительно центра квадрата.
1) Первый подходящий случай – окружность с центром O_2 касается отрезка BC. Тогда симметрично окр-ть с центром O_3 касается отрезка AD, а другие окр-ти с квадратом не пересекаются.
Тогда $\sqrt{a} = \rho(O_2; BC) = \frac{|15-8|}{\sqrt{1}} = 7 \Rightarrow a = 49$.
2) Окружность с центром O_2 пересекает квадрат в точках B и C. Тогда в силу симметричности окр-ть с центром O_3 пересекает кв. в т. A и D. Это происходит при
$a = (|-16| - 8)^2 + (|-8| - 15)^2 = 8^2 + 7^2 = 113$.
При $a \in (49; 113]$ система имеет 4 решения.
3) При $a \geq 113$ система также будет иметь 4 решения, т.к. каждая из окружностей с центрами O_2 и O_3 будет пересекать квадрат в двух разных точках каждая (стороны AB и CD). Так будет происходить до того момента, пока окр-ти не пересекут квадрат в одних и тех же точках. В силу симметрии, эти две точки будут серединами сторон AB и CD: $(-16; 0)$ и $(0; 0)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Окр-ть с центром O_2 пересечёт квадрат в т. $(0;0)$ при: $a = (0+8)^2 + (0-15)^2 = 64 + 225 = 289$. При этом 2 другие окружности также пересекают кв. в т. $(0;0)$.

При $a > 289$ двух решений система иметь не может.

Ответ: $a \in \{49; 289\}$.

7. $\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$ $x, y \in \mathbb{Z}$

Перепишем систему в виде:

$3^x + 4\cdot 3^{28} < y \le 93 + 3(3^{27}-1)x$

Т.к. $y \in \mathbb{Z}$, $93 + 3(3^{27}-1)x \ge 3^x + 4\cdot 3^{28} + 1$.

$3\cdot 31 + 3(3^{27}-1)x \ge 3^x + 4\cdot 3^{28} + 1$

$3(3^{27}+30)x \ge 3^x + 4\cdot 3^{28} + 1 \quad |:9$

$(3^{26}+10)x \ge 3^{x-2} + 4\cdot 3^{26} + \frac{1}{9}$

~~$10x \ge 3^{x-2} + (4-x)\cdot 3^{26} + \frac{1}{9}$~~

При этом $3^{x-2} + 4\cdot 3^{26} + \frac{1}{9} > 3^{27} + \frac{1}{9} = 3^{27} + 3^{-2}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $64827 = 3^3 \cdot 7 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^4$

64827	9
7203	3
2401	7
~~347~~	~~347~~
343	7
49	7
7	7
1	

$2401 \times 27 = 16807 + 4802 = 64827$

1) Если в числе 9 и 3 (по одной шт.),

~~$C_8^2 \cdot C_6^4 = \frac{8\cdot 7}{2} \cdot \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 28 \cdot 15 =$~~

2) Если в числе три „3":

$C_8^3 \cdot C_5^4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} \cdot 5 = 56 \cdot 5$

одна „3" + одна „9" или три „3" (в каждом случае + четыре „семёрки"), на оставшиеся места единицы.

49×49: 441, 196, 2401

2401×27: 16807, 4802, 64827

2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left(\underbrace{\frac{\alpha+\beta}{2}}_{x} + \underbrace{\frac{\alpha-\beta}{2}}_{y}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$

$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + \cos x\cos y + \sin x\sin y = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x + \sin x\cos y - \sin y\cos x =$

$= 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Тогда $\cos 7x + \cos 3x = 2\cos 5x\cos 2x$; $\sin 7x - \sin 3x = 2\sin 2x\cos 5x$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}\cos 4x = 2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x -$

$- \sin^2 2x) = 2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) =$

$= (\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0$

1) $\cos 2x + \sin 2x = 0$;

2) $2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = 0$; $=$ $\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\frac{7}{2}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \pi k \Rightarrow \frac{7}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$

$\frac{3}{2}x = \frac{5\pi}{8} + \pi k \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

3. $\begin{cases} \left(-\dfrac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$

(2): $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$

$D = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16x^2 - 32x + 16 = (4x-4)^2$

$y_1 = \dfrac{-2x-4+4x-4}{2} = \dfrac{2x-8}{2} = x-4; \quad y_2 = \dfrac{-2x-4-4x+4}{2} = -3x$

$(y-x+4)(y+3x) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-4 \\ y = -3x \end{array}\right.$

(1): 1) $y = \cancel{x-4}\ -3x$:

$\left(-\dfrac{x^7}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$

$\left(\dfrac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$

$\ln 3x \cdot \ln\dfrac{x^6}{3} = 2\ln(9x^3) \cdot \ln x$

$(\ln 3 + \ln x)\cdot(6\ln x - \ln 3) = (4\ln 3 + 6\ln x)\cdot \ln x$

$(a+t)(6t-a) = (4a+6t)\cdot t$

$6at - a^2 \cancel{+6t^2} - at = 4at \cancel{+6t^2}$

$at = a^2$

$t = a \Rightarrow \ln x = \ln 3 \Rightarrow x = 3; \quad y = -9$

2) $y = x-4; \quad y<0 \Rightarrow x-4<0 \Rightarrow 4-x>0$

$\left(-\dfrac{x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x^3-8x^2+16x)}$

$\ln(4-x)\cdot\ln\left(\dfrac{x^7}{4-x}\right) = 2\ln(x(x-4)^2)\cdot\ln x$

$a\cdot(7t-a) = 2(t+2a)\cdot t$

$7at - a^2 = 2t^2 + 4at$

$2t^2 - 3at + a^2 = 0$

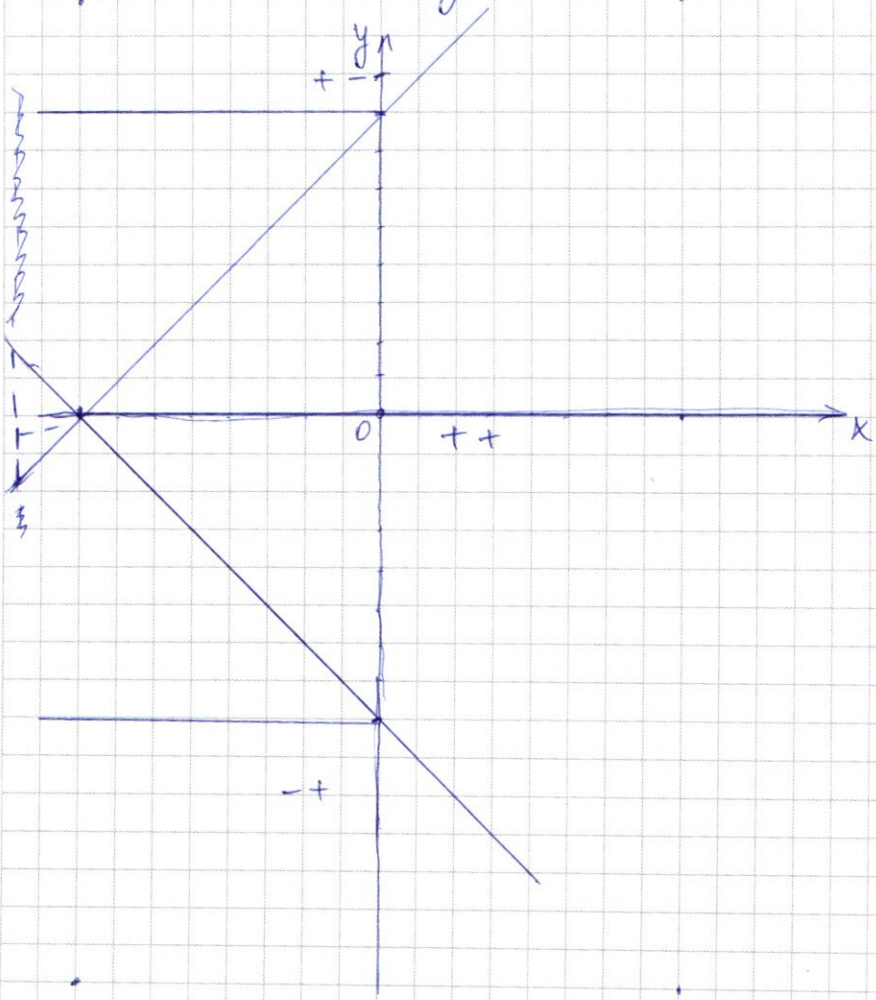
$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$

$t_1 = \dfrac{3a+a}{4} = a; \quad t_2 = \dfrac{2a}{4} = \dfrac{a}{2}$

$\ln x = \ln(4-x); \quad \ln x = \dfrac{1}{2}\ln(4-x) \Rightarrow \ln x = \ln(\sqrt{4-x})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$ (2 реш.)



1) "+ +":

$x+y+8+x-y+8=16$

$2x=0 \Rightarrow x=0$

2) "+ −": $x+y+8-x+y-8=16$

$y=8$

3) "− −": $-x-y-8-x+y-8=16$

$-2x=32$

$x=-16$

4) "− +": $-x-y-8+x-y+8=16$

$-2y=16$

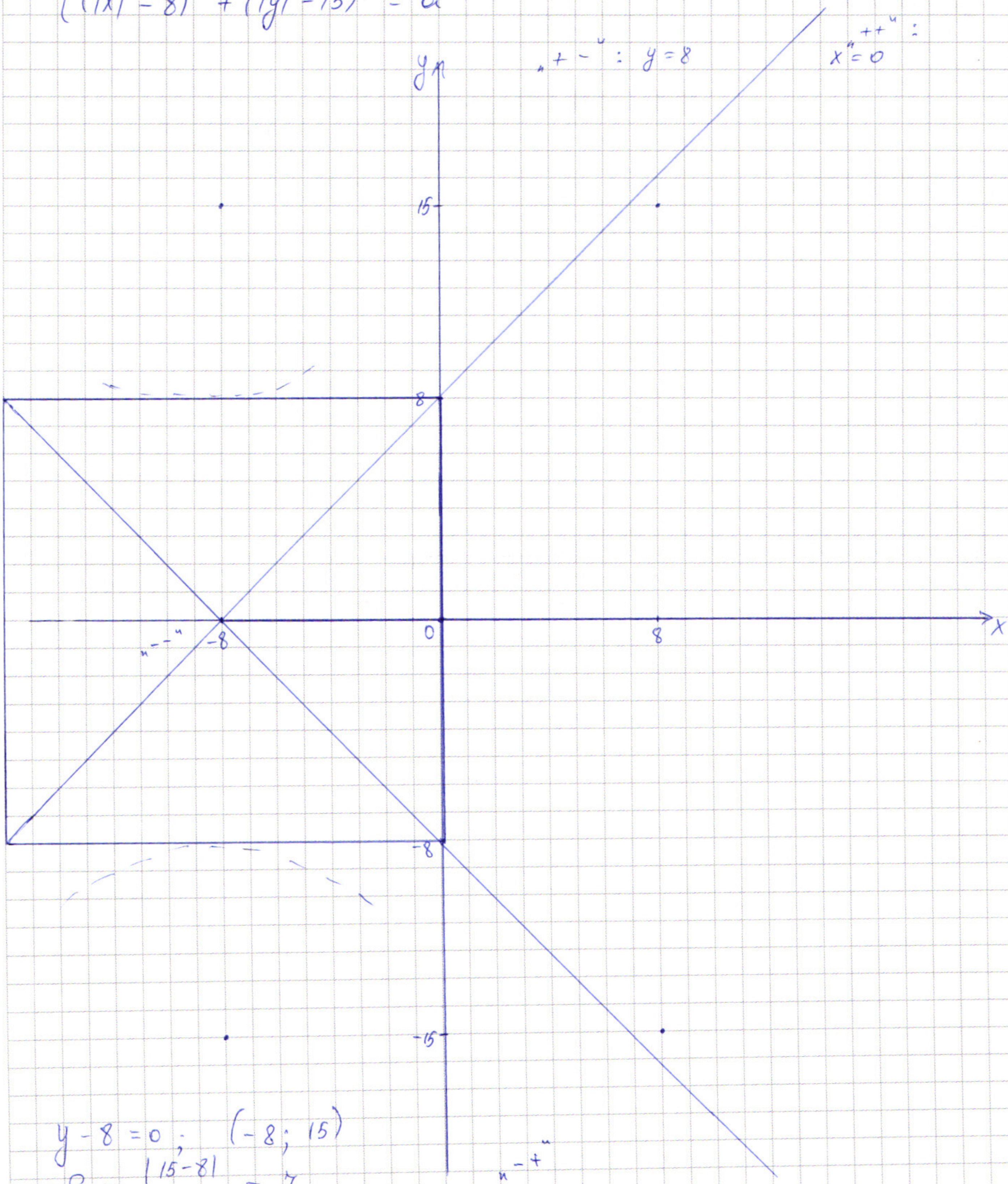
$y=-8$

5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$ (2 реш.)

1) $y = -x-8$; $y = x+8$

„$+-$": $y=8$

„$++$": $x=0$



$y-8=0$; $(-8;\ 15)$

$\rho = \frac{|15-8|}{\sqrt{1}} = 7$

$\cancel{\rho =}\ (16-8)^2 + (8-15)^2 = 64+49 = 113 = a$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)