

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

64827 кратно 9, т.к. сумма цифр кратна 9

$$64827 = 9 \cdot 7203 = 9 \cdot 3 \cdot 2401 = 9 \cdot 3 \cdot 7^4 = 3^3 \cdot 7^4$$

Произведение цифр восьмизначного числа должно
быть кратно 7^4 , т.к. каждая цифра $0 \leq a_i \leq 9$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8 = 64827 \neq 0 \Rightarrow 4$ цифры будут семерками.
у нас остаётся 4 цифры произведение которых
равно 3^3 . возможные варианты:

$$3^3 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow$$

число состоит из цифр 1, 1, 3, 9, 7, 7, 7, 7, либо из
цифр 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7. $\Rightarrow$ кол-во восьмизначных чисел, произведение цифр которых
равно 64827 равняется ~~2~~

Задача 2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{3x + \frac{6\pi}{8}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

I. $\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$; $\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{7x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k$$

II. $\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = 0$; $\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8} = \pi m$; $m \in \mathbb{Z}$.

$$x = \frac{2}{3}\pi m - \frac{\pi}{4}$$

III. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$; $n \in \mathbb{Z}$.

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n$$

Ответ:

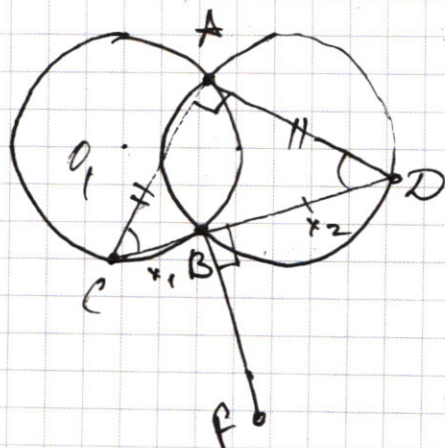
$$x = \begin{cases} \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ \frac{2}{3}\pi m - \frac{\pi}{4}, m \in \mathbb{Z}. \\ \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Задача 6.

a)

$$R_1 = R_2 = 17$$

BF - ?



Решение:

т.к. окружности имеют

равные радиусы $\Rightarrow$

$\angle ACB = \angle ADB$ (равные

дуги стягивают равные хорды). Но т.к. $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$

$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow AB = \sqrt{2} \cdot R = 17\sqrt{2}$$

~~Возначает~~ т.к. $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$

$$AC = AD$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение задания №6.

Обозначим $d = AC = AD$; $CB = x_1$; $BD = x_2$;

По т. кос. для $\triangle ACB$:

$$AB^2 = d^2 + x_1^2 - \sqrt{2}d \cdot x_1; \text{ При этом } \sqrt{2}d = x_1 + x_2 \quad (CD = \sqrt{2} \cdot AC).$$

$$17^2 \cdot 2 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + x_1^2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \Rightarrow$$

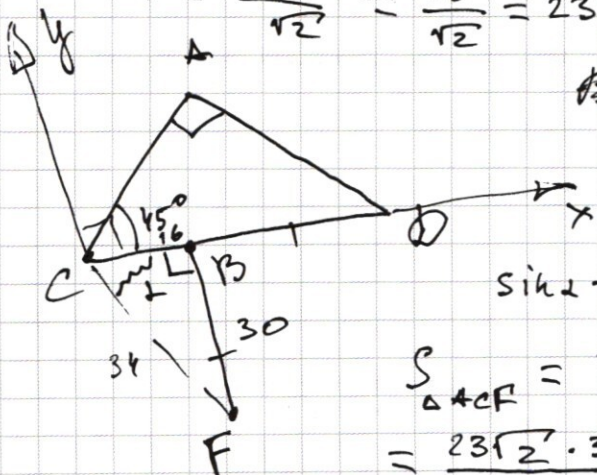
$$x_1^2 + x_2^2 = 2^2 \cdot 17^2; \quad CF = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 34$$

а) Ответ: $CF = 34$.

б) $BC = 16$. Найти: $S_{\triangle ACF}$ - ?

$$x_1 = 16 \Rightarrow x_2 = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{50 \cdot 18} = \sqrt{25 \cdot 36} = 30$$

$$d = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$



~~Вывести из этого условия
формулу для S_{\triangle ACF}~~

$$\sin 2 = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}; \quad \cos 2 = \frac{16}{34} = \frac{8}{17};$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle ACF} &= \frac{AC \cdot CF}{2} \cdot \sin(45^\circ + 2) = \\ &= \frac{23\sqrt{2} \cdot 34}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{17} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{17} \right) = \\ &= \frac{23 \cdot 34}{2} \cdot \frac{23}{17} = 23^2 = 529 \end{aligned}$$

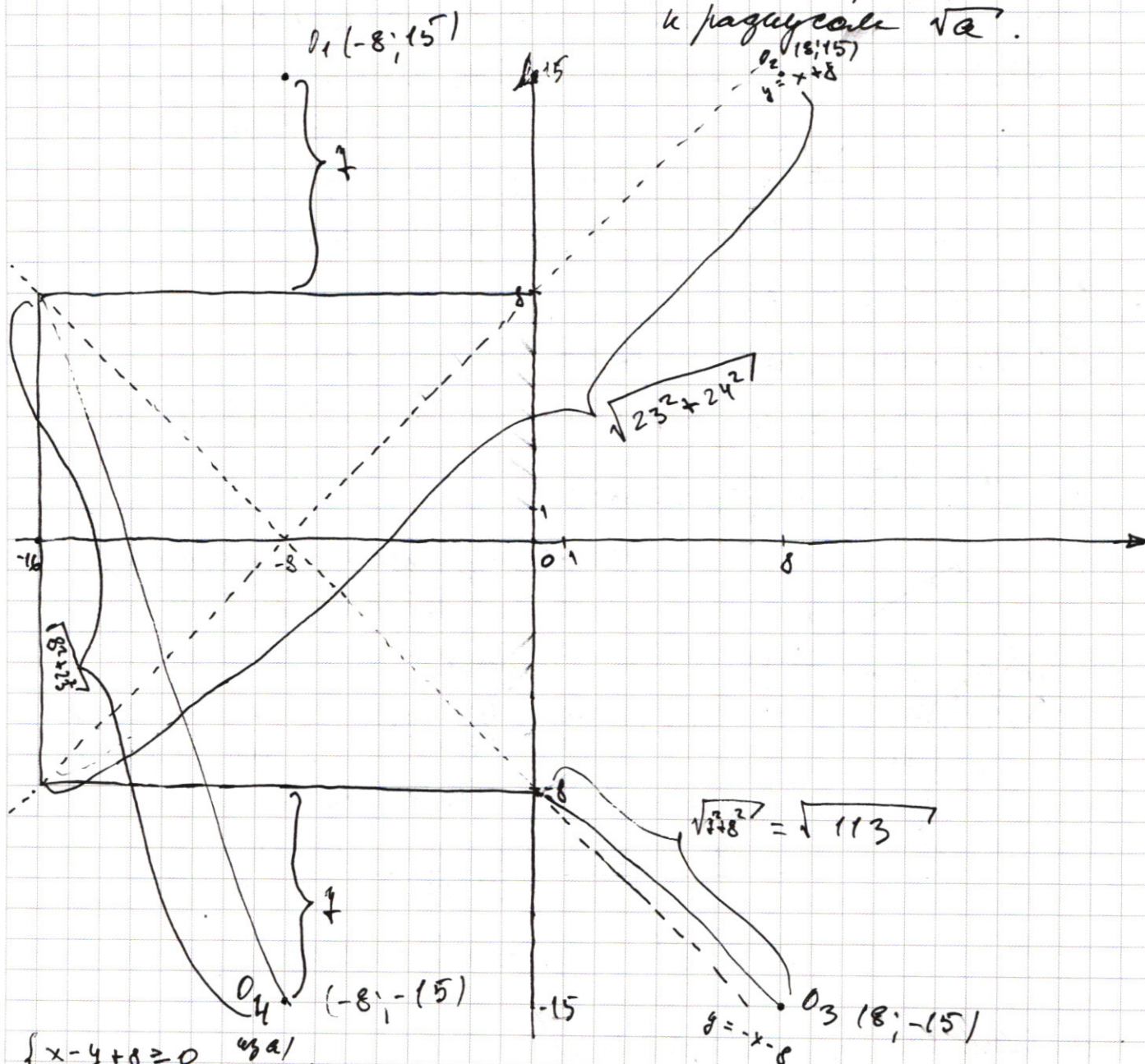
б) Ответ: $S_{\triangle ACF} = 529$.

задание 5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$ ровно 2 решения
 $a = ?$

1. $x+y+8 \geq 0 \Rightarrow y \geq -x-8$ 2. $x-y+8 \geq 0 \Rightarrow y \leq x+8$
 при $a > 0$ графиком является 4 окружности

если $a = 0$; 2 т. - точка $\Rightarrow$ не больше 1 решения
 при $a < 0$ решений нет вообще.

с центрами в точках $(8; 15); (-8; 15); (8; -15); (-8; -15)$.
 и радиусом $\sqrt{a}$.



$\begin{cases} x-y+8 \geq 0 \\ x+y+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=0$

$\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y+8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x=-16$

Действуя аналогично находим, что график первой функции - квадрат со сторонами 16 и 8. $(-8; 0)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение задания 5.

Рассмотрим окружности с центрами в т. O_1 и O_4 .

В силу симметрии ~~относительно~~ отн. кр. Ox и центра квадрата, окружности могут иметь общие точки пересечения с квадратом только если эти окружности проходят через точки $(0; 0)$ и $(-16; 0)$. Тогда их радиус равен

$$R = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

Тогда: ~~при $R \in (0; 7) \cup (17; +\infty)$~~ ~~при $R = 7$ и $R = 17$~~

Тогда эти окружности дают:

0 решений при $R \in (0; 7) \cup (\sqrt{8^2 + 23^2}; +\infty)$.

2 решения при $R = 7; 17$;

~~и~~ более 2 решений при других R ;

Рассмотрим окружности с центрами в т. O_2 и O_3

В силу симметрии отн. ц. кв. и оси Ox . в ситуации

когда каждая окружность имеет 2 точки

пересек. с квадратом, ~~тогда~~ они могут

иметь не более 1 общей точки пересек. с кв. $\Rightarrow$

будут давать больше 2 решений:

Тогда эти окружности дают:

0 решений при $R < \sqrt{113}$ и $R > \sqrt{23^2 + 24^2}$

2 решения при $R = \sqrt{113}$; $R = \sqrt{23^2 + 24^2}$

и более 2 решений при других R .

Тогда есть 2 варианта.

$$\begin{cases} R = \sqrt{113} \text{ или } R = \sqrt{23^2 + 24^2} \\ R \in (0; 7) \cup (\sqrt{8^2 + 23^2}; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = 7 \text{ или } R = 17 \\ R \in (0; \sqrt{113}) \cup (\sqrt{23^2 + 24^2}; +\infty). \end{cases}$$

$$\sqrt{113} > \sqrt{49} = 7; \sqrt{113} < \sqrt{8^2 + 23^2} \Rightarrow$$

$\sqrt{113}$ не подходит.

$$\sqrt{23^2 + 24^2} > \sqrt{8^2 + 23^2} \Rightarrow \text{подходит}$$

$$\sqrt{23^2 + 24^2} = \sqrt{529 + 576} = \sqrt{1105} \Rightarrow \sqrt{a} = R = 7; \sqrt{1105}$$

$$a = 49; 1105;$$

Ответ: $a = 49; 1105$;

Задача 3.

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 2y(x+2) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D_1 = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = 4 \cdot (x-1)^2$$

$$y = -x - 2 \pm 2 \cdot (x-1) = x - 4; -3x;$$

Док. тем, что $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

логарифмируем по основанию b, тогда

$$\log_b(a^{\log_b c}) = \log_b c \cdot \log_b a$$

$$\log_b(c^{\log_b a}) = \log_b a \cdot \log_b c \Rightarrow \text{т.н.д.}$$

Тогда:

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{2\ln x}$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\ln(-y) \cdot \ln\left(-\frac{x^2}{y}\right) = 2\ln(xy^2) \cdot \ln x$$

$$\ln(-y) \cdot (2\ln x - \ln(-y)) = 2\ln^2 x + 2\ln(-y) \cdot \ln x$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \cdot \ln(-y) + \ln^2(-y) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение задания №3.

$$\ln^2(-y) - 3\ln(-y) \cdot \ln x + 2\ln^2 x = 0$$

$$D = 9 \ln^2 x - 8 \ln^2 x = \ln^2 x$$

$$\ln(-y) = \frac{3\ln x + \ln x}{2} = 2\ln x; \ln x; \Rightarrow$$

$$y = x - 4; -3x$$

1. $y = -3x$; $\ln 3x = 2 \ln x$

$$\ln 3x = \ln x$$

$$3x = x^2, x \neq 0 \Rightarrow$$

$$3x = x$$
$$x = 0 - \text{не корень.}$$

$$x=3 \quad y=-9$$

2. $y = x - 4$; $\ln(-x + 4) = \ln x^2$

$$\ln(-x+4) = \ln x$$

$$-x + 4 = x^2$$

$$x = 2; y = -2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

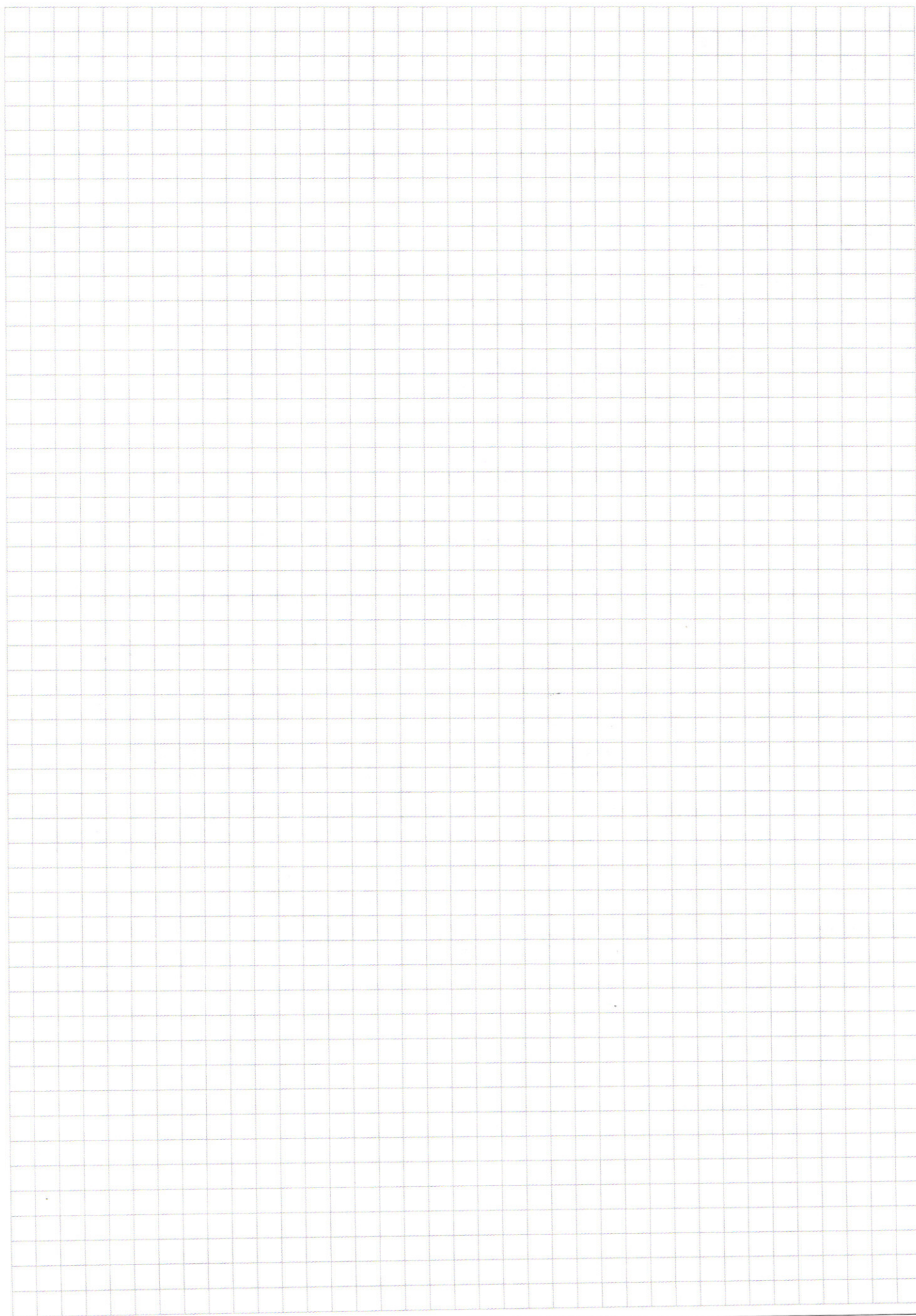
$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; \text{ r.k. } \& x > 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} < 0$$

~~Handwritten scribbles and symbols~~

Orbits: $(3, -9); (2, -2); (\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{\sqrt{17}-9}{2})$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ \underline{63} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9.3.2401 \\ \underline{21} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9.3.7.337^3 \\ \underline{343} \\ 288 \\ \underline{288} \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ + 196 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$-3(x^2 - 4x + 4)$$

$$y^2 + 2xy + 4y = 3(x^2 - 4x + 4)$$

$$(y+2)^2 + 2xy + 8 = 3(x-2)^2$$

$$y^2 + 2y(x+2) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D_1 = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x =$$

$$= 4x^2 - 8x + 4 =$$

$$= 4 \cdot (x-1)^2$$

$$y = -x - 2 \pm 2(x-1) =$$

$$= x - 4, -3x$$

$$1. y = -3x;$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^2 \ln(9 \cdot x^3)$$

$$3x = 9x^3$$

$$1 = 3x^2$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\cos 4x$$

$$2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos 5x$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{5\pi}{8}$$

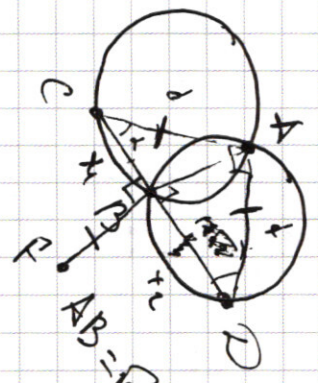
11111

11

$$-x-y-8-x+y-8=16$$

$$x=-16$$

$$-y-8+y-8$$



$$64 + 49 = 113$$

$$113$$

$$a^{\log_6 b} = b^{\log_6 a}$$

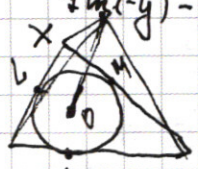
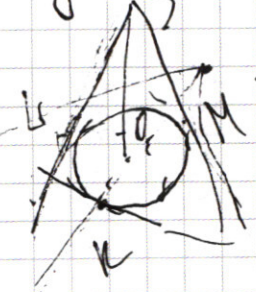
$$a^{\log_6 6} = 6^{\log_6 a}$$

$$\log_6 c \cdot \log_6 a = \log_6 c \cdot \log_6 a$$

$$\left(\frac{x \cdot 6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2 \ln 3 x^3}$$

$$(-y) \log_y e \ln 3x \cdot \ln \frac{x \cdot 6}{3} = 2 \ln 3 x^3 \cdot \ln x$$

$$(-y)^{\ln(-y)} \cdot x^{2 \ln x} \cdot x^{\ln y^2} = x^{2 \ln(-y)} - 4 \ln(-y) - 2 \ln x$$



133
313
331

$$\begin{array}{r} 529 \\ \times 23 \\ \hline 1587 \\ + 10580 \\ \hline 12057 \end{array}$$

$$\begin{aligned} d^2 + x_1^2 - \sqrt{2} \cdot d \cdot x_1 &= d^2 + x_2^2 - \sqrt{2} \cdot d \cdot x_2 \\ \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + x_1^2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 &= \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + x_2^2 - x_2^2 - x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BO^2} = 34$$

$$BC = 16$$

$$x + y + x - y$$

$$\begin{array}{r} 529 \\ \times 23 \\ \hline 1587 \\ + 10580 \\ \hline 12057 \end{array}$$