

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
- 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

- 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
- 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

- 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

графики $(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$, которая касается в I четверти.

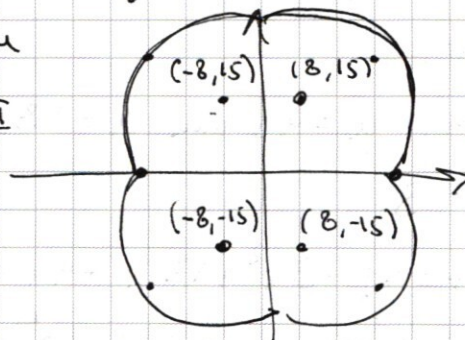
$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$ — окружность в центре с центром в т. $(8, 15)$ и радиус $\sqrt{a}$.

Если $a < 0$, то решения у системы нет,

если $a = 0$, то $(x-8)^2 + (y-15)^2 = 0$ — точка $(8, 15)$

$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ — «окружности» с центрами в точках $(\pm 8, \pm 15)$, которые не выходят за пределы своей четверти: дуги

рассмотрим «окружности» в II и IV четвертях.



При $a < 7^2$ они не имеют общих точек с квадратом.

При $a = 7^2$ они касаются его (в сумме, 2 точки).

При $7^2 < a \leq 113$ они пересекают его в 2 точки (в сумме 4 точки). При $a = 113$ «окружности» в II четверти пересекают его в т. В и С, а при $9^2 < a < 113$ — в точке на отрезке ВС.

При $113 < a < 289$ «окружность» пересекает квадрат в 2х точках, симметричных краем $x = -8$. (в сумме 4 точки)

При $a = 289$ «окружности» дуги «окружностей» пересекают квадрат в т. $(-16, 0)$ и $(0, 0)$. (2 точки)

При $a > 289$ — общих точек нет.

Рассмотрим окружности в I и IV четвертях.

При $a < 113$ "окружности" не пересекают квадрат

При $a = 113$ они пересекают его в т. C и D

При $113 < a < 289$ они пересекают его в двух точках на отрезке CD

При $a = 289$ они пересекают его в т. (0, 0)

При $a > 289$ они не имеют с квадратом общих точек.

"Окружности" имеют только 2 общие различные точки с квадратом при $a = 49$ и $a = 289$.

При $a = 49$ это точки $(-8; \pm 8)$

При $a = 289$ это точки $(0, 0)$ и $(-16, 0)$

В остальных случаях либо нет общих точек, либо нет точек.

Ответ: $a = 49$ или $a = 289$

Задача 3

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = y^2 + x^2 + 4 + 2xy + 4y + 4x - 4x^2 + 8x - 4 = (y + x + 2)^2 - 4(x - 1)^2 = 0$$

$$(y + x + 2)^2 = (2x - 2)^2$$

1) $y + x + 2 = 2x - 2$ Если $\text{sgn}(y + x + 2) = \text{sgn}(2x - 2)$

2) $y + x + 2 = 2 - 2x$ Если $\text{sgn}(y + x + 2) = -\text{sgn}(2x - 2)$

$\text{sgn}(a)$ это знак ~~а~~ числа a .

Поработаем с логарифмами

Т.к. Здесь есть логарифмы

$\ln(-y)$ и $\ln(xy^2)$, то $-y > 0$ и $xy^2 > 0$, т.е. $x > 0$,
 $y \neq 0$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^2}{-y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(x^2)} \quad z = -y, z > 0$$

$$\left(\frac{x^2}{z}\right)^{\ln z} = x^{2\ln(x^2)}$$

$$\frac{x^{2\ln z}}{z^{\ln z}} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln z^2} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln z}$$

$$x^{4\ln z} \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 0$$

$$\frac{x^{3\ln z}}{z^{\ln z}} = x^{2\ln x}$$

$$x^{3\ln z} = x^{2\ln x} \cdot z^{\ln z}$$

$$e^{3\ln x \ln z} = e^{2\ln^2 x} \cdot e^{\ln^2 z}$$

$$e^{3\ln x \ln z} = e^{2\ln^2 x + \ln^2 z}$$

т.к. функция e^x монотонно
возрастает на всей числовой прямой, то $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

$$3\ln x \ln z = 2\ln^2 x + \ln^2 z$$

$$\ln^2 x + \ln^2 x + \ln^2 z - 2\ln x \ln z - \ln x \ln z = 0$$

$$(\ln x - \ln z)^2 + \ln x (\ln x - \ln z) = 0$$

$$(\ln x - \ln z)(\ln x - \ln z + \ln x) = 0$$

$$(\ln x - \ln z)(2\ln x - \ln z) = 0$$

$$\begin{cases} \ln x - \ln z = 0 \\ 2\ln x - \ln z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \ln z \\ \ln x^2 = \ln z \end{cases}$$

т.к. функция $\ln x$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, то $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

$$\begin{cases} \ln x = \ln z \\ \ln x^2 = \ln z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ x^2 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases}$$

$x, z > 0$

1) $y + x + 2 = 2x - 2$ ($\text{sgn}(y + x + 2) = \text{sgn}(2x - 2)$)

$y = x - 4$

~~$x = -y$~~ $\begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - x \\ x^2 = 4 - x \end{cases}$

$\begin{array}{l} x = 4 - x \\ 2x = 4 \\ x = 2 \\ y = -2 \end{array}$		$\begin{array}{l} x^2 = 4 - x \\ x^2 + x - 4 = 0 \\ D = 1 + 16 = 17 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}$	$\Rightarrow$ но $x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$ и не подходит. $x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \quad y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} < 0$ $x > 0$
---	--	--	--

Есть 2 решения $(2; -2)$ и $(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2})$

Проверим, выполняется ли условие со знаками

$(2; -2): \quad \begin{array}{l} y + x + 2 = 2 \\ 2x - 2 = 2 \end{array}$

условие выполняется, $(2; -2)$ - решение системы.

$(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2}): \quad \begin{array}{l} y + x + 2 = \sqrt{17} - 3 > 0 \\ 2x - 2 = \sqrt{17} - 3 > 0 \end{array}$

условие выполняется, это решение системы.

2) $y + x + 2 = 2 - 2x$ ($\text{sgn}(y + x + 2) = -\text{sgn}(2x - 2)$)

$y = -3x$

$\begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x \\ x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ но т.к. $x > 0$,

то $x = 3, \quad y = -9$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проверим, выполнено ли условие

$$y + x + 2 = 3 - 9 + 2 = -4$$

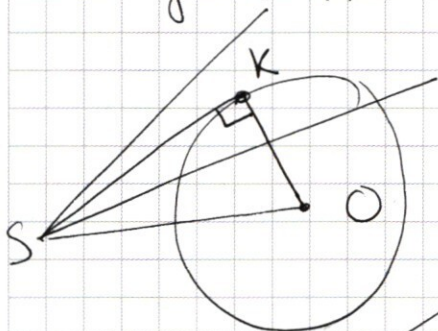
$$2x - 2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

Условия выполнены, это решение системы.

Ответ: $(2; -2); (3; -9); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2} \right)$

3

Задача 4.

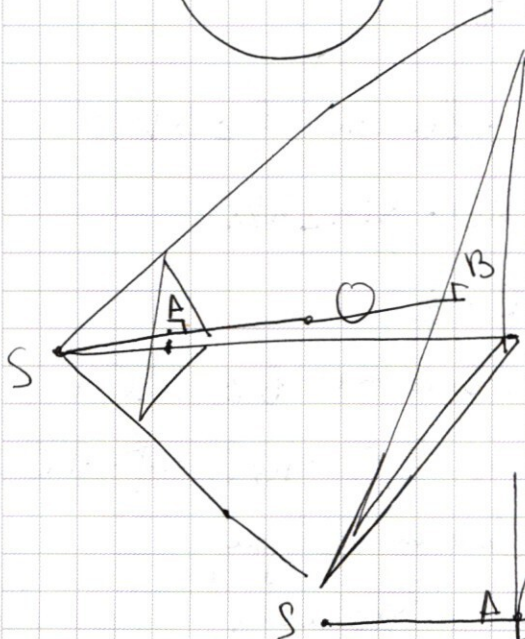


R - радиус сферы.

$\angle SKO = 90^\circ$ т.к. K - точка касания.

$$KO = R.$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{SO}$$



Пусть прямая SO пересекает
поверхность шара в т. A ;
а сечение шара плоскостью SB в т. B .

$$AO = OB = R$$

Сечения параллельны

и подобны друг другу с
коэффициентом подобия

$$k.$$

Тогда $\frac{SA}{SB} = \frac{1}{k}.$

т.к. сечение с меньшей площадью можно перевести

с помощью геометрии относительно м. S с помощью к
 в центре с данной мощностью.

То это преобразование поворота переводит м. А в м. В,
 и знаем $k \cdot SA = SB$.

$k^2 = \frac{16}{9}$ О множестве мощностей поворота фигура
 равно k^2 .

$$\frac{16}{9} = k^2 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

$$\frac{SA}{SA} = \frac{SB}{SA} = k = \frac{4}{3} = \frac{SA + AO + OB}{SA} = \frac{SA + 2R}{SA}$$

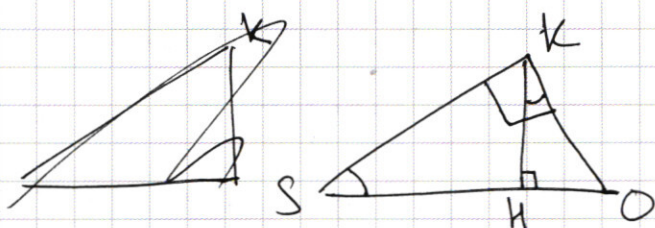
$$4 \cdot SA = 3 \cdot SA + 6R \quad SA = 6R.$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{SA + AO} = \frac{R}{6R + R} = \frac{1}{7}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

sin по аналогии

$$\sin \angle LSO = \frac{1}{7} \text{ и } \sin \angle MSO = \frac{1}{7}$$



Пусть KH - высота в $\triangle SKO$.

$$KO = KO \cdot \sin \angle KKO$$

$$\angle KKO = \angle KSO \quad KO = R \cdot \frac{1}{7}$$

Пусть K_1 и K_2 - высоты LH_1 и MH_2 - высоты в $\triangle SLO$ и
 $\triangle SMO$ соответственно. По аналогии $K_1O = K_2O = \frac{R}{7} = KO$
 и т.д. Все три основания высот лежат на одну
 сторону от м. O, то они совпадают. Значит,
 м-сть $KLM \perp SO$. Пусть S_{KLM} - площадь
 сечения уга м-ство KLM .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Сечение п-слоя $KLM \perp SO$.

По аналогии с сечением площадью q и 16
сечение п-слоя KLM равно сечению площадью q
с коэффициентом преломления n , и $\frac{S_H}{S_A} = n$.

$$\frac{S_{KLM}}{q} = n^2. \quad S_{KLM} = qn^2$$

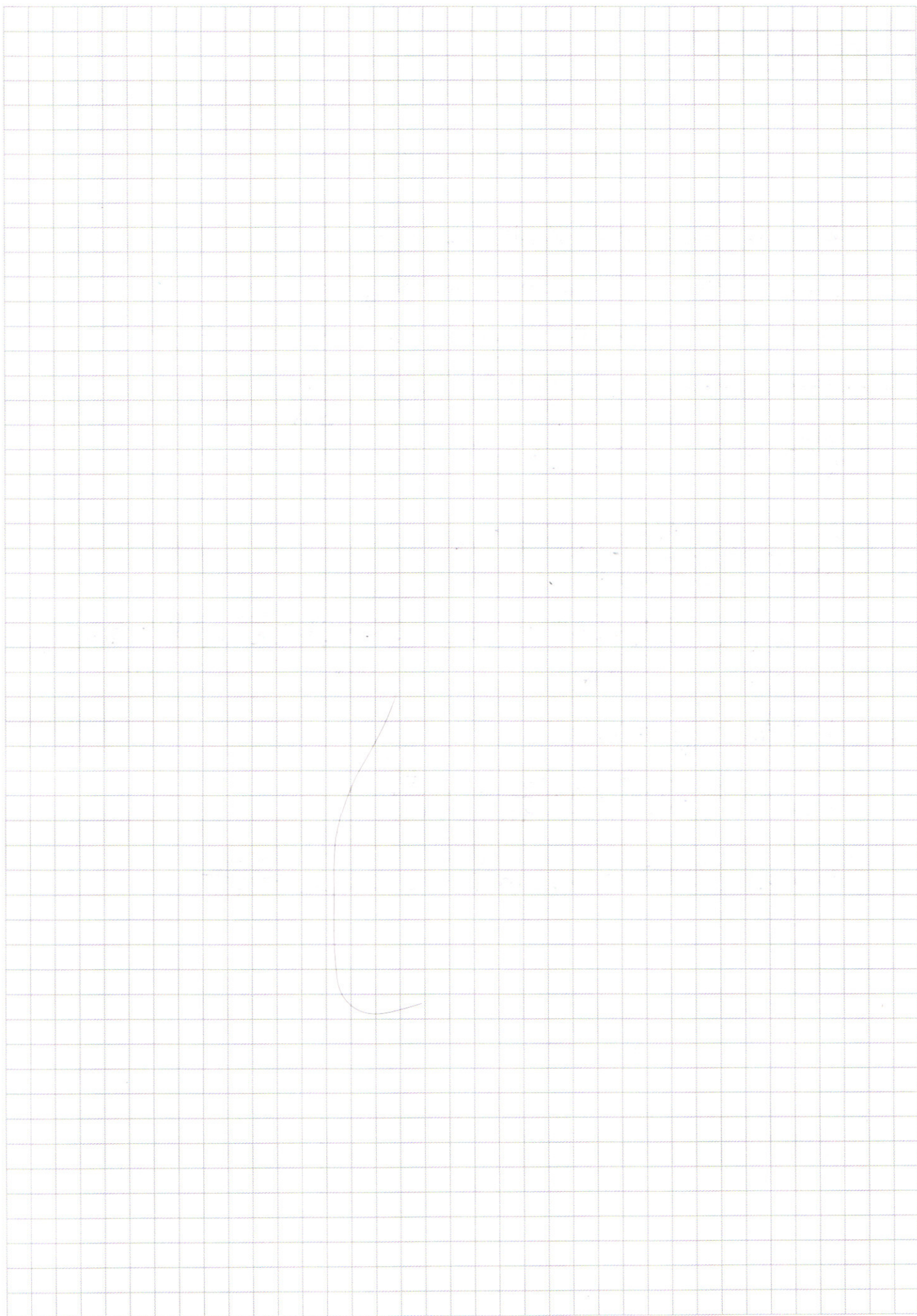
$$\frac{S_H}{S_A} = \frac{SO \cdot KO}{SO \cdot AO} = \frac{SO}{AO} =$$

$$\frac{S_H}{S_A} = \frac{SA + (AO - ON)}{SA} = \frac{6R + (R - \frac{R}{7})}{6R} = \frac{6R + \frac{6}{7}R}{6R} =$$

$$= 1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7} = n$$

$$S_{KLM} = q \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^2 = q \cdot \frac{64}{49} = \frac{576}{49}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{7} \quad \text{и} \quad S_{KLM} = \frac{576}{49}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\ln^2(4-x) = \ln x (3\ln(4-x) - 2\ln x)$$

$$0 = \ln x (3\ln(4-x) - 2\ln x) + \ln^2(4-x)$$

$$\ln \frac{64 - 3 \cdot 16x + 4 \cdot 3 \cdot 4x^2 - x^3}{x^2}$$

$$\ln \frac{64}{x^2} - \frac{3 \cdot 16}{x} + 3 \cdot 4$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

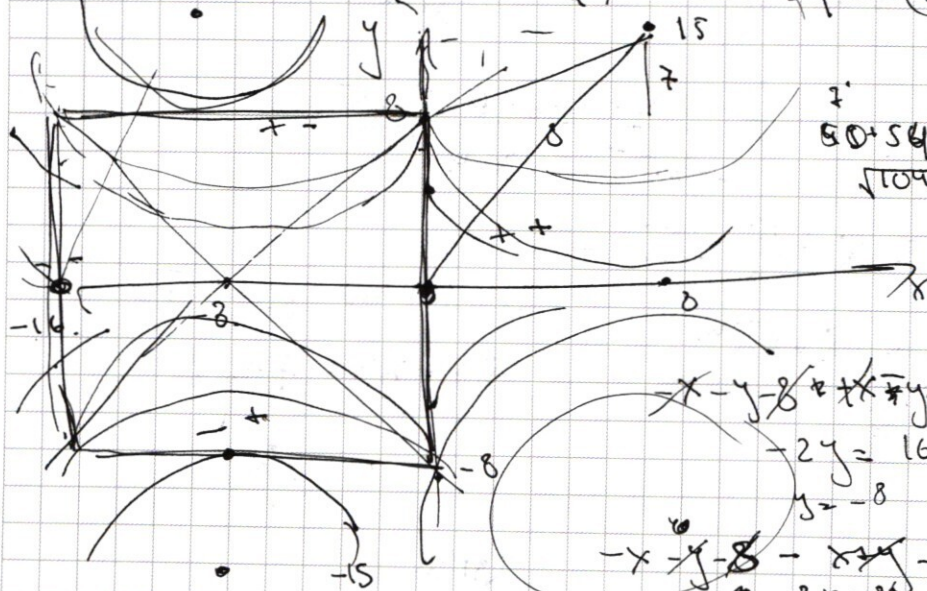
$$\cos(4x + 3x) + \cos 3x + \sin(4x + 3x) - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4} + 4x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \sin(4x) - \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cos(4x) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x$$

$$(\sin(4x) + 1) \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x (\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 1)$$



$$x + y + 8 = 0$$

$$y = -x - 8$$

$$50 \cdot 54$$

$$\sqrt{104} \approx 10.2$$

$$x - y + 8 = 0$$

$$y = x + 8$$

$$x + y + 8 + x - y + 8 = 16$$

$$2x = 0$$

$$x + y + 8 - x - y + 8 = 16$$

$$y = 8$$

$$-x - y - 8 - x - y - 8 = 16$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

$$\sqrt{2} \cos 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \cos 5x \sin 2x$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$2 \cos a \sin b$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

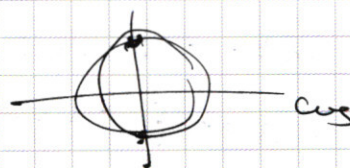
$$\sqrt{2} \cos 2x + \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cos 7,5x + \frac{\pi}{8} \cdot \cos 1,5x - \frac{\pi}{8} = 0$$

$$\begin{array}{r} 648297 \overline{) 7} \\ \underline{-63} \\ 18 \\ \underline{-14} \\ 42 \\ \underline{-42} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9261 \overline{) 7} \\ \underline{-7} \\ 22 \\ \underline{-21} \\ 16 \\ \underline{-14} \\ 21 \end{array} \quad \begin{array}{r} 64829 \overline{) 3} \\ \underline{-63} \\ 1323 \\ \underline{-126} \\ 62 \\ \underline{-56} \\ 63 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \overline{) 64829} \\ \underline{-7} \\ 189 \\ \underline{-14} \\ 49 \\ \underline{-49} \\ 0 \end{array}$$



$$\sin 2x + 9$$

$$\frac{2\pi}{4} + \pi \quad \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m$$

$$3x = \frac{5\pi}{4}$$

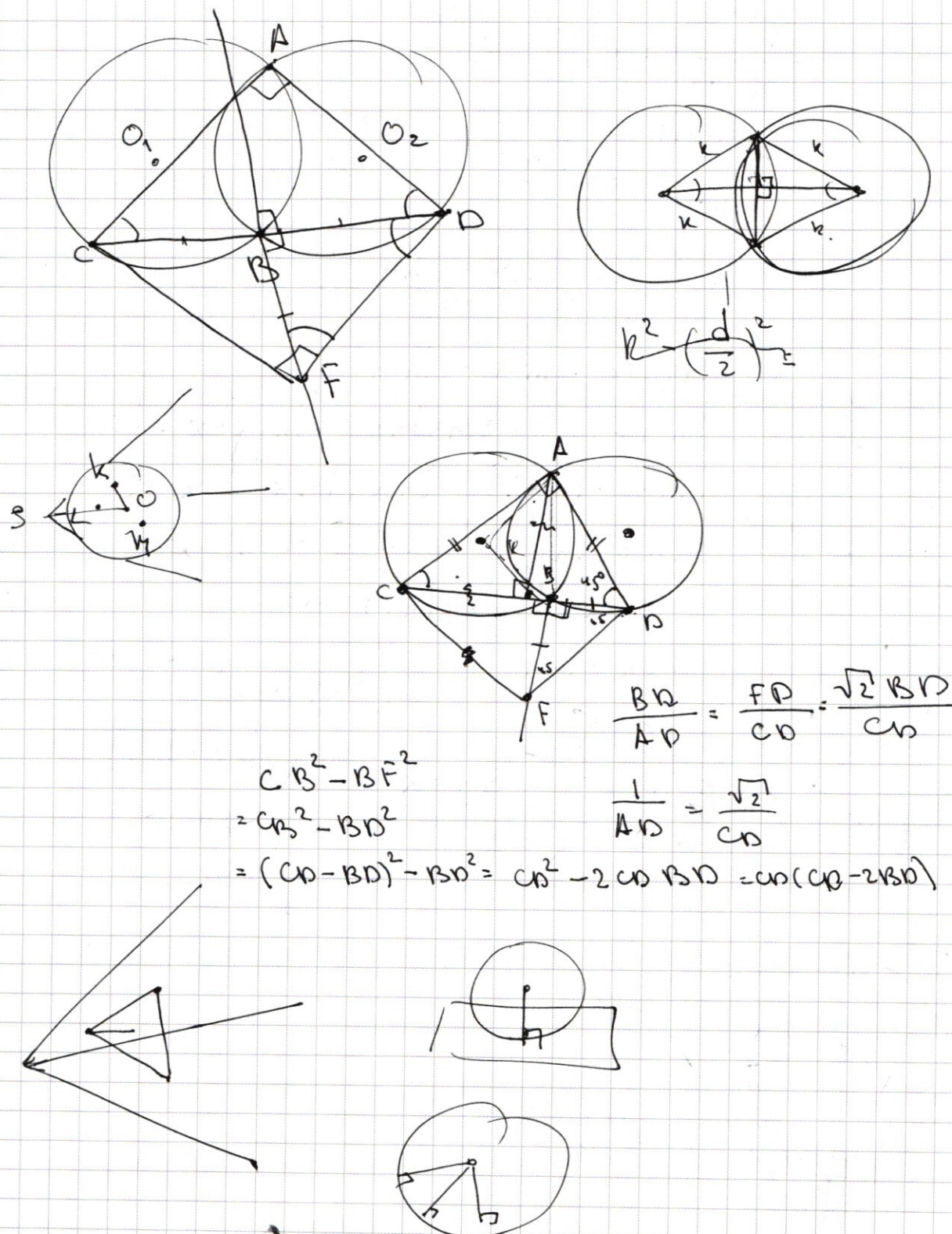
$$528 + 29 = 251 + 28$$

$$64 + 29 = 27 + 28$$

$$(8^{\circ} 0')$$

$$(51^{\circ} 8')$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left(\frac{x^7}{y}\right)^{\ln y} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$\frac{x^{3\ln y}}{y^{\ln y}} = x^{2\ln x} \cdot x^{\cancel{4\ln y}}$$

$$\frac{x^{3\ln y}}{x^{2\ln x}} = y^{\ln y} = e^{\ln^2 y}$$

$$\frac{e^{3\ln y \ln x}}{e^{2\ln^2 x}} = e^{\ln^2 y}$$

$$\begin{array}{r} 5 \text{ or } 6 \\ x \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 6 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

$$e^{3\ln y \ln x} - e^{\ln^2 y + 2\ln^2 x} = 0$$

$$3\ln y \ln x = \ln^2 y + 2\ln^2 x$$

$$\ln^2 y + \ln^2 x - 2\ln y \ln x - \ln y \ln x + \ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - \ln x)^2 - \ln x (\ln y - \ln x) = 0$$

$$(\ln x - \ln y)(\ln x - \ln y - \ln x) = 0$$

$$(\ln x - \ln y)(\ln y) = 0$$

$$\ln x = \ln y$$

$$(\ln y - \ln x) = 0 \text{ or}$$

$$(\ln y - 2\ln x - \ln x) = 0$$

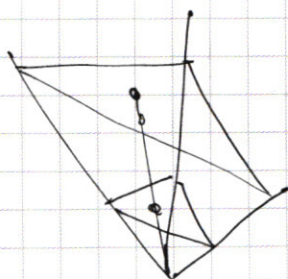
$$\ln y = 2\ln x^2$$

$$y = x^2$$

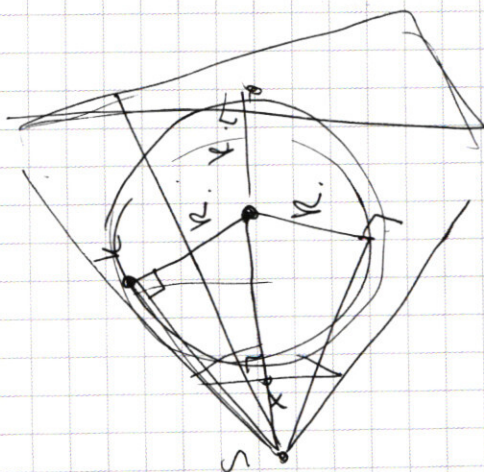
$$\begin{array}{r} 7/5 \\ x \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

$$x = 3x + 6x$$

$$x = 6x$$



$$\begin{array}{l} x=y \\ 4-x=x \\ x=2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x=x \\ y=2 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1/7 \\ x \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 64827 \overline{) 3} \\
 \underline{-6} \\
 4 \\
 \underline{-3} \\
 18 \\
 \underline{-18} \\
 02
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 21609 \overline{) 3} \\
 \underline{-21} \\
 06 \\
 \underline{-6} \\
 00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7203 \overline{) 3} \\
 \underline{-6} \\
 12 \\
 \underline{-12} \\
 00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2401 \overline{) 7} \\
 \underline{-21} \\
 30 \\
 \underline{-28} \\
 21
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 343 \overline{) 7} \\
 \underline{-28} \\
 63 \\
 \underline{-63} \\
 00
 \end{array}
 \quad
 49 = 7 \cdot 7$$

4 - only 7

1 3 3 3

1 1 3 9

$$C_8^4 (C_4^1 \cdot C_3^3 + C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1)$$

$\cos + \sin$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\begin{aligned}
 \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
 \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
 &= 2 \cos a \cos b
 \end{aligned}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 2 \cos^2 2x = 1$$

$$x^2 \ln x + 4 \ln y = \frac{x^2 \ln(-y)}{(-y) \ln(-y)}$$

$$(y + 2x + 2)^2 = y^2 + x^2 + 4 + 2xy + 4y + 4x - 4x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$(y + x + 2)^2 = (2x - 2)^2$$

$$y + x + 2 = 2x - 2$$

$$y = x - 4$$

or

$$y = -3x$$

$$\left(\frac{-x^2}{x-4} \right) \ln(4-x) = x^2 \ln(x \cdot (x-4)^2)$$

$$\begin{aligned}
 -2(x-1)^2 &= 0 \\
 4(x^2 - 2x + 1) &= 0
 \end{aligned}$$

$$3 \ln(4-x) - 2 \ln x$$

$$x^3 \ln(4-x) = \cancel{x^2 \ln(4-x)} \cdot x \cdot \ln x \cdot (4-x)$$

$$y = -3x$$

$$\left(\frac{x^2}{3x}\right)^{\ln x} = x^2 \ln(3x^3)$$

$$y = x - 4 < 0$$

$$0 < x < 4.$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln x} = x^2 \ln 3^2 x^3$$

$$x^2 \ln 3x \quad \ln \frac{3^2 x^3}{3} = \ln(3x)^3 - \ln 3$$

$$\frac{x^6 \ln 3x}{3 \ln 3x} = \frac{x^6 \ln 3x}{x^2 \ln 3}$$

$$x^2 \ln 3 + \ln 3 \cdot x^2 + \ln x$$

$$x \ln 3 - 3 \ln 3 = 3 \ln x - x \ln 3$$

$$\frac{x^7 \ln(-y)}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^2 \ln x \cdot x^4 \ln(-y)$$

$$\frac{x^3 \ln(-y)}{1} \cdot x^{-2 \ln x} = \cancel{x^4 \ln(-y)} \cdot (-y)^{\ln(-y)}$$

$$x \ln(-y) \cdot x^{-2} = (x^3 (-y))^{\ln(-y)}$$

$$x^{\ln(-y)^3 + \ln x^{-2}} = \left((-y)^{\frac{1}{\ln(-y)}}\right)^{-1} \quad \ln(-y) = \frac{1}{\ln \frac{1}{(-y)} e}$$

$$\frac{1}{(-y)^{\ln(-y)}}$$

$$\frac{1}{\ln(-y) e} = (-y)^a = e$$

$$(-y)^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{-y}$$

$$\frac{1}{e^{\ln^2(-y)}} =$$

$$x^{\ln \frac{(-y)^3}{x^2}}$$

$$e^{\ln x \cdot \ln \frac{(-y)^3}{x^2}}$$

$$e^{-\ln^2(-y)} = e^{\ln x \cdot \ln \frac{(-y)^3}{x^2}}$$

$$\cancel{\ln x^2} \cdot \cancel{\ln^2(-y)} = \ln x \cdot \ln(-y)^3$$

$$-\ln^2(-y) = \ln x (\ln(-y)^3 - \ln x^2)$$

$$\frac{\sqrt{17} + 1 - 2\sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{17} + 1}{2} < 9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos(2x + \pi) \quad \begin{cases} \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

(*) преобразуем с помощью (2)

$$\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 2 \cos\left(\frac{5x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{5x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Задача 5

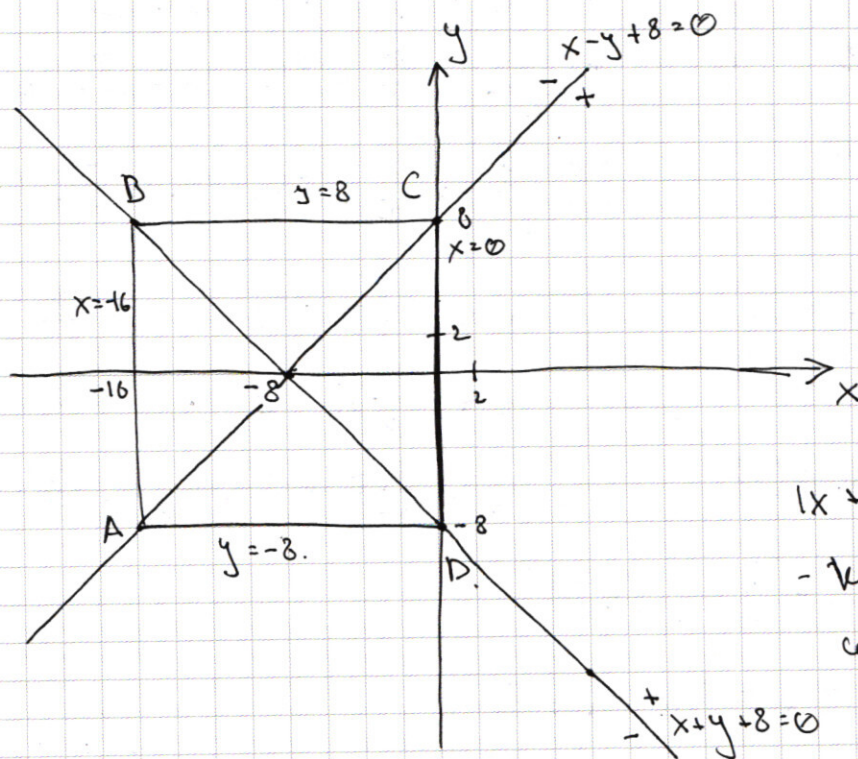
Вспомогательная линия является $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$.

$$1) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x+y+8+x-y+8 &= 16 \\ 2x &= 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x=0 \end{array} \right.$$

$$2) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x+y+8-x+y-8 &= 16 \\ 2y &= 16 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} y=8 \end{array} \right.$$

$$3) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} -x-y-8-x+y-8 &= 16 \\ -2x &= 32 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x=-16 \end{array} \right.$$

$$4) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} -x-y-8+x-y+8 &= 16 \\ -2y &= 16 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} y=-8 \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} 1. \quad x+y+8 &= 0 \\ y &= -x-8 \\ 2. \quad x-y+8 &= 0 \\ y &= x+8 \end{aligned}$$

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$
- квадрат ABCD
со сторонами 16.

$(|x|-8)^2 + (|y|-8)^2 = a$ получается из $(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$
наблюдением над ней на x и на y.

График этого уравнения получается с помощью симметрии относительно всех осей той части

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Разложить 64827 на множители.

$$64827 = 7^4 \cdot 3$$

В числе могут встретиться цифры 7, 3, 9, 1.

Другие комбинации множителей больше не 9.

В числе должно быть ровно 4 семерки, т.к.

также 1 цифра делится на 7, а 64827 делится на 7
четыре раза.

Произведение цифр, не равное 7, должно быть
равно 27. Привеи их 4 штуки. (4 цифры из 8 ~~возможны~~
можно равны 7)

Вариантами эти 4 ~~цифры~~ цифра могут быть
перестановками следующих вариантов:

$$1, 3, 3, 3 \quad \text{и} \quad 1, 1, 3, 9$$

Итак, все восьмизначные числа, кол-во которых надо
посчитать, могут состоять либо из цифр 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7,
либо из цифр 1, 1, 3, 9, 7, 7, 7, 7.

Рассчитаем кол-во чисел в первом случае

$$K_1 = \frac{8!}{3! \cdot 4!} - \text{кол-во перестановок } \overset{\text{цифры 7 в числе}}{13337777}$$

с учетом того, что 3 тройки и 7 4 семерки
одинаковые, и их перестановки между собой не увеличи-
вают кол-во чисел в первом случае.

Кое-то чисел бо втора сума

$$k_2 = \frac{8!}{2! \cdot 4!} - \text{считается аналогично } k_1,$$

$$\begin{aligned} \text{Всего чисел: } k_1 + k_2 &= \frac{8!}{3! \cdot 4!} + \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8!}{4!} \cdot \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = \\ &= \frac{8!}{4!} \cdot \frac{5}{4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 350 \end{aligned}$$

Ответ: 350.

Задача 2.

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b \quad (1).$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b. \quad (2)$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = (\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a) \quad (3)$$

Преобразуем уравнение, пользуясь (1), (2), (3)

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \cos(5x) \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x &= 2 \cos 5x \cos 2x + \\ &+ 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = \\ &= \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x + \sin 2x = 0 \\ \sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{array} \right.$$

Воспользуемся методом дополнительного угла.