

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Пусть у 8-значного числа цифры будут a, b, c, d, e, f, g, h . Тогда: $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 16875$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1$$

Рассмотрим несколько вариантов:

1) Имеем: 3 тройки, 4 пятёрки, 1 единица (8 всего)

Кол-во способов расставить 3 тройки на 8 мест:

C_8^3 . Кол-во способов расставить единицу на оставшихся 5 мест: C_5^1 . Пятёрки расставляются

однозначно. Имеем: $C_5^1 \cdot C_8^3 = \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{8!}{3!5!} = 5 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} =$

$$5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$$

2) $5 \cdot 5 = 25 > 9 \Rightarrow$ у нас имеется обязательно 4 пятёрки.

$3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow$ может быть одна 9

$3 \cdot 5 = 15 > 9 \Rightarrow$ таких случаев нет

$$\hookrightarrow abcdefgh = 9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$$

Кол-во способов расставить 3 на 8 мест: C_8^1 , 9 на

7 мест: C_7^1 , единицу на 6 мест: C_6^2 , пятёрки расставляются однозначно. Имеем: $C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 = \frac{8!}{1!7!} \cdot \frac{7!}{1!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} =$

$$= 1 \cdot 8 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 105 \cdot 8 = 840$$

$$\text{Всего способов: } 840 + 280 = 1120$$

Ответ: 1120

$$② \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2\cos 2x \cdot 2\sin \frac{\frac{\pi}{2} - 10x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2\cos 2x \cdot 2\sin \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2} - 5x\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin 2 + \cos 2 =$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2\cos 2x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos 10x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos 10x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x = \cos 10x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 3x + \cos 7x) - (\sin 3x + \sin 7x) = \cos 10x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (2\cos 5x \cos 2x - 2\sin 5x \cos 2x) = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$1) \cos 5x - \sin 5x = 0 \Rightarrow \cos 5x = \sin 5x$$

$$\sin 5x = \cos 5x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \Rightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2\pi k \\ 5x = \pi - \frac{\pi}{2} + 5x + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{или} \\ 0 = 2\pi k \Rightarrow k = 0 \end{cases}$$

$$2) 2\cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \Rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 5x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi k \\ \frac{\pi}{4} + 5x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$; $x = -\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}$; $x = -\frac{\pi}{28} - \frac{2\pi k}{7}$; $k \in \mathbb{Z}$

⑤
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

уравнение прямой $x=x$ Проходящая через $(-12;0)$
уравнение квадрата
уравнение с окружностями с радиусом $\sqrt{2}$

Начертим на графике:

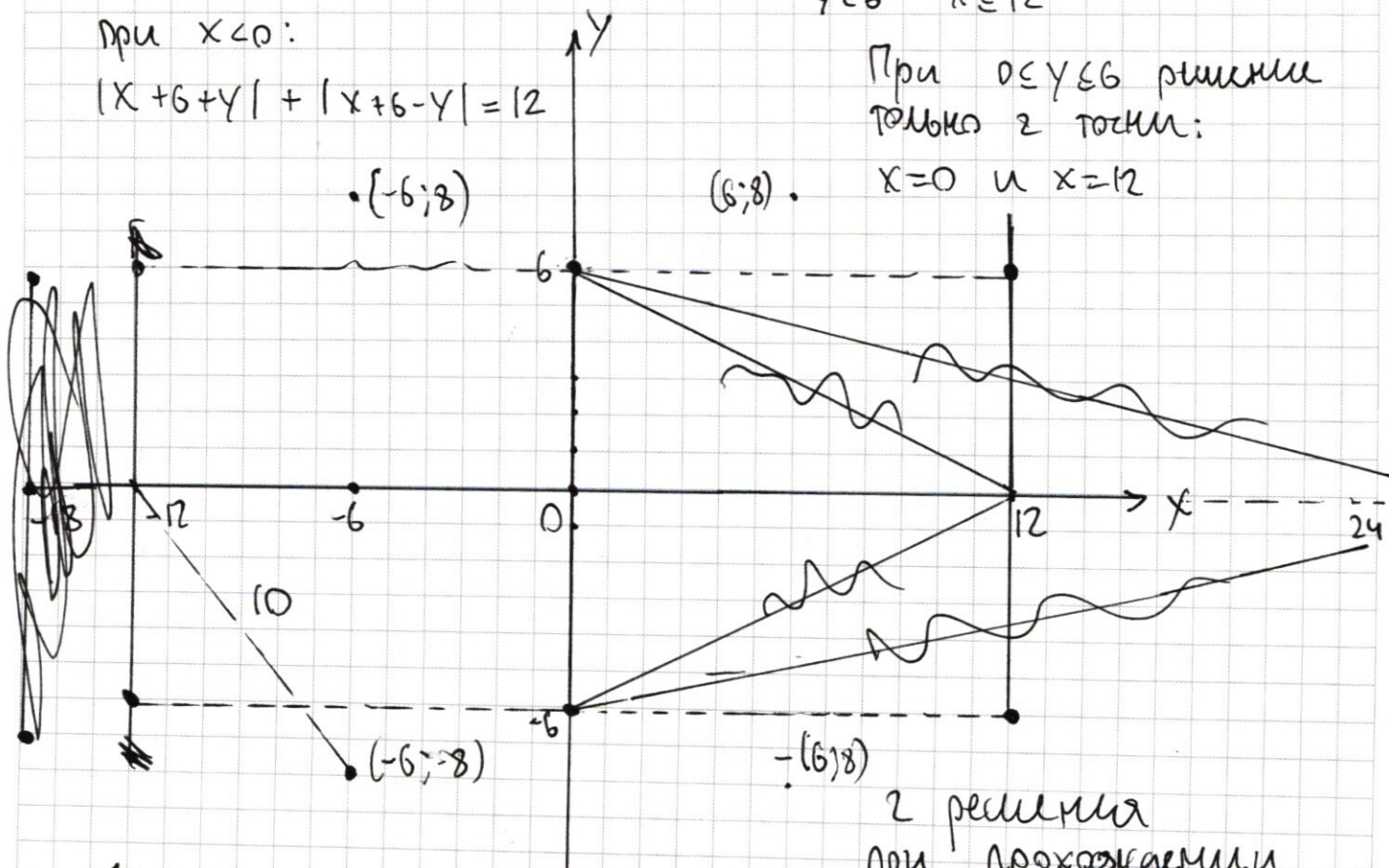
при $x < 0$:

$$|x+6+y| + |x+6-y| = 12$$

$$y \leq 6 \quad x \leq 12$$

При $0 \leq y \leq 6$ решения
только 2 точки:

$$x=0 \text{ и } x=12$$

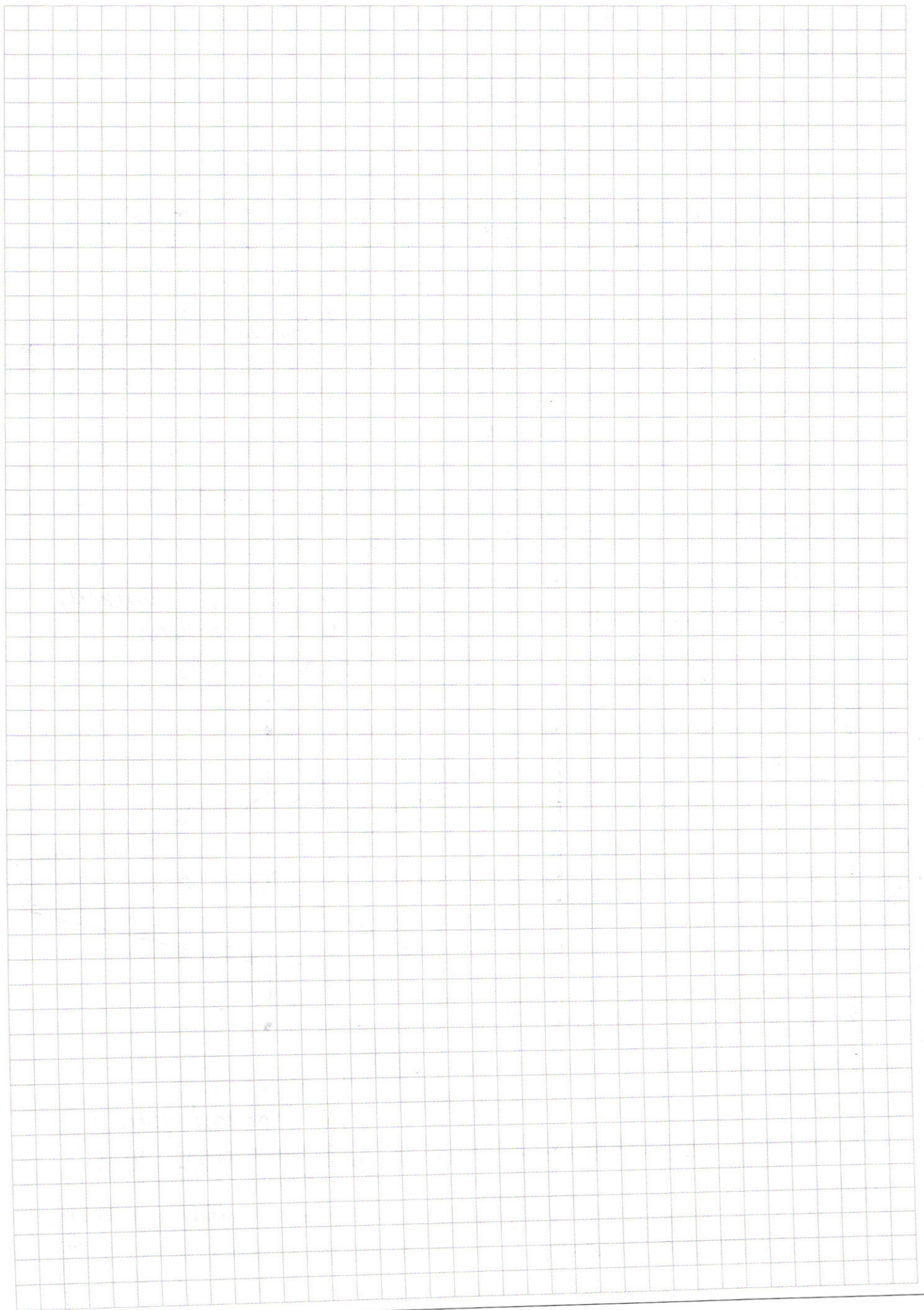


2 решения
при прохождении

тогда наша система имеет либо 6 реше
через точки $(-6;0)$ и $(12;0) \Rightarrow a = 6^2 + 8^2 = 100$

Ответ: $a=100$, $a=64$

кругов
и при
касании
оси абсцисс
 $a=8^2=64$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_{10} y} = (-x)^{\log_{10}(-xy)} = (-x)^{\log_{10}(-x) + \log_{10} y} = \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$-(x+2)^2 + 2(y-2)^2 = 4 + 8y$$

$$a^{\log_{10} a}$$

$$\log_{10} a = k$$

$$10^k = a \quad \uparrow k$$

$$10^{k^2} = a^k$$

$$a^k = a^{\log_{10} a} = 10^{k^2} = 10^{\log_{10}^2 a}$$

$$\text{ДРЗ: } -x > 0$$

$$-xy > 0 \quad x < 0$$

$$xy < 0 \quad y > 0$$

$$(-x)^{\log_{10}(-x)} = 10^{\log_{10}^2(-x)}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_{10} y} = \left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\log_{10} y} = 10^{\log_{10}^2(-x)} \cdot (-x)^{\log_{10} y}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2(-x)}\right)^{\log_{10} y} = 10^{\log_{10}^2(-x)}$$

$$\left(-\frac{x^3}{y^2}\right)^{\log_{10} y} = \left(10^{\log_{10}(-x)}\right)^{\log_{10}(-x)} = 10^{\log_{10}^2(-x)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$$

Рассмотрим данное квадратное уравнение относительно y

$$D = (x+8)^2 - 2 \cdot 4(-x^2 - 4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4} \Rightarrow$$

$$y = \frac{4x+16}{4} = x+4 \quad \textcircled{1}$$

$$y = \frac{-2x}{4} = -\frac{x}{2} \quad \textcircled{2}$$

~~$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_{10}(-\frac{x}{2})} = 10^{\log_{10}^2(-x)} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^{\log_{10}(-\frac{x}{2})} \\ & \left(-\frac{x^3}{y^2}\right)^{\log_{10}(-\frac{x}{2})} = 10^{\log_{10}^2(-x)} \end{aligned}$$~~

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_{10} y} = (-x)^{\log_{10}(-xy)} \quad (2) \quad y = -\frac{x}{2} \quad x = -2y$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\log_{10} y} = (2y)^{\log_{10}(2y^2)}$$

Ответ: ~~8~~

$$x = -2; y = 2$$

$$(16y^2)^{\log_{10} y} = (2y)^{\log_{10} 2y^2}$$

$$(4y)^{\log_{10} y^2} = (2y)^{\log_{10} 2y^2}$$

$$2^{\log_{10} y^2} \cdot (2y)^{\log_{10} y^2} = (2y)^{\log_{10} y^2} \cdot (2y)^{\log_{10} 2} : (2y^{\log_{10} y^2})$$

$$2y^{\log_{10} y^2} \neq 0 \quad (y > 0)$$

$$2^{\log_{10} y^2} = (2y)^{\log_{10} 2} \quad y^{\log_{10} y} = (2y)^{\log_{10} 2} \quad (\text{прологарифми, по} \\ \text{осн. } \log_{10} 2y)$$

$$\log_{2y} 4^{\log_{10} y} = \log_{10} 2$$

$$2 \log_{10} y \log_{2y} 2 = \log_{10} 2$$

$$2 \cdot \frac{\log_c y}{\log_c 10} \cdot \frac{\log_c 2}{\log_c 2y} = \log_{10} 2$$

$$2 \log_{2y} y = \log_{10} 2 = \log_{10} 2$$

$$\log_{2y} y = \frac{1}{2} \quad (2y)^{\frac{1}{2}} = y \quad \sqrt{2y} = y \quad y^2 = 2y : y \neq 0$$

$$y = 2 \Rightarrow x = -2$$

$$(1) \quad y = x + 4 > 0 \Rightarrow -4 < x < 0$$

$$x = -2:$$

$$\left(-\frac{x^3}{(x+4)^2}\right)^{\log_{10}(x+4)} = 10^{\log_{10}^2(-x)} \quad (2^{\log_{10}^2} = 10^{\log_{10}^2 2} \checkmark)$$

прологарифм. по $\log_{10}$

у данной ор-ции
корень $(-2; 2)$

$$y = 2$$

решение

$$\log_{10}(x+4) \log_{10}\left(-\frac{x^3}{(x+4)^2}\right) = \log_{10}^2(-x) = \log_{10}(-x) \cdot \log_{10}(-x)$$

$$\log_{10}(x+4) \left(\log_{10}\frac{1}{(x+4)^2} + \log_{10}(-x)^3\right) = \log_{10}^2(-x)$$

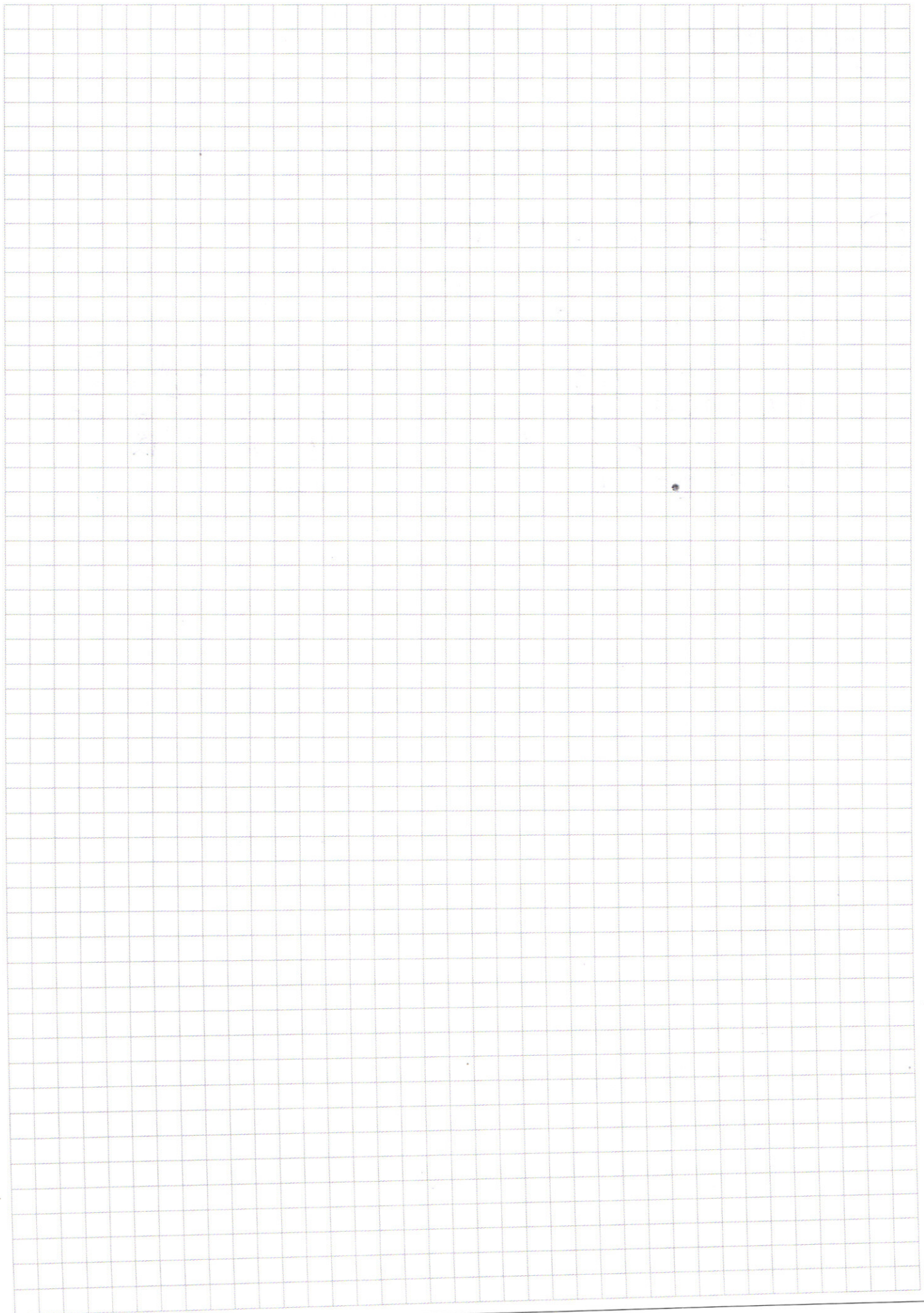
$$-2 \log_{10}^2(x+4) + 3 \log_{10}(-x) \log_{10}(x+4) - 2 \log_{10}(-x) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi l = \frac{\pi}{4} + 2\pi l \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3} \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$;
 $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{7}$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$;
 $k \in \mathbb{Z}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и Пусть N и P - точки касания сферы с плоскостями, ~~перпендикулярных~~

перпендикулярных SO . Обозначим данные плоскости как ABC и $A_1B_1C_1$

т.к. $ABC \parallel A_1B_1C_1$

(они перпенд. одной прямой), то

$AB \parallel A_1B_1$; $BC \parallel B_1C_1$; $CA \parallel C_1A_1$ (св-во паралл. плоск.)

Тогда, в силу параллельности, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow$

$$K = \sqrt{\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \quad AB = 2x, A_1B_1 = 3x, BC = 2y, B_1C_1 = 3y \\ CA = 2z, C_1A_1 = 3z$$

$SK = SL = SM$ (св-во впис. сферы в 3хгранный угол)

в силу параллельности пл. ABC и $A_1B_1C_1$ пирамиды

$$S_{ABC} \sim \triangle SA_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{SP}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SP}{SP+2r} = \frac{2}{3} \quad 3SP = 2SP + 4r$$

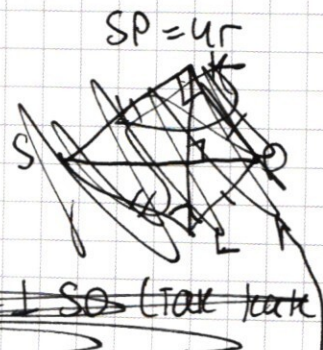
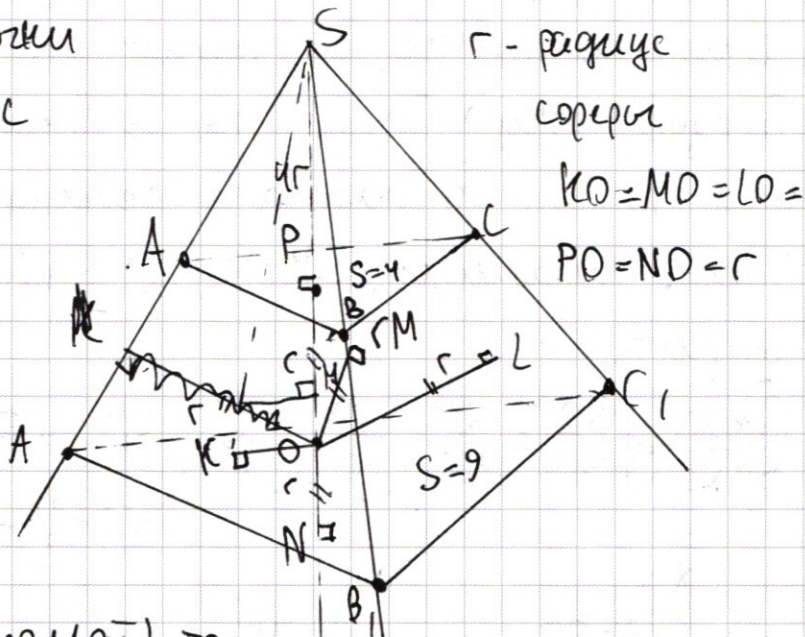
$\triangle SOK$ - прямоугол. т.к. $OK \perp SAB_1 \Rightarrow$

$$SO = SP + PO = 4r + r = 5r$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5} \quad \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

$\triangle SKO = \triangle SLO = \triangle SMO$ (по 3 сторонам). Тогда $KL \perp SO$ (так как

~~мы соединили вершины 2 оснований и получили ромб~~
~~это следует из симметрии~~



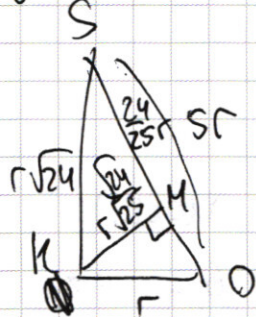
9

~~Аналогично получаем, что~~

Из равенства Δ тр. получаем, что ~~K, L, M~~
 плоскость $KLM \parallel ABC \parallel A_1B_1C_1$ (так как проекции
 точек K, L, M на SO - это одна точка, т.к. все треуго-
 льники равны, а значит их высоты попадают
 в одну точку) Тогда эти 3 высоты $\perp SO$, а значит
 они лежат в плоскости, перпендик. SO . $\Rightarrow \parallel ABC$.
 Тогда, пирамиды $SKLM$ и $SA_1B_1C_1$ также подобны.
 Значит:

$$\frac{S_{KLM}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{SO}{SP} = \frac{SP}{4r} = \frac{5}{4} \Rightarrow S_{KLM} = \frac{5}{4} \cdot 4 = 5$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin(\frac{1}{5})$
 $S_{KLM} = 5$



$$KM = \frac{r \cdot r\sqrt{24}}{5r} = r\sqrt{\frac{24}{25}}$$

$$SM = r = \sqrt{24 - \frac{24}{25}} = \frac{24}{25}r$$

$$\frac{SP}{SM} = \frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \frac{5r}{5r - \frac{24}{25}r} = \frac{125}{101} \Rightarrow S_{KLM} = 4 \cdot \frac{125}{101} = \frac{500}{101}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) O_1, O_2 - центры
окр.

по св-ву пересек
окр $O_1, O_2 \perp AB$,

$K = O_1 O_2 \cap AB$

и $AK = BK$.

Рассмотрим $\triangle CAP$.

AK - высота из прямого угла $\angle CAB \Rightarrow \angle KPA = \angle CAK = 2$
(по св-ву высоты в прям. тр.). $\angle CAB = \angle CPB$ (опр. на 1 окруж.)

$\Rightarrow \angle CPB = \angle CAB = \angle CAK = 2 \Rightarrow \angle APC = \angle CPB \Rightarrow CP$ - биссектр.

$\angle APB \Rightarrow \angle CBV = \angle CA$ ~~(св-во дуги)~~ $\Rightarrow CB = CA$ (равные

хорды стягивают равные дуги). Т.к. $KP \perp AB, AK = BK \Rightarrow$

$\triangle ABP$ - р/б $\Rightarrow AP = PB$. $AP = PB, CB = CA, CP$ - общая $\Rightarrow$
(кр - медиана и бисс.) $\triangle CAP = \triangle CBP \Rightarrow \angle CBP = 90^\circ = \angle CAP$

Тогда наш перпендикуляр к точке B - это продолжение
 $BP \Rightarrow B, F, P$ лежат на прямой BP

Заметим, что в силу симметрии ~~на~~ отрезок AB делит
дуги на одинаковые ~~дуги~~ ^{дуги}: $\angle ABV = \angle APB$. Так
как радиусы равны, то $\angle ACB = \angle AOB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ (опр. на
равные дуги в окруж. с одинак. радиусом). $\triangle PBD$ - р/б
с прямым углом $\angle FBD \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ, \angle FDA = \angle$
 $\angle BDF + \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \triangle PDF$ - прямоуго. $\Rightarrow PB = BP = BD$ (т.к. $FB = BD$
по св-ву
прям. тр.)

$$\textcircled{6} \quad CF^2 = BF^2 + CB^2 = CB^2 + BP^2 = CP^2 = (2 \cdot 13)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = 26 \quad (\text{т. Пифагора}) \quad CA = CB = 10$$

$$2) \quad FB = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24 \quad (\text{т. Пифагора}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{FB} = BD = BP = 24$$

$$\sin \angle FCB = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \angle FCB = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$\angle ACF = \angle ACD + \angle FCB = 45^\circ + \angle FCB$$

$$\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \angle FCB) = \sin \angle FCB \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \angle FCB =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{13} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 10 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} = 5 \cdot 17\sqrt{2} = 85\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } CF = 26, S_{ACF} = 85\sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 26 \\ \underline{25} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{30} \\ 5 \end{array}$$

$$27 \cdot 25 \cdot 25 =$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 500 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times 27 \\ \hline 4375 \\ 1250 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\sin 2 \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(2 - \beta) + \sin(2 + \beta))$$

$$|x - 7| + |x - 5| = 12$$

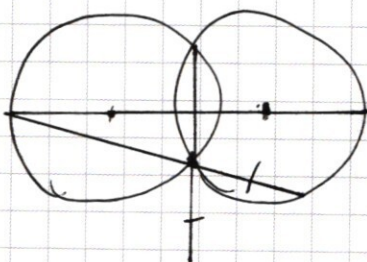
$$-\sqrt{2} \cdot (2 \cos^2 5x - 1) = -2\sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2}$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$256 \log_{10} 4 = 8 \log_{10} 32$$

$$2 \log_{10} 4 = 2 \cdot 2 \log_{10} 2 = 4 \log_{10} 2 = 2 \log_{10} 4$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cos(10x) \right) = \\ & = \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) \right) \\ & = \sqrt{2} \cdot 2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 3x}{2} \cos \frac{\frac{3\pi}{4} - 17x}{2} \end{aligned}$$



$$\sqrt{2} \cos 2x = \frac{\cos 10x}{\cos 5x - \sin 5x} = \frac{1 - 2\sin^2 5x}{\cos 5x - \sin 5x}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$\cos(5x - 2x) - \cos(5x)$$

$$\cos(5x + 2x) - \sin(5x + 2x) + \cos(5x - 2x) - \sin(5x - 2x) = \sqrt{2}$$

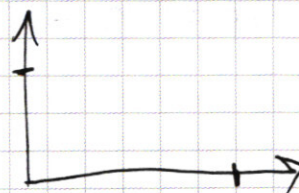
$$2\cos 5x \cos 2x - 2\sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x = \cos \frac{\pi}{4} \cos 10x = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 10x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 10x\right) \right)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12$$

$$x - 6 \leq 6 \quad x \leq 12 \quad y \leq 6$$



$$2y^2 - y(x + 8) - x^2 - 4x = 0$$

$$D = (x + 8)^2 - 8(-x^2 - 4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x + 8)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x + 8 \pm (3x + 8)}{4}$$

