

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИ

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^{3+2\lg y} = x^{\lg x}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg(xy)}$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$3 = x^{\lg x} \cdot x^{\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$3^{\lg 3} \cdot y^{2\lg y}$$

$$y^{2\lg y} = \frac{3}{3^{\lg 3}}$$

$$y^{2\lg y} = 3^{1-\lg 3}$$

$$2\lg y = \lg_y 3$$

$$\frac{2}{\lg_y 10} = \lg_y 3$$

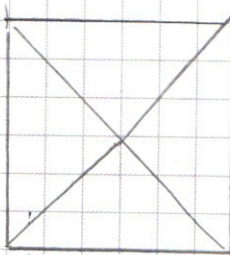
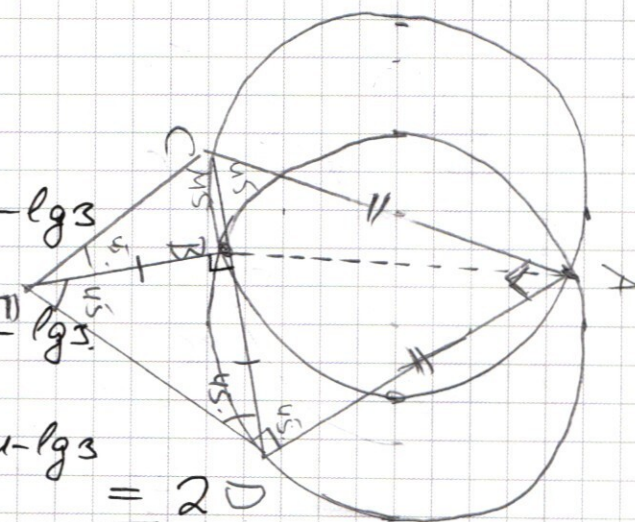
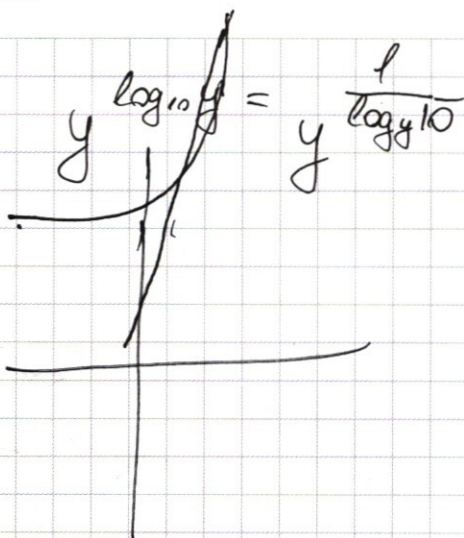
$$\lg_y 10 \cdot \lg_y 3^{1-\lg 3} = 20$$

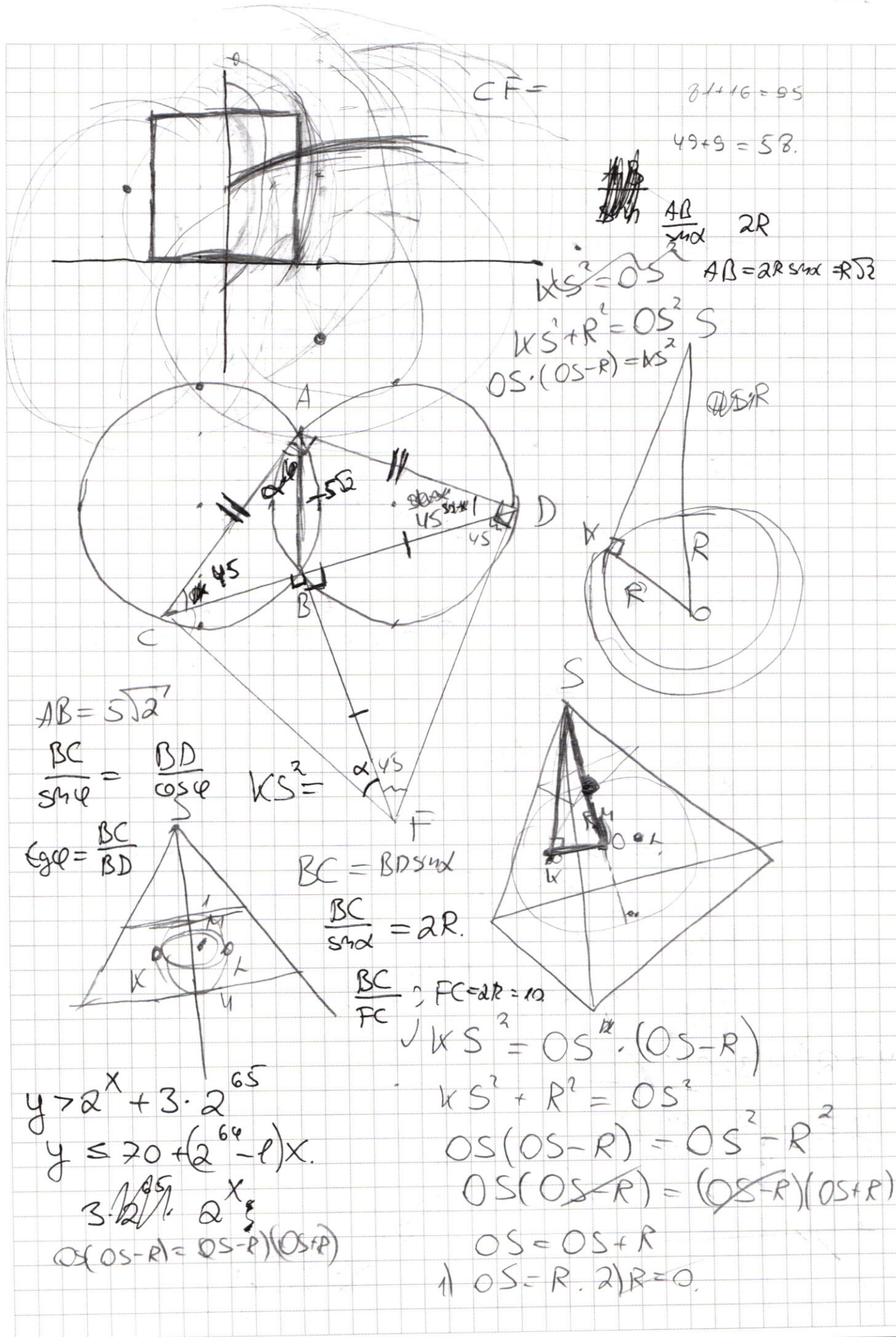
$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{64}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{64} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{64} = 70 + (2^{64} - 1)x$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{3}\right) \lg 3 = y^2 \lg(3y)$$

$$\frac{y^5 \lg 3}{3 \lg 3} = y^2 (\lg 3 + \lg y)$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg(xy)$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \end{cases}$$

$$1) |y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$a) y-3-x \geq 0.$$

$$y \geq x+3$$

$$b) y-3+x \geq 0$$

$$y \geq -x+3$$

$$a) \cup b)$$

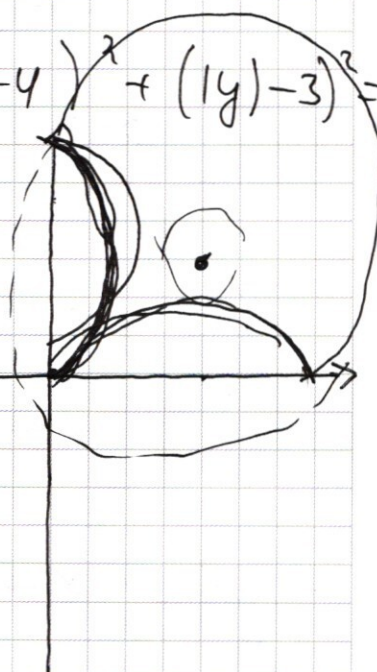
$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$x > 0; xy > 0$$

$$2) (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9$$



$$a) \cup b)$$

$$y-3-x = y-3-x = 6$$

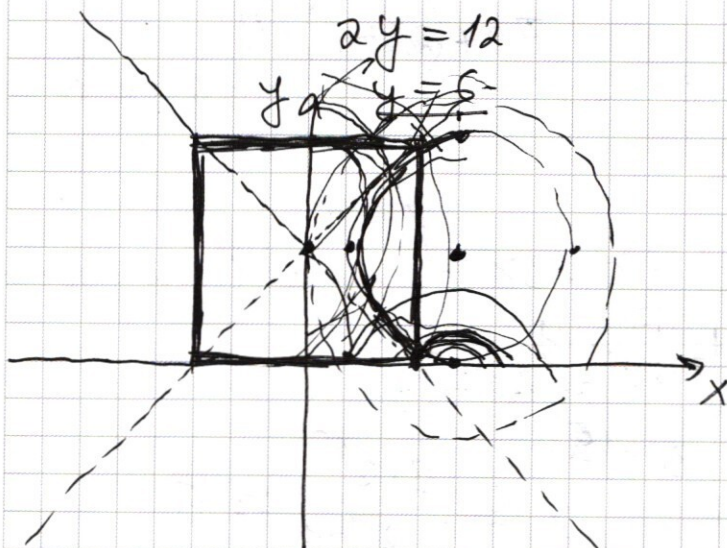
$$x = -3.$$

$$a) \cup b): -y+3+x + y-3+x = 6$$

$$x = 3.$$

$$a) \cup b): -y+3-x - y+3-x = 6$$

$$y = 0.$$



$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 \sin 14 \sin 8x - (2 \sin 8x \cos 14x) = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 \sin 8x (\sin 14x + \cos 14x) = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\sin 14x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$-2 \sin 8x \cdot \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 8x (\tan 14x + 1) = \sqrt{2}$$

$$\sin 8x (\tan 14x + 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-2 \sin 8x (\sin 14x + \cos 14x) = \sqrt{2}$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$70 + (2^{32} - 1)(2^{32})$$

$$1) x=1; f$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$f' = 2^x \ln 2$$

$$g' = 2^{64} - 1$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \sqrt{2} \sin 3x \sin 11x.$$

$$\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\cos 11x} - \tan 11x \cdot \frac{1}{\cos 3x} - \tan 3x \cdot \frac{1}{\cos 11x} =$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2} \tan 3x \tan 11x. \quad X=4: 16 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \sin 11x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 3x \sin 11x = 0.$$

$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x - (\sin 11x (1 - \sqrt{2} \sin 3x) -$$

$$- \sin 3x = 0. \quad x=1 \quad \begin{array}{c|c} F & g \\ \hline 2+3 \cdot 2^{65} & 70+(2^{64}-1) \end{array}$$

$$X=2: 70+(2^{64}-1)x = 3 \cdot 2^{65} \quad x \approx \frac{3 \cdot 2^{65}}{2^{64}-1} \approx 6.$$

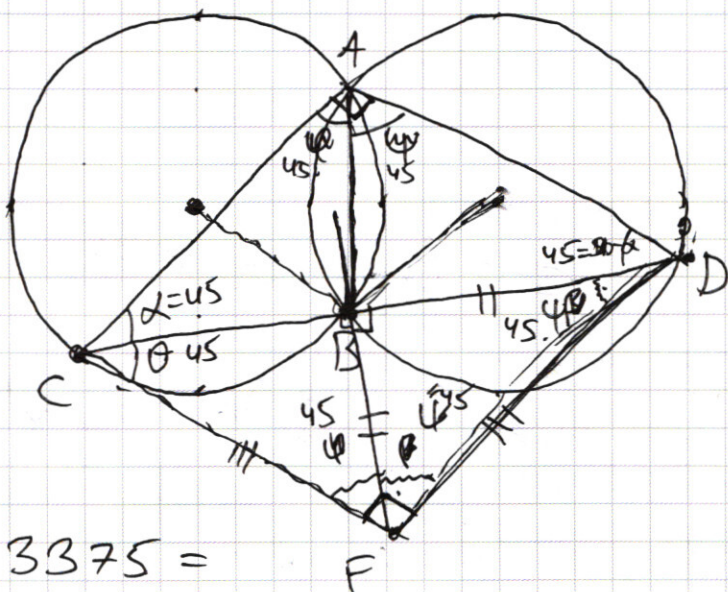


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 & 3 - 2 \lg y = \log_y x^{\lg x} \\
 & \sim 2 \\
 & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 8x \sin 14x - 2 \sin 8x \sin 14x = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 8x \sin 14x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 8x \sin 14x - 2 \sin 8x \cos 8x = \sqrt{2} \cos 14x. \\
 & -2 \sin 8x (\sin 14x + \cos 14x) = \sqrt{2} \cos 14x. \\
 & \cos 14x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 3x \cos 11x - \sin 3x \sin 11x) \\
 & \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg(xy)} \quad \left| \quad 3 - \frac{2}{\lg y 10} = \log_y x^{\lg x} \right. \\
 & \left. \begin{aligned} & x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ & x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 - 12y = 0. \\ & (x-y)^2 - 4y^2 - 12y - 4x + 36 = 0. \\ & (x-y)^2 - (2y+3)^2 - 4x + 36 = 0. \\ & x^2 - x(2y+4) - 3y^2 + 12y = 0. \\ & D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = \\ & = 16y^2 - 32y + 16 = 4(y-1)^2 \\ & x_{1,2} = \frac{2y+4 \pm 2(y-1)}{2} = \begin{cases} \frac{2y+4+2y-2}{2} = \frac{4y-2}{2} = 2y-1 \\ \frac{2y+4-2y+2}{2} = 3 \end{cases} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (x-3)(x-2y+1) = 0. \\
 & 1) x = 3
 \end{aligned}$$



$$3375 =$$

$$= \begin{array}{r} 3375 \quad | \quad 5 \\ \hline 30 \quad | \quad 675 \quad | \quad 5 \\ \hline 37 \quad | \quad 17 \quad | \quad 135 \quad | \quad 5 \\ \hline 35 \quad | \quad 15 \quad | \quad 10 \quad | \quad 27 \\ \hline 25 \quad | \quad 25 \quad | \quad 35 \\ \hline 25 \quad | \quad 25 \end{array}$$

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Ка I имеет

~~3, 5, 2, 3~~

$3 \cdot 5^3$

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 3 \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 3$$

$$C_8^3 =$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 56 \\ + 56 \\ \hline 336 \\ + 280 \\ \hline 3136 \end{array}$$

$$KS^2 = R^2 + SO^2$$

$$KS^2 = (OS - R) OS$$

$$\frac{8!}{2 \cdot 3} = 2688$$

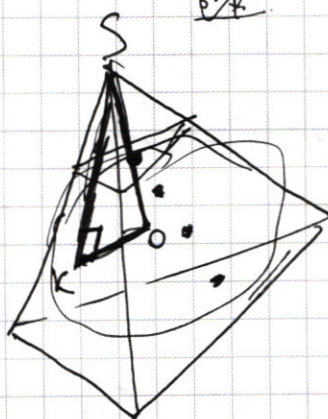
$$b_1 + b_2 + \dots + b_8 = 3$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56$$

$$\frac{8!}{6! \cdot 2!} =$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ + 112 \\ \hline 224 \\ + 112 \\ \hline 12544 \end{array}$$



$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin(90 - \alpha)} = 2R$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$AB = \sqrt{2} R = \sqrt{2} \cdot 5$$

$$AC = AD$$

$$\frac{BC}{\sin \varphi} = 2R$$

$$\frac{BD}{\cos \varphi} = 2R$$

$$\tan \varphi = \frac{BC}{BD} = \frac{BC}{BF}$$

$$2\varphi + \varphi + \theta = 180$$

$$2\varphi + \theta = 90$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg(xy) \quad 3 + 2 \lg y = \log_y y^x \lg x.$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = \frac{y^{2 \lg x}}{y^{2 \lg y}}$$

$$l^2 = H(H - R) \quad H = R; \quad R = 0; \quad l = 0$$

$$l^2 = H^2 - R^2$$

$$y^{2 \lg x} = 0. \quad \text{нет решений.}$$

$$\frac{y^3}{x^{\lg x}} = \frac{y^1}{y^{2 \lg y}}$$

$$y^{\log_y x \lg x} \quad \lg y = \frac{1}{\log_y 10}$$

$$y^3 \cdot y^{2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$y = \log_{10} x$$

$$y^{3 + 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

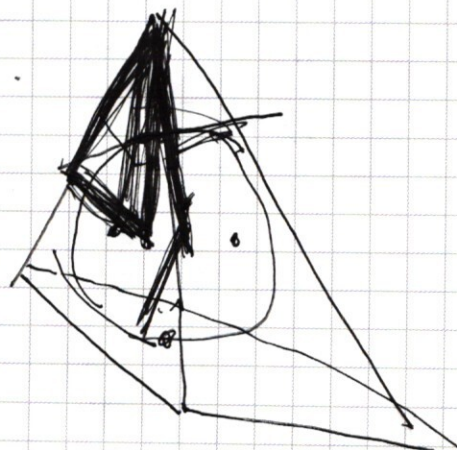
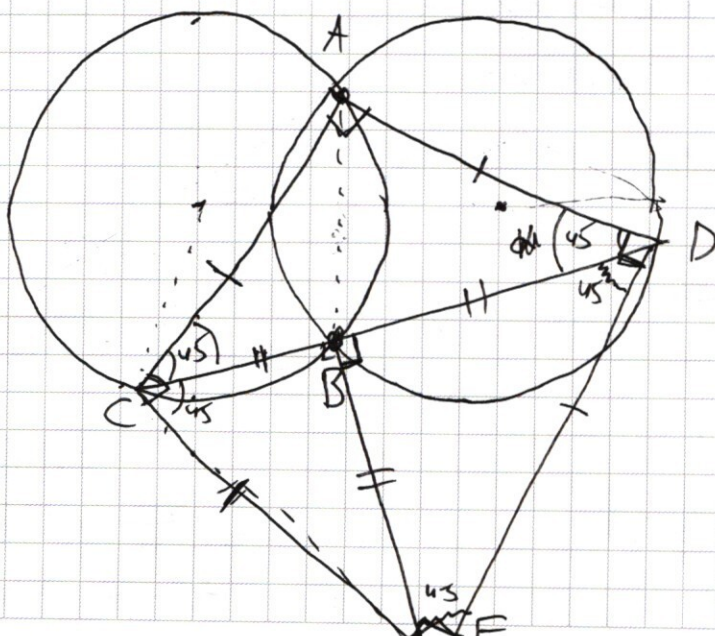
$$3 + 2 \lg y = \log_y x$$

$$AB = \sqrt{2} - 5$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{AB}{\cos \alpha} = 2R$$

$$\lg x = 1$$



$$\sin \frac{\pi}{4} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-\sqrt{2} \sin \left(11x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(11x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x.$$

$$2 \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4} - 11x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{14x - \frac{\pi}{2}}{2} = \cos 14x.$$

$$2 \sin \left(-8x \right) \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x.$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin \frac{14x}{2} \cos \sin \frac{8x}{2} - \left(2 \sin \frac{8x}{2} \cos \frac{14x}{2} \right) = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\tan 7x = -1.$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$KS^2 = OS(OS - R)$$

$$KS^2 + R^2 = OS^2$$

$$OS^2 - OSR + R^2 = OS^2$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) R$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{2} (\sqrt{2} \sin (7x - \frac{\pi}{4}))$$

$$\sin 4x = \sin (7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin (7x - \frac{\pi}{4}) - \sin 4x = 0,$$

$$2 \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4} - 4x}{2} \cdot \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0.$$

$$\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 4x}{2} = \pi n,$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n;$$

$$\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$11x - \frac{\pi}{4} = \pi + 4\pi n$$

$$11x = \frac{5\pi}{4} + 4\pi n$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11} \pi n,$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} = f$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x = g. \quad \cdot 3$$

~~$$x = 4.$$~~

$$70 + (2^{64} - 1) \cdot x = 2^x + 3 \cdot 2^{65}.$$

~~$$f = g = 70$$~~

$$(2^{64} - 1) + 70 - 2 - 3 \cdot 2^{65} < 0.$$

$$(2^{64} - 1) \cdot 2 + 70 - 2 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 2^{65} - 2 + 70 - 3 \cdot 2^{65} < 0.$$

3'

$$70 + (2^{64} - 1) \cdot 3 - 8 - 3 \cdot 2^{65} \leq 0$$

~~$$x$$~~

4'; $70 + (2^{64} - 1) \cdot 4 - 16 - 3 \cdot 2^{65} \leq 0$

$$70 + 2^{66} - 4 - 16 - 3 \cdot 2^{65} \leq 0.$$

$$70 + 2 \cdot 2^{65} - \dots \leq 0$$

64 8'; $70 + (2^{64} - 1) \cdot 8 - 256 - 3 \cdot 2^{65} =$

$$= 70 + 2^{67} - 8 - 256 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 70 + 2^{65} - 8 - 256 - \dots > 0.$$

64

$$70 + 6 \cdot (2^{64} - 1) - 2^6 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 70 + 6 \cdot 2^{64} - 6 - 64 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 0.$$

$$S = \frac{b_1 \cdot q^{n+1}}{(1-q)^{n+1}}$$

$X=6$ - решение.

$$70 + (2^{64} - 1)X = 2^X + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64} \cdot X \approx 2^X + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64} \cdot X \approx 2^X + 3 \cdot 2^{64}$$

$$X = 2^{X-64} + 3$$

1672 72.

$$70 + 72(2^{64} - 1) - 2^{72} - 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 9 \cdot 2^{64} - 72 - 2^{72} - 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 70(2^{64} - 1) - 2^{70} - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 70 \cdot 2^{64} - 2^{70} - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 2^{64}(70 - 2^6 - 6) = 2^{64}(70 - 64 - 6)$$

$$S_y = \sum_{i=7}^{62} 2^i$$

$$\frac{b_1 \cdot q^n}{1-q}$$

$$\frac{b_1 \cdot q^{n-1}}{1-q}$$

$$\frac{b_1 \cdot q^{n-1}}{1-q}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^3 = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3-2 \lg y} = x^{\lg x}$$

~ 7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Подборкой установили, что $x=6$ и $x=70$ — корни уравнения $2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$.

Таким образом, имеем решение по y при $x \in [7; 69]$.

Количество решений по y при заданном x :

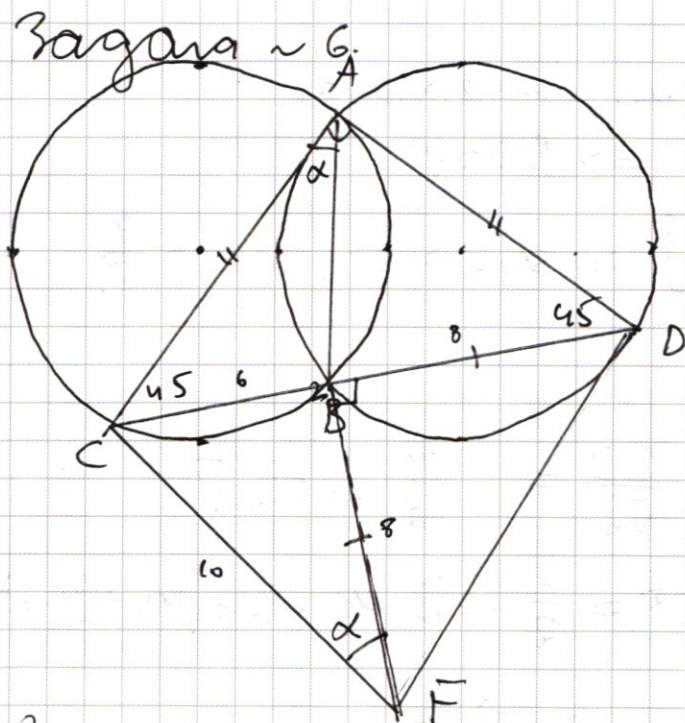
$$N_x = 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

$$S_x = \sum_{x=7}^{69} (70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) =$$

$$\begin{aligned} &= 70 \cdot 63 + (2^{64} - 1) \frac{7+69}{2} \cdot 63 - \sum_{i=7}^{69} 2^i - 2^{65} \cdot 3 \cdot 63 = \\ &= 70 \cdot 63 + (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 63 - \sum_{i=7}^{69} 2^i - 3 \cdot 63 \cdot 2^{65} \quad \text{Ⓢ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ominus \quad 63(70 + (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 3 \cdot 2^{65}) - \sum_{i=7}^{69} 2^i = \\
& \quad = 63(70 + 19 \cdot 2^{65} - 38 \cdot 3 \cdot 2^{65}) - \sum_{i=7}^{69} 2^i = \\
& \quad = 63(70 \cdot 32 + 16 \cdot 2^{65}) - \sum_{i=7}^{69} 2^i = \\
& \quad = 63(2^5 + 2^{69}) - \sum_{i=7}^{69} 2^i = \\
& \quad = 63(2^5 + 2^{69}) - \frac{2^7(1 + 2^{63})}{3^{63}} \\
& \quad = 63(2^5 + 2^{69}) - \frac{2^7(1 + 2^{63})}{3^{63}}
\end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



а) $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} = 2R. \quad \text{T.K. } \sin D = \cos C,$$

$$\sin C = \cos C \Rightarrow C = 45^\circ \Rightarrow \angle D \approx 45^\circ, \Rightarrow AC = AD$$

T.4 $BF = BD$, $\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

$$\angle ADF = \angle ADC + \angle CDF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel DF$$

→ в $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ по теореме синусов!

$$\frac{BC}{\sin CAB} = \frac{BD}{\sin BAD} = 2R$$

$$\operatorname{tg} CAB = \frac{BC}{BD}. \text{ Заменяем, что } BD = BF$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \angle CAB &= \frac{BC}{BF}. \text{ Заметим, что } \text{tg } \angle CFB = \frac{BC}{BF} \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle CFB &= \angle CAB = \angle \alpha. \end{aligned}$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R.$$

$$\sin \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{BC}{CF}$$

$$CF = 2R = 10$$

8) В $\triangle CBF$ по теореме Пифагора:

$$BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 8. \Rightarrow BD = 8.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{BD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}; \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{AC}{\sin(45^\circ - \alpha)} = 2R$$

$$\triangle CAD: AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

$$S_{CAF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(45^\circ + (90^\circ - \alpha)) =$$

$$= 35\sqrt{2} (\sin 45^\circ \sin \alpha + \cos 45^\circ \cos \alpha) =$$

$$= 35\sqrt{2} \left(\frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} \right) = 35 \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{35 \cdot 7}{5} =$$

$$= 7 \cdot 7 = 49$$

Ответ: $CF = 10$; $S = 49$.

Задача 3

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} &= y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - x(2y + 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 16y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 4(y-1)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2y+4 \pm 2(y-1)}{2} = \begin{cases} 2y-1 \\ 3 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача ~ 5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \end{cases}$$

а) $y-3-x \geq 0$

$$y = 3+x$$

б) $y-3+x \geq 0$

$$y = -x+3$$

Рассмотрим все возможные случаи:

а & б:

$$y-3-x+y-3+x=6$$

$$2y=12$$

$$y=6$$

а & $\bar{б}$:

$$y-3-x-y+3-x=6$$

$$x=-3$$

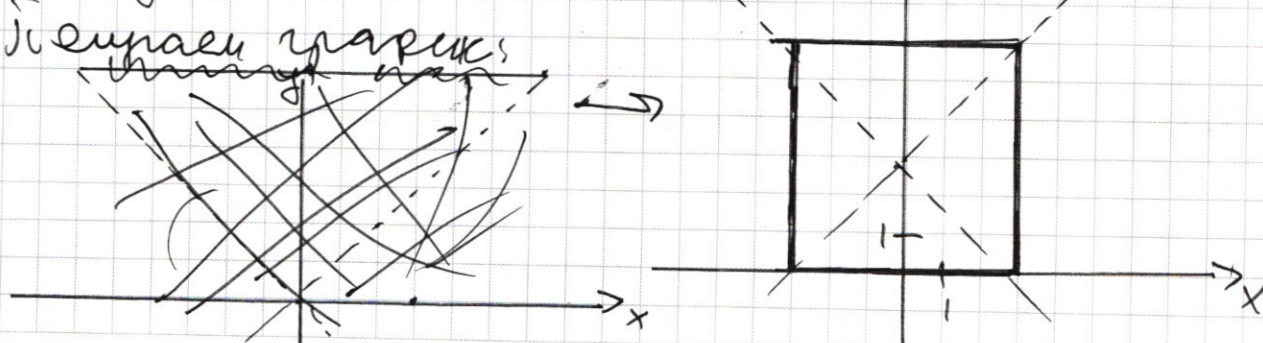
$\bar{а}$ & б: $-y+3+x+y-3+x=6$

$$x=3$$

$\bar{а}$ & $\bar{б}$: $-y+3+x-y+3-x=6$

$$y=0$$

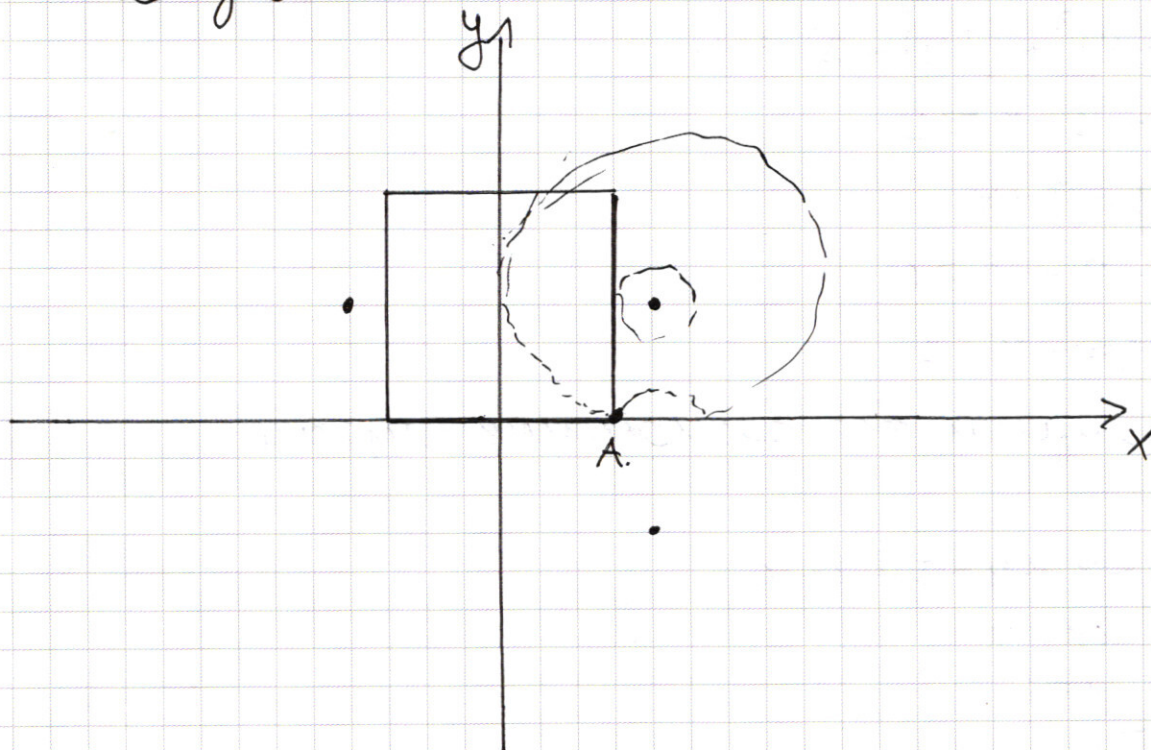
Построим график:



$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$ — окружность
радиуса $\sqrt{a}$.

Её центр — в Т. $(4; 3)$. При $x < 0$
она отражается отн. Оу, при $y < 0$ — отн.
Ох.

Получаем:



Намён увеличивать a . при $a > 1$
получим 2 корня.

Когда окр. проходит через Т. А — граничная
точка: $a^2 = 4^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{10}$

При $a \in (\sqrt{10}; \sqrt{58}]$ имеем более двух решений

При $a \in (\sqrt{58}; +\infty)$ имеем не более одного решения

Ответ: $a \in (1; \sqrt{10}]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 1.

Заметим, что $3375 = 5^3 \cdot 3^3$ Таким образом, i -я цифра восьмизначного числа представится в виде $N_i = 5^{a_i} \cdot 3^{b_i}$

Имеем:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 3 \\ b_1 + \dots + b_8 = 3. \end{cases}$$

а) 3^{a_i} — единица, остальные — нули.

$$Z_a = C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56.$$

б) $1-a_i$ — двойка, $1-a_j$ — единица, ост. нули.

$$Z_b = 8 \cdot 7 = 56.$$

$$Z_{a+b} = 56 + 56 = 112.$$

С. b_i , аналогично, $Z_{b+c} = 112$.Следовательно, что искомое число Z равно

$$112 \cdot 112 = 12544$$

Ответ: 12544.

Задача ~ 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$1) \sin 7x + \cos 7x = 0$$

$x = 0$ не является решением, поэтому

$$\operatorname{tg} x = -1.$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (-\sqrt{2} \sin(7x - \frac{\pi}{4}))$$

$$\sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(7x - \frac{\pi}{4}) - \sin 4x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 4x}{2}\right) \cos\left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0.$$

$$a) \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$b) \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m$$

$$11x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m$$

$$11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11} \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n, \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11} \pi m, m, n, k \in \mathbb{Z}$$