МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система 1,25

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. 10

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF. 48

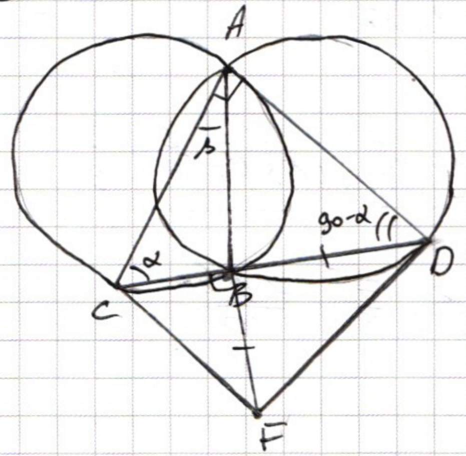
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано:
$R=5$, $\angle CAD=90°$
$BD=BF$, $\angle CBF=90°$



$CF=?$
$S_{\triangle ACF}=?$ $(CB=6)$

№6

а) Решение:
Пусть $\angle ACD=\alpha$, тогда $\angle ADC=90°-\alpha$,
по теореме синусов для $\triangle ABC$:

$\frac{AB}{\sin\alpha}=2R$

по т. синусов для $\triangle ADB$:

$\frac{AB}{\sin(90-\alpha)}=2R$. Тогда

$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{AB}{\sin(90-\alpha)}$, $\alpha<90°$, поэтому

$\sin\alpha=\sin(90-\alpha) \Rightarrow \underline{\alpha=45°}$

Тогда $\angle ACD=\angle ADC=45°$. Пусть $\angle CAB=\beta$, тогда $\angle BAD=90°-\beta$.
Тогда по т. синусов для $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ имеем: $(\beta<90°)$

$$\begin{cases} CB=2R\cdot\sin\beta \\ BD=2R\cdot\sin(90°-\beta)=2R\cdot\cos\beta \end{cases}$$

По условию $BD=BF$, тогда

$$\begin{cases} CB=2R\cdot\sin\beta \\ BF=BD=2R\cos\beta. \end{cases}$$

Тогда по т. Пифагора для $\triangle CBF$ $(\angle CBF=90°)$ имеем:

$CF=\sqrt{CB^2+BF^2}=\sqrt{4R^2\sin^2\beta+4R^2\cos^2\beta}=2R\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}=2R$,

т.к. $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ по О.Т.Т. Тогда

$\underline{CF=2R=10.}$

б) $CF=10$, $CB=6$, тогда по т. Пифагора $BF=BD=\sqrt{CF^2-CB^2}=$
$=\sqrt{10^2-6^2}=8.$

Рассмотрим прям-ый $\triangle ACB$. $AC=AD$, т.к. $\triangle ACB$-равнобедр.

т.к $\angle ACD=45°=\angle ADC$; $CD=CB+BD=6+8=14$

Тогда по т. Пифагора: $CD^2=AC^2+AD^2=2AC^2$;

$14^2=2\cdot AC^2 \Rightarrow AC=\frac{14}{\sqrt{2}}=\frac{14\sqrt{2}}{2}=7\sqrt{2}$.

$S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CF\cdot \sin\angle ACF$.

Пусть $\angle BCF=\varphi$. Тогда $\angle ACF=\alpha+\varphi$. Тогда:

$\sin(\alpha+\varphi)=\sin\alpha\cdot\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\cos\alpha$

Из прям-ого $\triangle CBF$ найдем: $\sin\varphi=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $\cos\varphi=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

$\sin\alpha=\cos\alpha=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда $\sin(\alpha+\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

Тогда $S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot 10\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10}=49$.

Ответ: а) $CF=10$; б) $S_{ACF}=49$.

$$\begin{cases}\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy}, \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0.\end{cases}$$

(№ 3)

$$\begin{cases}x>0\\ xy>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$$

1) $x^2-2x(y+2)-3y^2+12y=0$

$\frac{D}{4}=(y+2)^2+3y^2-12y=y^2+4y+4+3y^2-12y=$

$=4y^2-8y+4=(2y-2)^2$

$x=\frac{y+2\pm\sqrt{(2y-2)^2}}{1}=y+2\pm|(2y-2)|$.

Тогда $\left[\begin{array}{l}x_1=y+2+2y-2=3y\\ x_2=y+2-2y+2=4-y.\end{array}\right.$

2) $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy}$, Прологарифмируем обе части

$\lg x\cdot\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)=2\cdot\lg xy\cdot\lg y$,

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\lg x \cdot (\lg y^5 - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \cdot \lg y$,

$5 \lg x \cdot \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \cdot \lg y + 2\lg^2 y$,

$\lg^2 x - 3 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y = 0. \quad | \cdot \frac{1}{\lg^2 y} \quad \lg^2 y \neq 0$

$\lg y \neq 0$

$\left(\frac{\lg x}{\lg y}\right)^2 - 3\frac{\lg x}{\lg y} + 2 = 0 \qquad \underline{y \neq 1}.$

Пусть $\frac{\lg x}{\lg y} = t$. Тогда $t^2 - 3t + 2 = 0$

$\underline{t=1}$ или $\underline{t=2}$. Получим:

$\left[\begin{array}{l} \frac{\lg x}{\lg y} = 1 \\ \frac{\lg x}{\lg y} = 2. \end{array}\right.$ Тогда наша система примет вид: $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \lg x = \lg y, \\ \lg x = 2\lg y, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 3y, \\ x = 4 - y. \end{array}\right. \end{array}\right.$

1) Пусть $x = 3y$, тогда:

а) $\begin{cases} x = 3y \\ \lg x = \lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ \lg 3y = y \end{cases} \quad x = y = 0$ – постор. корень.

б) $\begin{cases} x = 3y \\ \lg x = 2\lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ \lg 3y = \lg y^2 \end{cases} \Rightarrow 3y = y^2$

$\left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ – постор.} \\ y = 3 \end{array}\right.$

Получили $\underline{x = 9}$ $\underline{y = 3}$.

2) Пусть $x = 4 - y$, тогда:

а) $\begin{cases} x = 4 - y \\ \lg x = \lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ \lg(4-y) = \lg y \end{cases} \Rightarrow y = 4 - y$

$\underline{y = 2}$ и $\underline{x = 2}$.

б) $\begin{cases} x = 4 - y \\ \lg x = 2\lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ \lg(4-y) = \lg y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + y - 4 = 0.$

$y^2+y-4=0$

$D=1+16=17$

$y_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0$ - постор.

$y_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}>0$.

Тогда $x=4-y=4-\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)=\frac{8-\sqrt{17}+1}{2}=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$

$x=\frac{9-\sqrt{17}}{2}>0$. Тогда пара $\underline{x=\frac{9-\sqrt{17}}{2}}$, $\underline{y=\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ подходит.

Получим ответ: $(9;3)$, $(2;2)$, $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=9,\ y=3 \\ x=2,\ y=2 \\ x=\frac{9-\sqrt{17}}{2},\ y=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{array}\right.$

№5.

$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6, \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a. \end{cases}$ ровно 2 решения.

I) $|y-3-x|+|y-3+x|=6$

1) $x\geq 0$

$3-x$, $x+3$ → y

а) $y\leq 3-x$

$-y+3+x-y+3-x=6$

$\underline{y=0 \quad 0<x\leq 3}$

б) $3-x<y<x+3$

$-y+3+x+y-3+x=6$

$2x=6$

$\underline{x=3,\ y\in(0;6)}$

в) $y\geq x+3$

$y-3-x+y-3+x=6$ $\quad \underline{y=6 \quad x\in(0;3]}$.

2) $x<0$

$x+3$, $3-x$ → y

а) $y\leq x+3$

$-y+3+x-y+3-x=6$

$\underline{y=0}$, $x\in[-3;0)$

б) $x+3<y<3-x$

$y-3-x-y+3-x=6$

$\underline{x=-3} \quad y\in(0;6)$

с) $y>3-x$

$y-3-x+y-3+x=6$

$2y=12$

$\underline{y=6} \quad x\in[-3;0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $x=0$

$2|y-3|=6$

$|y-3|=3$

$\underline{y=0}$ или $\underline{y=6}$.

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \quad y=0 \\ x=0 \quad y=6 \end{array}\right.$$

$(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$

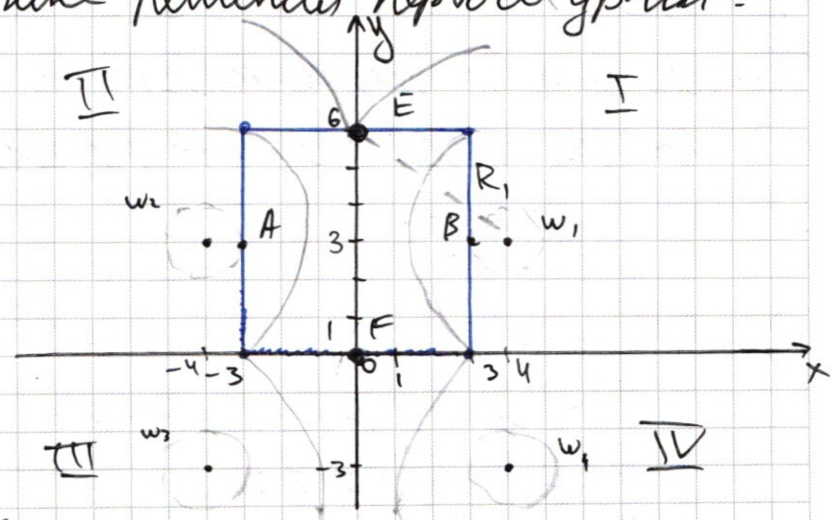
1) $4^2+3^2=a \Rightarrow a=25$

2) $4^2+3^2=a \Rightarrow a=25$.

Тогда при $a=25$ – 2 решения $\underline{x=y=0}$ и $\underline{x=0,\ y=6}$.

Изобразим на графике решения первого ур-ния:

$$\begin{cases} y=0,\ x\in[-3;3] \\ y=6;\ x\in[-3;3] \\ x=\pm3,\ y\in(0;6) \end{cases}$$



II) $(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$ – 4 окружности в разных четвертях ограниченные своей четвертью, и радиусом $\sqrt{a}=R$.

при $R=1$ окружности I и II касаются сторон квадрата, значит система имеет 2 решения.

при $\underline{a=1}$ – 2 решения, $a\in(0;1)$ – решений нет.

$a\in(1;25)$ – 4 решения. При $a=25$ $R=5$

$\underline{a=25}$ – 2 решения. Система имеет 2 решения

$a\in(25;+\infty)$ – нет решений. т. $E(0;6)$, $F(0;0)$

При $a=1$, $R=1$. – 2 решения т. $A(-3;3)$, т. $B(3;3)$.

При $a>25$ окружности перестанут пересекать квадрат. поэтому система не будет иметь решений. (центры окружностей симметричны относ. Ox и Oy и т. $O(0;0)$.)

Ответ: $\underline{a=1}$, $\underline{a=25}$.

№1.

3375 можно представить в виде произведения восьми цифр двумя образами:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1) $3375 = 5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot1\cdot1$.

2) $3375 = 5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot9\cdot1\cdot1\cdot1$.

Общее кол-во восьмизначных чисел — это сумма кол-во чисел путем перестановки 1 набора и 2го набора.

1) $C_1 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2 = 3^6\cdot2$

$\cancel{C_2 = 3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2 = 3^2\cdot2^3}$

$\cancel{C_3 = 3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 3^2\cdot2^5}$

$\cancel{C = C_1 - C_2 - C_3 = 3^6\cdot2 - 3^2\cdot2^3 - 3^2\cdot2^5}$

зафиксируем 11 вместе.

$C = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^6$

$C_{всего} =$

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!\cdot6!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6!}{6!\cdot3} = 56\cdot3$$

$$C_9^2 = \frac{9!}{7!\cdot2} = \frac{9\cdot8\cdot7!}{7!\,2} = 36$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$(1+x)^n \le 1+nx$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad =$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad \cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad \cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cdot\cos 14x$

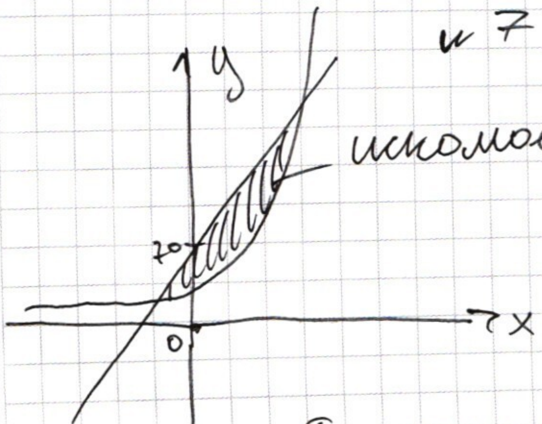
$$\frac{\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x)}{\cos 14x} = -\underset{\cos\frac{3\pi}{4}}{\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\frac{\sin 4x(\sin 7x + \cancel{\cos 7x})}{(\cancel{\cos 7x + \sin 7x})(\cos 7x - \sin 7x)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sin 4x}{\cos 7x - \sin 7x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sin 4x}{\cos 7x - \sin 7x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

№7



искомое пространство наборов

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

$y = y \qquad 2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + (2^{64}-1)x$

Решением ур-ия являются 2 точки.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7 (Нумеровать только чистовики)

5 $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot$

$3 \cdot 3 \cdot$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

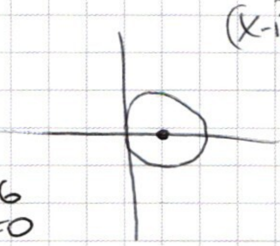
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4^2+3^2=a\le 25$ №5

2 решения.

$$\begin{cases}|y-3-x|+|y-3+x|=6\\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a\end{cases}$$

$(x-1)^2+y^2=1$



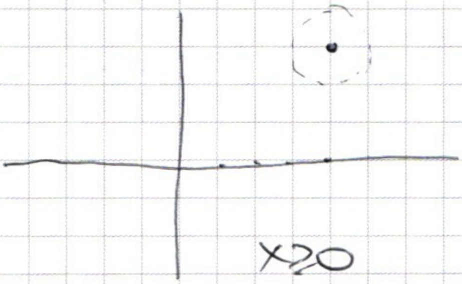
$2|y-3|=36$

$y\ge3$ $y=6$

$y<3$ $y=0$

1) $x\ge0$ $y\ge0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=a$



$x\ge0$

$|y-3-x|+|y-3+x|=6$

$y-3-x\ge0$ $y-3+x\ge0$

$y\ge x+3$ $y\ge3-x$

$x\ge0$

1) 2) 3) y

$3-x$ $x+3$

1) $y\le3-x$

$-y+3+\cancel{x}+(-y)+3-\cancel{x}=6$

$-2y=0$

$y=0$ $0\le x\le3$

2) $3-x<y\le x+3$

$-\cancel{y}+\cancel{3}+x+\cancel{y}-\cancel{3}+x=6$

$2x=6$

$x=3$ $0<y<6$

$y\ge x+3$

3) $y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6$

$2y=12$

$y=6$

$0\le x\le3$

$x<0$

2) $x+3$ $3-x$ y

1) $y\le x+3$

$-y+3+\cancel{x}-y+3-\cancel{x}=6$

$-2y=0$

$y=0$ $0>x\ge-3$

2) $x+3<y<3-x$

$\cancel{y}-\cancel{3}-x-\cancel{y}+\cancel{3}-x=6$

$-2x=6$

$x=-3$

$0<y<6$

3) $y\ge3-x$

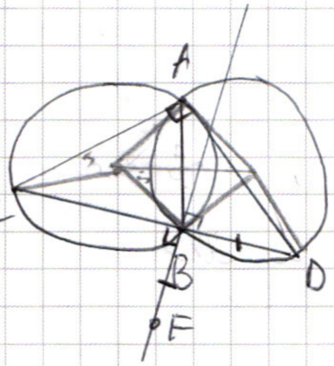
$y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6$

$2y=12$

$y=6$ $0>x\ge-3$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



1e

$y=0,\ x\in[3;3]$

$y=6,\ x\in[-3;3]$

$x=\pm 3 \quad y\in(0;6)$

$a=0,\ x=4,\ y=-1$

$(x-4)^2+(y-3)^2=a$

$(x-4)^2+(y+3)^2=a$

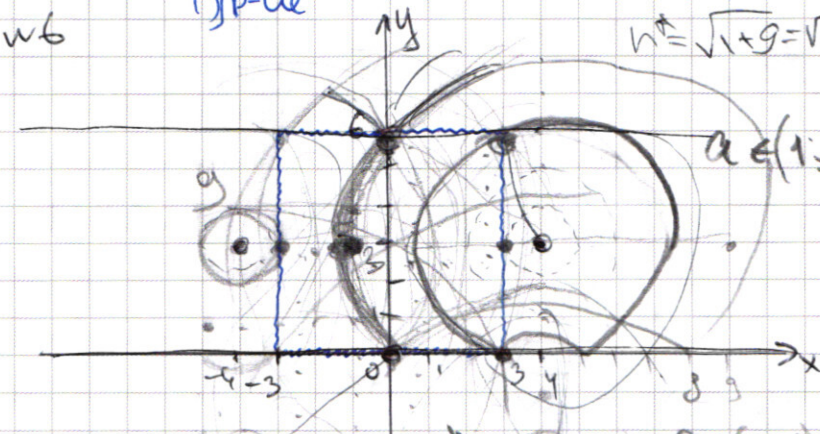
$(x+4)^2\ (y-3)^2$

$(x+4)^2\ (y+3)^2$

1) Ур-ие

№6

$r^* = \sqrt{1+9}=\sqrt{10}$



$a\in(1;10]$

2e. $(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$

1) $x\geq 0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=a$

2) $x<0 \quad (-x-4)^2+(y-3)^2=a$

$(x+4)^2+(y-3)^2=a$

$a\in(0;1)$ – 0

$\boxed{a=1}$ – 2

$a\in(1;10)$ – ~~нет~~ реш

$a\in(10;58)$ реш

$a=1$

$a=25$

$r=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$

$a=58 \quad a=82$

$r=\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{81+16}=\sqrt{97}$

$a=97$ – 3 реш

$a=\sqrt{7^2+9^2}=\sqrt{49+81}$

$a=130$ – 2 реш.

$a>130$ – нет реш

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$3375 = 5^2 \cdot 135 = 5^3 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$

$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$

C_9

1)

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

2) $\ln\left(\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}\right) = \ln\left(y^{2 \lg xy}\right)$,

$\lg x \cdot \ln \frac{y^5}{x} = 2\lg xy \cdot \ln y$

$\lg x\,(\ln y^5 - \ln x) = 2\lg xy \cdot \ln y$

$5\lg x \cdot \ln y - \lg x \cdot \ln x = 2\lg x \cdot \ln y + 2\lg y \cdot \ln y$;

1) $x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$

$\frac{D}{4} = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y =$

$= 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2$

$x = y+2 \pm |2y-2| = y+2 \pm 2(y-1)$

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= y+2+2y-2 = 3y \\ x_2 &= y+2-2y+2 = 4-y. \end{aligned}\right.$$

ОДЗ:

$x \neq 0$

$x > 0$ $\quad x > 0$

$xy > 0$ $\quad xy > 0$

$y > 0$ $\quad y > 0$

$3\lg x \cdot \ln y - \lg x \cdot \ln x = 2\lg y \cdot \ln y$,

$3\lg x \cdot \lg y - \lg^2 x - 2\lg^2 y = 0$

$\lg^2 x + 2\lg^2 y - 3\lg x \cdot \lg y = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\lg^2 y}$

$\lg y \neq 0$

$y \neq 1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\lg^2 x - 3\lg x\cdot\lg y + 2\lg^2 y = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\lg^2 y}$

$\left(\frac{\lg x}{\lg y}\right)^2 - 3\frac{\lg x}{\lg y} + 2 = 0 \qquad t = \frac{\lg x}{\lg y}$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{\lg x}{\lg y} = 1 \\ \frac{\lg x}{\lg y} = 2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 4-y \end{array}\right.$

1) Пусть $x = 3y$.

$\begin{cases} x = 3y \\ \left[\begin{array}{l} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2\lg y \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ \left[\begin{array}{l} \lg 3y = \lg y \\ \lg 3y = \lg y^2 \end{array}\right. \end{cases} \quad y>0$

$3y = y^2$

$\boxed{y=3} \quad \boxed{x=9}$

2) $x = 4-y$

$\begin{cases} x = 4-y \\ \left[\begin{array}{l} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2\lg y \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4-y \\ \left[\begin{array}{l} \lg(4-y) = \lg y \\ \lg(4-y) = \lg y^2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4-y \\ \left[\begin{array}{l} 4-y = y \\ 4-y = y^2 \end{array}\right. \end{cases} \quad 2y=4 \quad y=2 \quad x=2$

$y^2 + y - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$y = -\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ — посторонний.

$y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$x = 4 - \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

$x = \frac{8-\sqrt{17}+1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} > 0$

$y \geq 1$

$y+2 \pm 2y \mp 2 = \begin{array}{l} 3y \\ 4-y \end{array}$

$y < 1$

$y+2 \mp 2y \pm 2 = \begin{array}{l} 4y- \\ 3y \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x = \frac{\pi}{2}$

№2

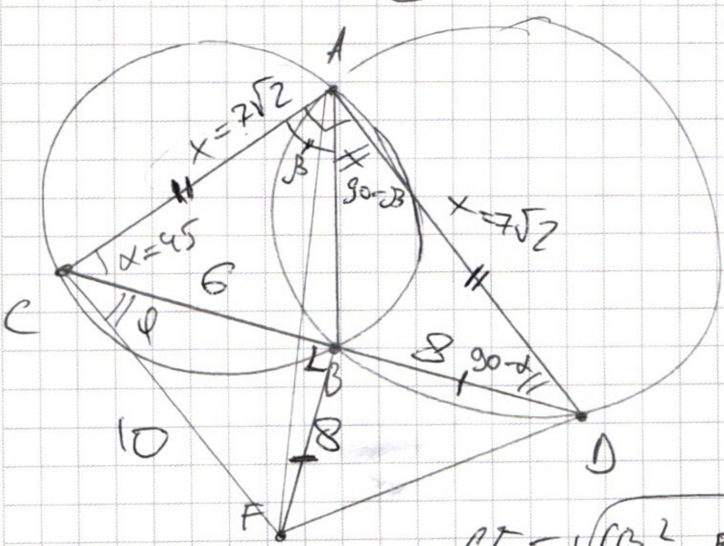
$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\cdot\sin 7x\cdot\sin 4x + 2\cdot\cos 7x\cdot\sin 4x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2(\sin 7x\cdot\sin 4x + \cos 7x\cdot\sin 4x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\cdot\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cdot\cos 14x$

CF? R



$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R = \frac{AB}{\sin(90-\alpha)}$

$\sin\alpha = \sin(90-\alpha)$

$90-\alpha = \alpha$

$\alpha = 45$

$\frac{CB}{\sin\beta} = \frac{BD}{\cos\beta}$

$CB = 2R\cdot\sin\beta$

$BD = 2R\cdot\cos\beta$

$CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{4R^2\cdot\sin^2\beta + 4R^2\cos^2\beta}$

$CF = 2R\sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta} = 2R = CD$

$2x^2 = 14^2$

$x^2 = \frac{14^2}{2} \Rightarrow x = \frac{14}{\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\sin\varphi = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\varphi+\alpha) = \sin\varphi\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cos\varphi =$

$= \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot 7}{2\cdot 5}$

$\sin(\varphi+\alpha) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

$S = \frac{1}{2}\sin(\varphi+\alpha)\cdot AC\cdot CF = \frac{1}{2}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10}\cdot 7\sqrt{2}\cdot 10 = 49$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№7

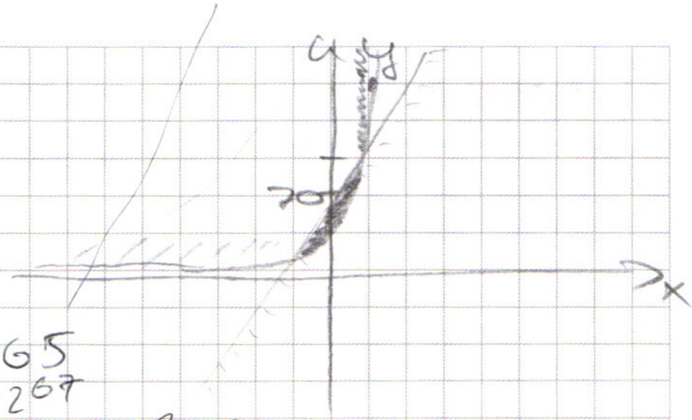
$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \geq 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

$y = 2^x + 3\cdot 2^{65}$

$2^x = -3\cdot 2^{65}$

$x = 65$

$y = 2^{67}$



$2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + 2^{64}x - x$

$2^x + 3\cdot 2^{65} - 70 + x - 2^{64}x = 0$

$2^x + 2(2^{65} + 2^{64}) - 70 + x - 2^{64}x = 0$

$2^x + x - 70$

$2^x + 6\cdot 2^{64} - 70 + x - 2^{64}x = 0$

$2^{64}(6 - x) + 2^x + x - 2\cdot 7\cdot 5 = 0$

$V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\sin\alpha}{} = 2$