

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$3375 = 5 \cdot 3^3$ В числе нет 0, т.к. иначе произв. цифр равно 0.

Только цифра 5 кратна 5 (не считая 0) $\Rightarrow$ в числе так три цифры ~~иногда~~ 5.

3, 6, 9 кратны 3, но 6 не будет ~~в~~ в нашем числе, т.к. тогда произв. цифр кратно еще 2, а 3375 - нечет $\Rightarrow$ в нашем числе ~~две~~ ^{три} цифры 3 или одна 3 и одна 9.

Единицу может быть только унодо, т.к. при умножении на 1 произведение не меняется. Других ~~цифр~~ ^{цифр} не будет, т.к. иначе произв. кратно 2.

I вар: 3 пятерки, 3 тройки $\Rightarrow$ две единицы. ^{этой цифрой}

т.к. порядок выбора пятерок и троек нам не важен, то всего вар-тов: $C_8^3 \cdot C_5^3 = 560$.

II вар: 3 пятерки, 1 девятка, 1 тройка $\Rightarrow$ 3 единицы.

Порядок выбора пятерок нам не важен $\Rightarrow$ всего вар-тов $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 1120$.

Всего возможных: $1120 + 560 = 1680$.

Ответ: 1680.

N3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg x} & x \neq 0, y \neq 0. \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = (x+y-4)(x-3y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y. \text{ б.} \\ x = 3y. \text{ а} \end{cases}$$

А: $x = 3y$.

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^3} \quad y > 0.$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}.$$

$$\frac{y^{4\lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = y^{2\lg 3y^2} = y^{2(\lg 3 + 2\lg y)}$$

$$\frac{y^{4\lg 3 + 4\lg y}}{3^{\lg 3y}} = y^{2\lg 3 + 4\lg y}.$$

$$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3y}.$$

$$\lg(y) \cdot 2\lg(3) = \lg(3y) \cdot \lg(3).$$

$$\lg(y^2) = \lg(3y).$$

$$y^2 = 3y \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ X.} \\ y = 3 \text{ V.} \Rightarrow x = 9. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5: x = 4 - y.$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2 \lg y(4-y)} \quad 4-y > 0 \Rightarrow y > 0.$$

$$\frac{y^{5 \lg 4-y}}{(4-y)^{\lg 4-y}} = y^{2 \lg y + 2 \lg(4-y)}.$$

$$\frac{y^{3 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2 \lg y}.$$

$$\frac{y^{3 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = (4-y)^{\lg(4-y)} (y^{\lg y})^2.$$

$$10^{3 \lg y \cdot \lg(4-y)} = 10^{\lg^2(4-y)} \cdot 10^{2 \lg^2 y}.$$

$$3 \lg y \lg(4-y) = \lg^2(4-y) + 2 \lg^2 y.$$

$$\lg y \neq 0. \text{ т.к. if } \lg y = 0 \quad y = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1^{2 \lg 3} = 1.$$

$$3^{\lg 3} \neq 1.$$

$$: \lg^2 y.$$

$$\frac{\lg(4-y)}{\lg y} = t.$$

$$3t = t^2 + 2.$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \quad (t-2)(t-1) = 0.$$

$$t = 2; t = 1.$$

$$\begin{cases} \frac{\lg(4-y)}{\lg y} = 2. & \lg(4-y) = \lg(y^2). & y^2 + y - 4 = 0. \\ & & y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}. \\ \frac{\lg(4-y)}{\lg y} = 1. & \lg(4-y) = \lg y. & 4-y = y. \quad y = 2. \end{cases}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 2. \quad x = 2. \quad (2^4)^{\lg 2} = \cancel{y^2}^{\lg 2} 2^{2 \lg 4} = 2^{4 \lg 2} \checkmark.$$

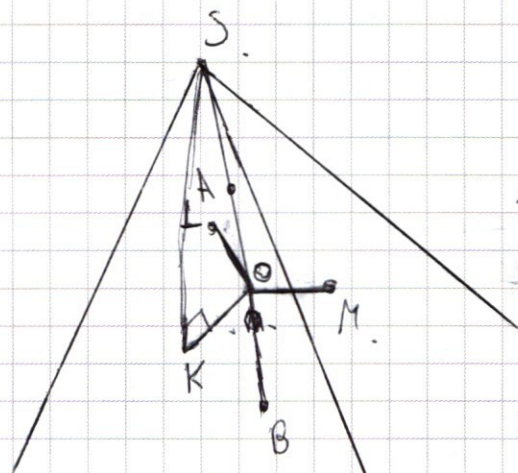
$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Rightarrow x = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \quad x > 0 \quad y > 0 \quad \checkmark.$$

$$y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{9+\sqrt{17}}{2} \quad x > 0 \quad y < 0. \quad \text{но } y > 0 \quad \times$$

$$\text{Ответ: } (9; 3); (2; 2); \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



т.к. плоскости касаются сферу
и $\perp SO$, то они проходят через
точки пересечения прямой SO
со сферой. Вк. (A и B).
тогда $SB - SA = 2r$.

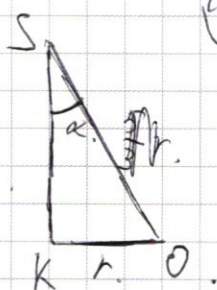
т.к. площади равны $1/4$, а

плоскости параллельны друг другу, они
относятся как квадрат коэф. подобия.

$$\text{т.е. } \frac{1}{1} = \frac{SB^2}{SA^2} = \left(\frac{SA+2r}{SA}\right)^2 \Rightarrow 2SA = SA+2r.$$

$$SA = 2r. \quad SA = 2r.$$

$KO \perp SK$, т.к. сфера касается ~~стор.~~ граней
треугол. угла.



1)

$$KO = r.$$

$$SO = SA + AO = 2r + r = 3r.$$

$$\sin(\angle KSO) = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}.$$

плоскость, проходящая через точки K, L, M.

Будет параллельна плоскости, и перпендикулярна
 SO . Вспроецируем точку A на SK, K на SO.
т.к. отрезки из т. K, L, M перпендикулярны на SO, они будут
равны и пересекаться в одной точке ~~на плоскости~~
($\triangle LOS = \triangle MOS = \triangle KOS$).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6. \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a. \end{cases}$$

$a \geq 0$, иначе нет решений.

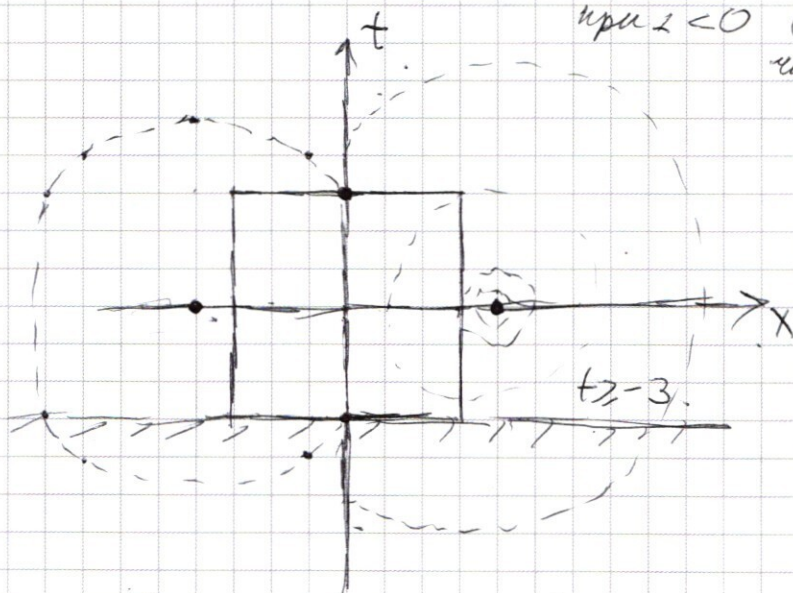
1. $y \geq 0$.

$$y-3=t \quad t \geq -3.$$

$$|t-x| + |t+x| = 6 \quad \leftarrow \text{у-ние квадрата, сост. с и ч. (0;0)}$$

$$(|x|-4)^2 + t^2 = a. \quad \text{при } x \geq 0. (x-4)^2 + t^2 = a$$

при $x < 0$ $(x+4)^2 + t^2 = a$ $\text{центр } (-4; 0)$
 $\text{центр } (4; 0)$ $\text{с } R = \sqrt{a}$.



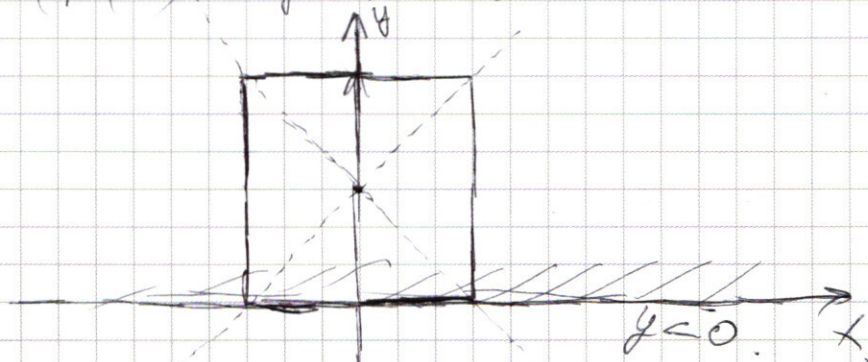
Не трудно заметить, что рисунок симметричен
 относительно t , поэтому если правая ^{часть} окружности
 имеет n т.п. с квадратом, то левая тоже.
 Если эти точки не совпадают, то решений
 $2n \Rightarrow 2n = 2 \quad n = 1. \Rightarrow$ окружности касаются
 или, если точки общие т.е. окр-и должны

проходить через $(0; 3)$ $(0; -3)$. при $a \in (1; 25)$ — корни.
 тогда $r^2 = 3^2 + y^2 = 25 \Rightarrow a = 25$. при $a > 25$ — нет корней,
 если окр. кас $r^2 = 1 \Rightarrow a = 1$. при $a < 1$ — нет корней.

2. $y < 0$.

$$\begin{cases} |y-3-4| + |y-3+x| = 6, & \text{ур-ние квадрата с центром } (0; 3) \\ (|x-4|)^2 + (-y-3)^2 = a. & \text{сторона } 6. \end{cases}$$

$$(|x-4|)^2 + (y+3)^2 = 0.$$

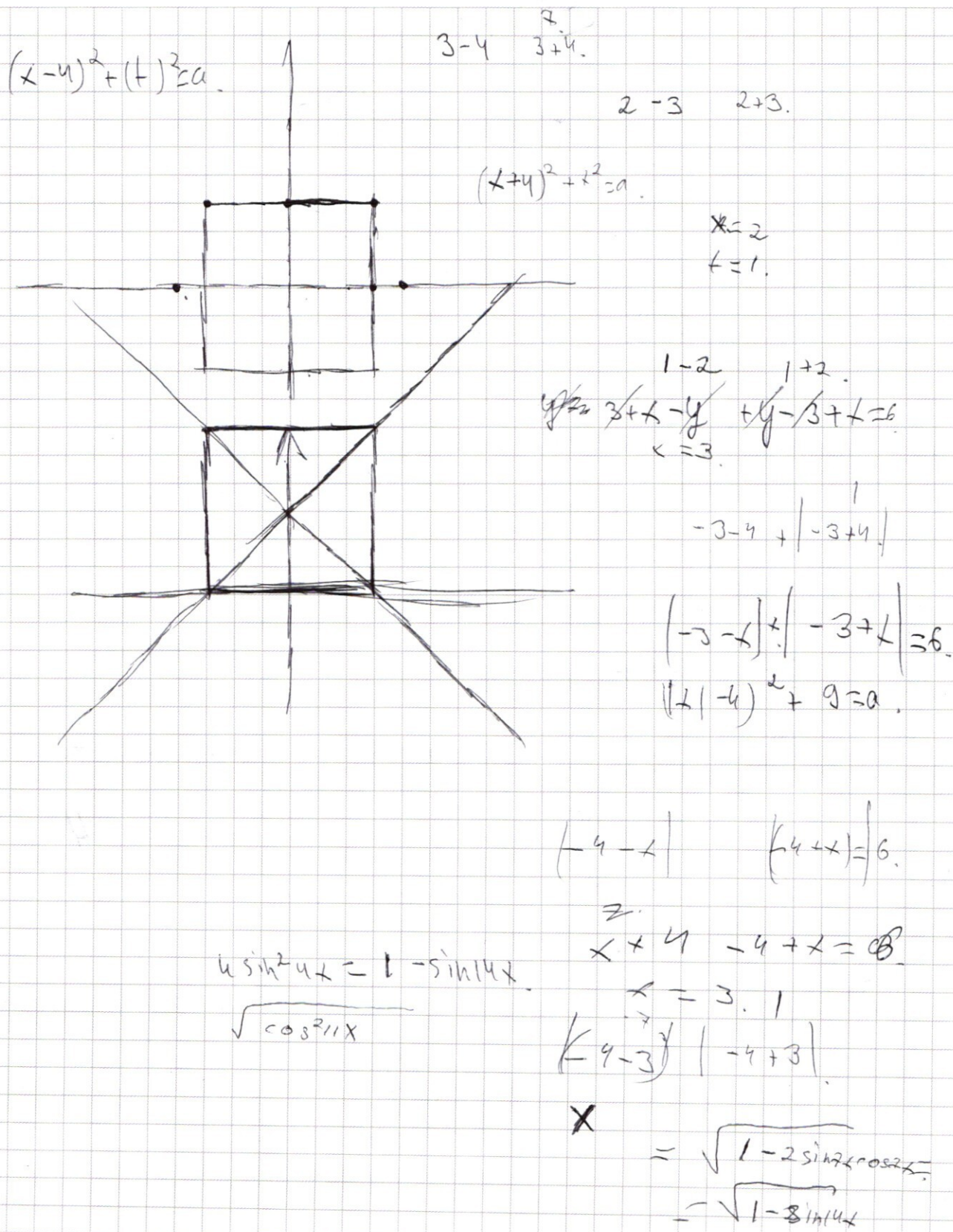


Построив квадрат, понимаем, что при $y < 0$ решений нет. $\Downarrow$

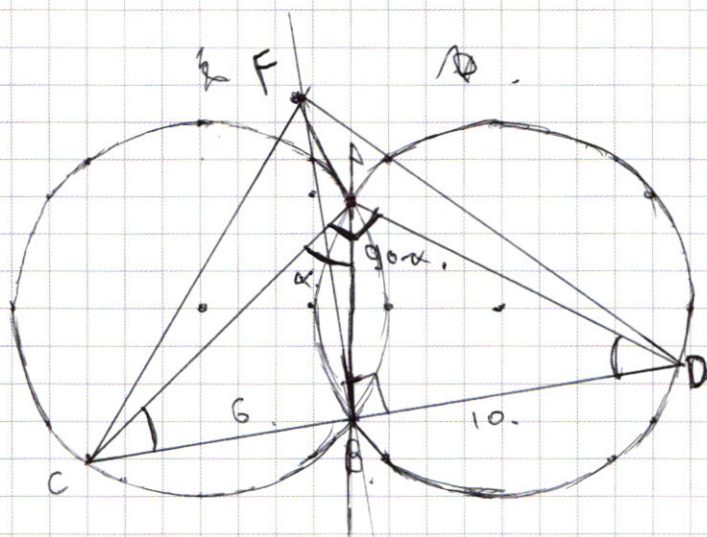
Когда надо выбрать все варианты, где
 в 1 случае 2 решения: $a = 25$ $a = 1$.

Ответ: 1; 25.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 6.



а). т.к. окружности одинакового радиуса, $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACD$ - равноб. $AC = AD$.

~~$\angle ACB =$~~

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$$

$$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{2}r = 5\sqrt{2}$$

но т.к. $\sin!$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = 2r \Rightarrow CB = 2r \sin \alpha$$

$$\frac{BD}{\sin(90-\alpha)} = 2r \quad BD = 2r \sin(90-\alpha) = 2r \cos \alpha$$

$$CF^2 = CB^2 + BD^2 = 4r^2 \sin^2 \alpha + 4r^2 \cos^2 \alpha = 4r^2$$

$$CF = 2r = 10$$

~~Ответ: 10.~~

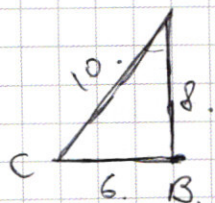
$$\delta). \frac{BC}{\sin \alpha} = 2r$$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{2r} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\angle ACB = \frac{\pi}{4}$$

$$\angle FCB = \arcsin \frac{4}{5}$$

$$\angle FCA = \angle FCB - \angle ACB$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(\angle FCA) = \sin(\angle FCB - \angle ACB) = \sin(\angle FCB) \cos(\angle ACB) -$$

$$- \sin(\angle ACB) \cos(\angle FCB) = \frac{4 \cdot 1}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ACF} = \frac{CF \cdot CA \cdot \sin(\angle FCA)}{2}$$

CA - ?

$$\frac{CA}{\sin(\angle ACB + \angle CAB)} = 10$$

$$CA = 10 \cdot \sin(\angle ACB + \angle CAB) = 10 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} \right) =$$

$$= 10 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

⇓

$$S_{ACF} = \frac{10 \cdot 7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{10 \cdot 7 \cdot \sqrt{2}}{10 \cdot \sqrt{2}} = 7$$

Ответ: CF = 10, S_{ACF} = 7.

N 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\cos(\theta) - \cos(\varphi) = -2 \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha.$$

$$\sin(\theta) - \sin(\varphi) = 2 \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right).$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x.$$

$$\sin 3x - \sin 11x = -2 \sin(4x) \cos 7x.$$

$$-2 \sin(4x) (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) \cdot (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\boxed{\cos 7x = -\sin 7x}$$

$$\tan x = -1.$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x).$$

$$\sin 4x = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x.$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

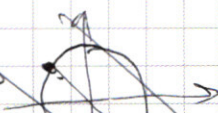
$$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

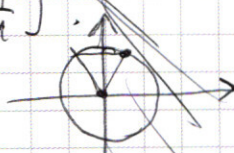
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}; \frac{\pi}{12} +$$



$$7x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}.$$



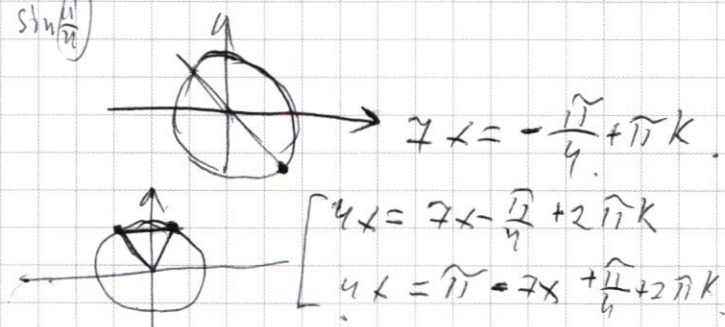
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin 7x = -\cos 7x, & \operatorname{tg} 7x = -1. \\ \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x = \sin(7x - \frac{\pi}{4}). \end{cases}$$

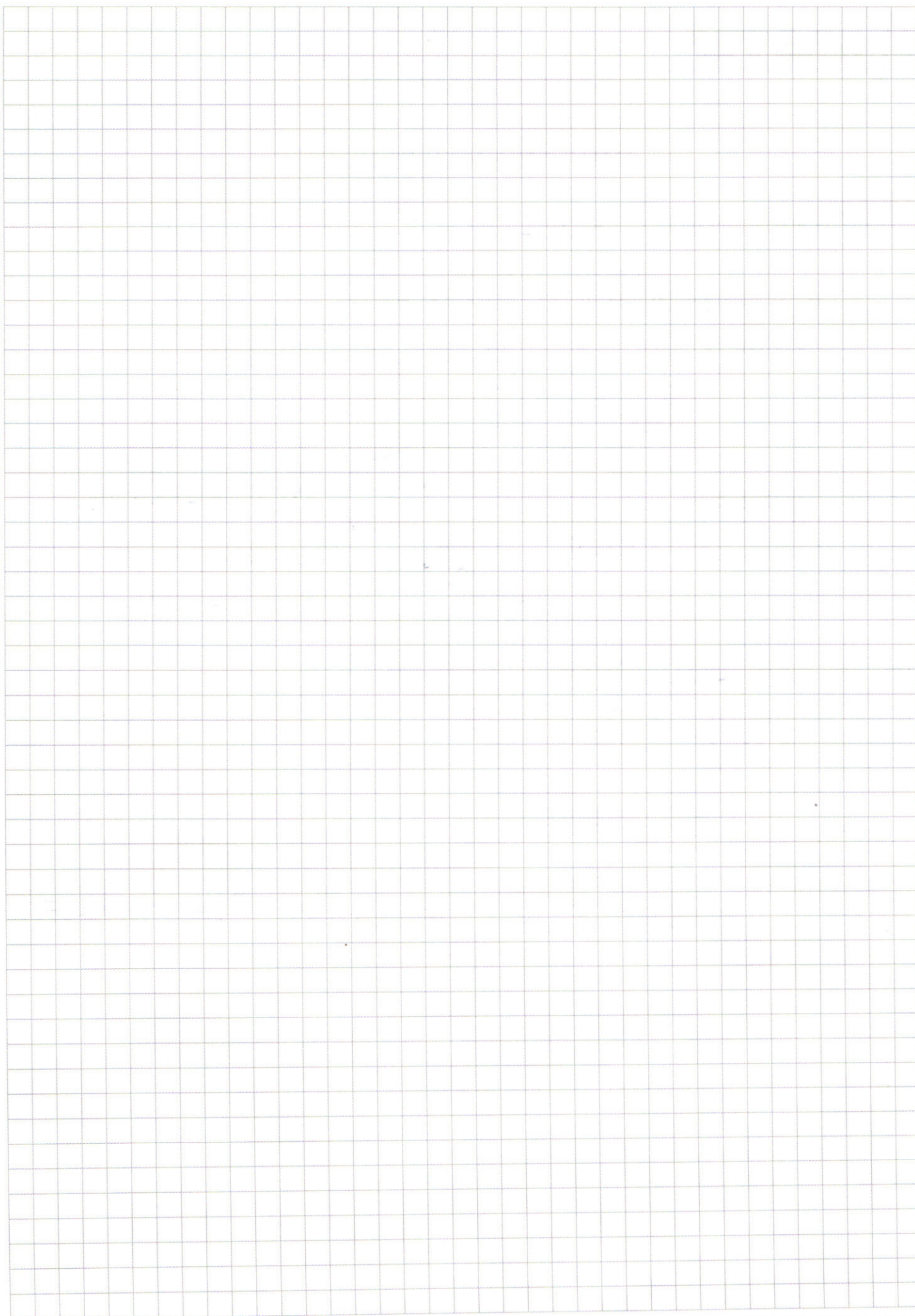
$\cos(\frac{\pi}{4})$ $\sin(\frac{\pi}{4})$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 7x = -1. \\ \sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, где $k \in \mathbb{Z}$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$y = 70 + (2^{64} - 1)x - \text{прямая}$$

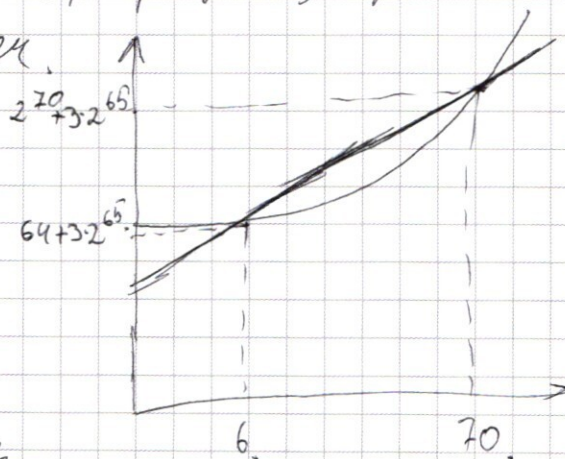
$$y = 2^x + 3 \cdot 2^{65} - \text{кр. на } y \text{ возрастает, возр. функция}$$

~~⇒ если данные~~

$y = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ - возр. ф-ция, пр-ная возрастает.
⇒ max 2 т. пересек.

$$x = 6 - \text{I реш.}$$

$$x = 70 - \text{II реш.}$$



$$\text{т. е. } x \in (6; 70]$$

при сдвиге y в x на 1. $y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \Rightarrow y > 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \Rightarrow y \leq 70 + (2^{64} - 1)(x+1)$

т. е. ответ будет представлять из себя паре $x; y$, где

$$x \in [7; 69], \text{ а } y \in (70 + (2^{64} - 1)2^x + 3 \cdot 2^{65}; 70 + (2^{64} - 1)x]$$

$$\text{при } x = 7 \quad y \in (2^7 + 3 \cdot 2^{65}; 70 + 2^{64} - 1)$$

$$\text{//} \\ 63 + 7 \cdot 2^{64} = 63 + 3 \cdot 2^{65} + 2 \cdot 2^{64}$$

~~✓~~ ~~✓~~ ~~x~~

~~Ответ: $x \in [7; 69]$, где $y \in (2^x + 3 \cdot 2^{65}; 70 + (2^{64} - 1)x]$.~~

Ответ: $(x; y)$, где $x \in [7; 69]$ и $y \in (2^x + 3 \cdot 2^{65}; 70 + (2^{64} - 1)x]$,
 $x, y \in \mathbb{Z}$.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$2^4 + 3 \cdot 2^{65} = 20 + 2^{64} x - x.$$

$$2^x = 70 + (2^{64} - 1)x - 3 \cdot 2^{65}.$$

$$\lg_2(70 + (2^{64} - 1)x - 3 \cdot 2^{65}) = x.$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{64} x - x.$$

2

(6+t)

$$2^{6+t} + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 3 \cdot 2^{65} + 2^{64} t - 6 - t.$$

$$2^{6+t} = 64 + 2^{64} t - t.$$

$$2^{6+t} = 64 + 2^{64} t - t.$$

$$2^{70} = 2^{64} \cdot 64 =$$

$$2^{x+1} + 3 \cdot 2^{65} = 2^x.$$

$$2^x \cdot 2 =$$

$$2^6.$$

$$2^{12}.$$

$$2^2.$$

$$2 \cdot 2^6.$$

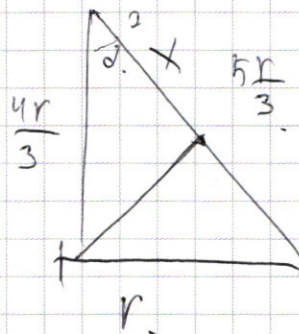
$$2^6.$$

$$2^{64} - 1.$$

$$2^{64} - 1.$$

$$L = \frac{16}{15} r.$$

$$\frac{2r}{3}, \frac{15r}{6}, \frac{3x}{4r}, \frac{8r}{3}$$



$$\frac{2}{8} + 2.$$

$$\frac{5}{4} = \frac{16 \cdot 3 \cdot 3}{15 \cdot 8 \cdot 4} =$$

$$\frac{5}{4} = \frac{16 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 3}{15 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 4} =$$

$$= \frac{16}{25} = \frac{64}{100}.$$

$$\frac{16 \cdot 4}{25 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 4} = \frac{4}{25}.$$

$$\frac{16 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{15 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{16}{25}.$$

$$\frac{5}{4} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 30 \\ \hline 37 \\ 35 \\ \hline 25 \\ 15 \\ \hline 25 \\ 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$10^{\alpha} = 3y$$

$$\cos(3x+11x) =$$

$$\sqrt{2} \cos 3x \cos 11x = \sin 3x \sin 11x$$

$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x)$$

$$-2 \sin$$

$$+11$$

$$\begin{array}{r} 8.7.6 \quad 5.4.2 \\ \hline 3.2 \quad 2 \\ \hline 56 \quad 20 \\ 8.7.6 \quad 5.4.2 = 1120 \end{array}$$

$$3$$

$$\sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -2 \sin\left(\frac{\delta+\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta-\varphi}{2}\right)$$

$$-2 \sin\left(\frac{\delta+\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta-\varphi}{2}\right) = \left(\frac{\delta+\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{\delta-\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\delta = 4y$$

$$\delta = 3y$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\delta-\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta+\varphi}{2}\right)$$

$$\sin 7x - \sin 11x = 2 \sin(-4x) \cos 7x$$

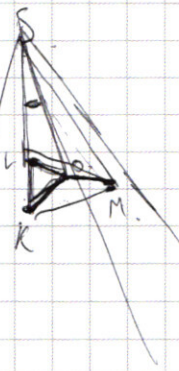
$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\lg x}$$



$$\lg x = 10^{\lg x}$$

$$\frac{AB}{\sqrt{2}} = 2r$$

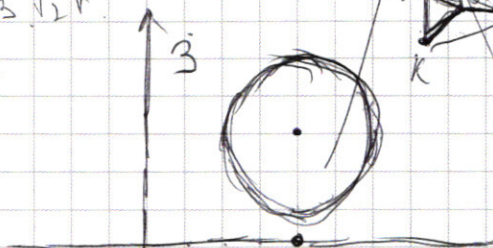
AB $\sqrt{2}r$



$$2^x + 3 \cdot 2^{6x} = y = \frac{x}{3}$$

$$= 70$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x}{3}\right)^{2 \lg \frac{x}{3}}$$



$$\frac{x^{4 \lg x}}{3^{5 \lg x}} = \frac{x^{2(2 \lg x - \lg 3)}}{3^{2(2 \lg x - \lg 3)}}$$

$$\lg(y) \cdot 2 \lg(3) = \lg(3y) \cdot \lg(3)$$

$$\frac{x^{4 \lg x}}{3^{5 \lg x}} = \frac{x^{4 \lg x - 2 \lg 3}}{3^{4 \lg x - 2 \lg 3}}$$

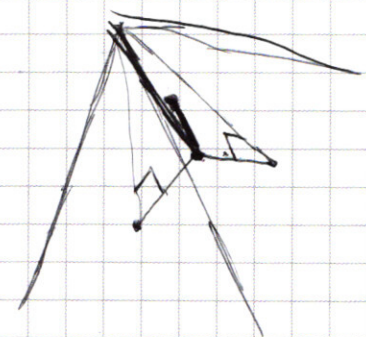
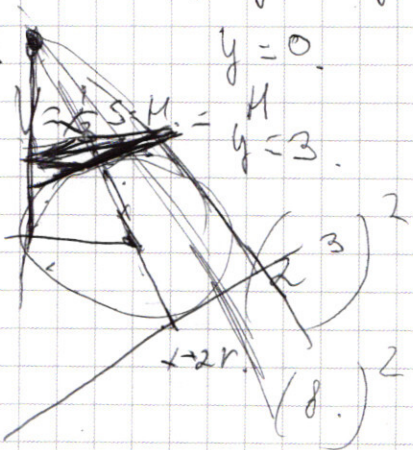
$$2 \lg(y) = \lg(3y)$$

$$y^2 = 3y$$

$$\frac{1}{3^{\lg x}} = \frac{x^{-2 \lg 3}}{3^{-2 \lg 3}}$$

$$y = 0$$

$$y = 3$$



$$\frac{1}{3^{\lg x + 2 \lg 3}} = \frac{1}{x^{2 \lg 3}}$$

$$3^{\lg x + 2 \lg 3} = x^{2 \lg 3}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$y^{3 \lg(4-y)} = 10^{\lg^2(4-y)} \cdot 10^{2 \lg^2 y}$$

$$y = 1$$

$$x = 3$$

$$10^{\lg y \cdot \lg(4-y)} = 10^{\lg^2(4-y) + 2 \lg^2 y}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1^{2 \lg 3} = 1$$

$$\lg y \cdot \lg(4-y) = \lg^2(4-y) + 2 \lg^2 y$$

$$\frac{1}{3^{\lg 3}}$$