

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④ $3375 = 5^3 \cdot 3^3$.

Восмизначное число произведение цифр которого
равно на 3375. должно содержать три 5 и
(~~3 можно записать~~) ^{еще} шестерку два варианта
содержит записи 3^3 и 9^3 это 333 или 93
тогда все остальные ~~(цифры)~~ должны быть
равны 1

1) 33355511

2) 39555111

1) первый случай шестерки три 3 три 5 и две 1.
таких восьмизначных чисел

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 2} = 560$$

2) второй случай когда число содержит одну 3 одну 9
три 5 и три 1.

таких чисел $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$.

Тогда общее ~~число~~ ^{количество} чисел произведение которых равно
3375. равно $1120 + 560 = 1680$.

Ответ: 1680.

② $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$. делим обе
части ур-я на $\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x = \cos 14x.$$

Тогда
по формуле $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$
 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x.$

применяем формулы суммы синусов и косинусов
двойного угла.

$$2 \sin(-4x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos^2 7x - \sin^2 7x.$$

$$-2 \sin 4x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x\right) = (\cos^2 7x - \sin^2 7x).$$

~~$$-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x).$$~~

~~$$\cos 7x + \sin 7x = 0.$$~~

~~$$-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$~~

ур-е имеет решение когда $\cos 7x + \sin 7x = 0$.

или

~~$$1 + \tan 7x = 0.$$~~

$$-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x, | : \sqrt{2}.$$

$$\tan 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x = 0,$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi n,$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi n,$$

$$\frac{11x}{2} = -\frac{3\pi}{8} - \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi n}{3}.$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi n}{11}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \begin{cases} -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi n}{3} \\ -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi n}{11} \end{cases} \text{ где } n \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. & (2) \end{cases} \quad \text{ООЗ} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2(\lg x + \lg y)}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\lg x \sqrt{\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}} = \lg x \sqrt{y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}}$$

$$\frac{y^5}{x} = y^x \cdot y^{\frac{2 \lg y}{\lg x}}$$

применим формулу $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

$$\frac{y^3}{x} = y^{2 \log_x y}$$

$$y^{3-2 \log_x y} = x$$

прологорифмируем обе части ур-я

$$\log_y y^{3-2 \log_x y} = \log_y x$$

$$3 - 2t = \frac{1}{t}$$

$$3t - 2t^2 = 1$$

$$\log_x y = t, \quad \log_x y = 0,5$$

$$x = y$$

$$y^2 = x$$

$$3 - 2 \log_x y = \log_y x$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$3 - 2 \log_x y = \frac{1}{\log_x y}$$

$$D = \sqrt{9 - 8} = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

обозначим $\log_x y = t$. $t_1 = 1$ $t_2 = 0,5$

подставим полученные значения в 2-е уравнение $x=y$.

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0.$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0.$$

$$(x-y)^2 - 4(x+y^2-3y) = 0, \quad \text{Тогда}$$

$$(x-x)^2 - 4(x+x^2-3x) = 0.$$

$$x^2 - 2x = 0.$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2. \quad y = 2.$$

Так как по
условию $x > 0$.

$$2) \quad x = y^2.$$

$$x^2 - 2x\sqrt{x} - 4x - 3x + 12\sqrt{x} = 0.$$

$$x^2 - 7x + 10x\sqrt{x} = 0.$$

$$\sqrt{x}(x\sqrt{x} + 10x - 7) = 0.$$

$$x^2 - 2x\sqrt{x} - 7x + 12\sqrt{x} = 0.$$

$$\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 2x - 7\sqrt{x} + 12) = 0.$$

Так как $x > 0$ то $x\sqrt{x} - 2x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$, обозначим x

$$\sqrt{x} = a.$$

$x\sqrt{x} - 2x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$. методом подбора находим корни

$$x = 9, \quad y = \sqrt{9} = 3.$$

тогда уравнение имеет вид

$$(\sqrt{x} - 3)(x - \sqrt{x} - 4) = 0.$$

$x - \sqrt{x} - 4 = 0$ обозначим $\sqrt{x} = a, \quad a > 0$

$$a^2 - a - 4 = 0.$$

$$\sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} = y.$$

$$D = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$x = \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}.$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad a_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 2, \quad y_1 = 2, \quad x_2 = 9, \quad y_2 = 3$$

$$a_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad a > 0,$$

$$x_3 = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}, \quad y_3 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 6 \cdot 2^{64}$$

$$64 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 6(2^{64} - 1)$$

$$2^6 - 2^x \geq 6(2^{64} - 1) - x(2^{64} - 1)$$

$$2^6(1 - 2^{x-6}) > (2^{64} - 1)(6 - x)$$

Заметим что при $x=6$ и $x=70$ обе части неравенства будут равны. а при всех $x \in (6; 70)$ неравенство верное. Тогда у нас 63 числа удовлетворяющих нашим условиям, а при каждом

$$x \quad 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x + 3 \cdot 2^{65} \quad y \cdot \text{об.}$$

$$70 + (2^{64} - 1)x - 2^x + 6 \cdot 2^{64}$$

$$70 + x \cdot 2^{64} - x - 2^x - 6 \cdot 2^{64}$$

$$70 - x - 2^x + 2^{64}(x - 6)$$

Считаем кол-во у при каждом x.

$$\frac{70 - \frac{7+69}{2} \cdot 63 - 2^7 \left(\frac{63}{2} - 1 \right) + 2^{64} \cdot \left(\frac{7+69}{2} \cdot 63 - 63 \cdot 6 \right)}{2^{64} - 1} =$$

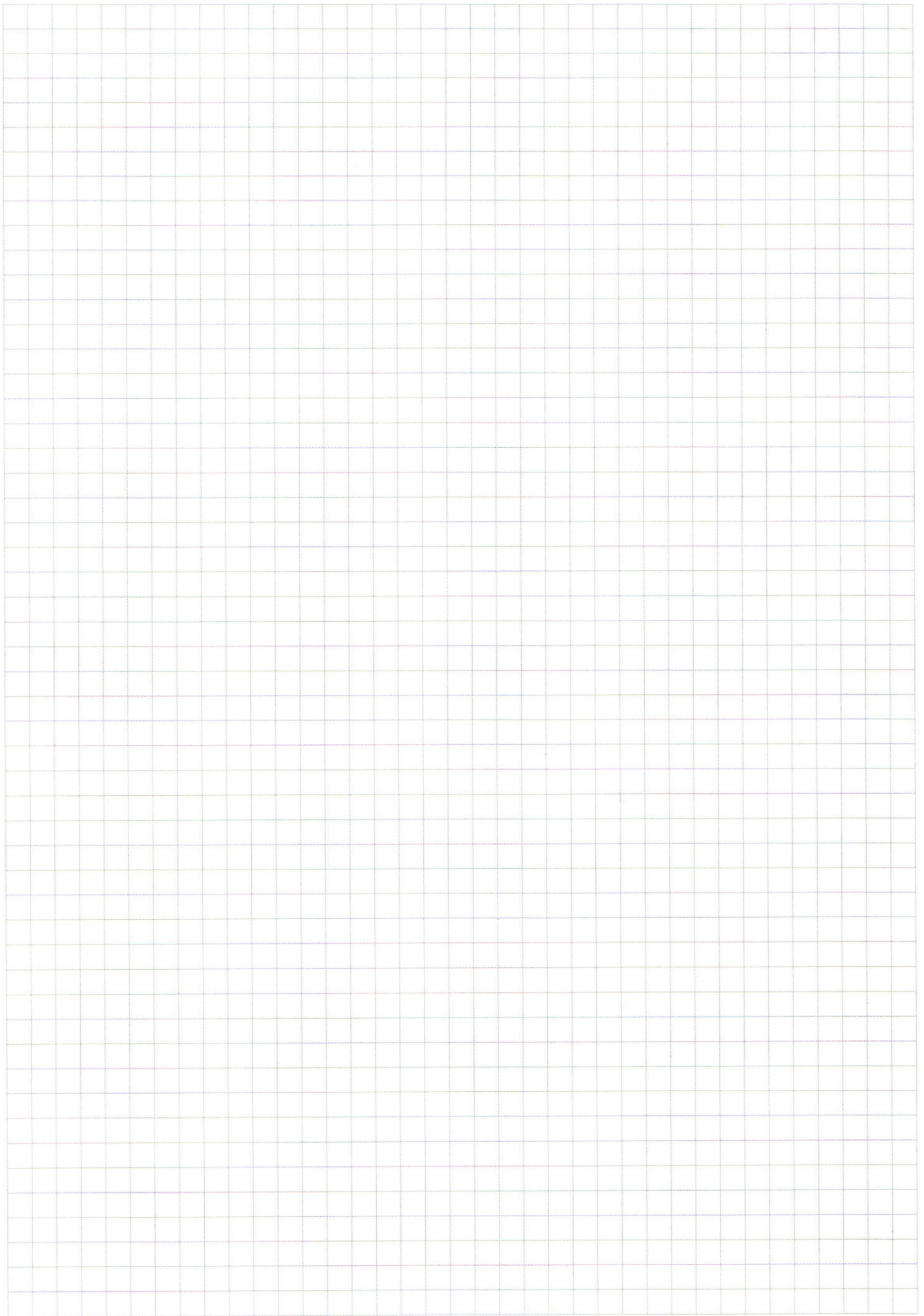
$$\geq 70 - 2494 - 64 \cdot 2^{64} + 128 + 2^{64} \cdot (2494 - 378) =$$

$$\cancel{2296}$$

$$= -2296 - 64 \cdot 2^{64} + 2^{64} \cdot 2116 =$$

$$= 2^{64}(2116 - 64) - 2296 = 2^{64} \cdot 2052 - 2296$$

ОТВЕТ: $2^{64} \cdot 2052 - 2296$ пар.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x. \quad \cos 7x + \sin 7x = 0,$$

$$2 \sin - 4x \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos 14x.$$

$$-2 \sin 4x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 7x + \sin 7x) = (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 7x - \sin 7x),$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x,$$

$$-\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x = 0,$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{5x}{2}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{63}, & y_0 - x = 2^x + x \cdot 2^{64} - 6 \cdot 2^{64}, & 2^6 - 2^x \\ y \leq y_0 + (2^{64} - 1)x, & y_0 - x - 2^x + 2^{64}(x - 6), & 2^{69} \end{cases}$$

$$y_0 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 6 \cdot 2^{64}, \quad (2^{64} - 1)(x - 6) + 64 - 2^x, \quad 2^7(2^{63} - 1)$$

$$64 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 6(2^{64} - 1), \quad x = y_0, \quad -2^6(2^{64} - 1) > (2^{64} - 1)(-64)$$

$$2^6 - 2^x > (2^{64} - 1)(6 - x)$$

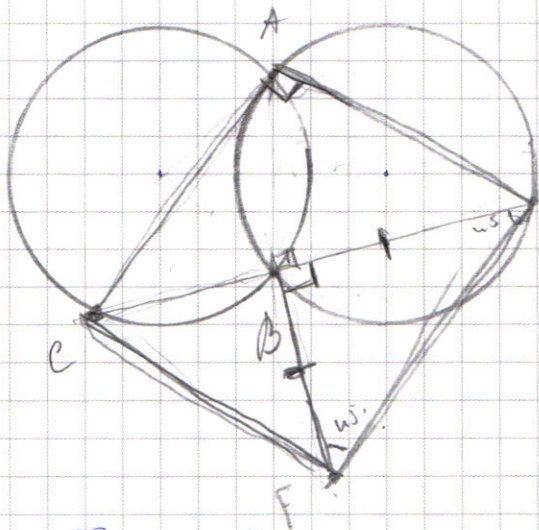
$$x > 6.$$

$$2(1 - 2^{x-6}) > (2^{64} - 1)(6 - x), \quad -2^6(2^{65} - 1) > (2^{64} - 1)(-65).$$

$$1 - 2^{x-6} > \frac{(2^{64} - 1)(6 - x)}{64}, \quad x \in (6, y_0) \quad 63,$$

$$x \cdot 2^6 \cdot 2^{64}, \quad y > 63, \quad 2^{64}, \quad 16 \cdot 2^{65}, \quad 32 \cdot 2^{64} + 6 \cdot 2^{64}, \quad 2^{64} \cdot 38, \quad 1 + 2^{64} \cdot 69.$$

$$\boxed{2^{64} \cdot 31 + 1}$$



$$BF = BD$$

$$y = 6 - y$$

$$CB^2 + BF^2 = CF^2$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{6 \cdot 64 \cdot 8}{2 \cdot 2 - 2} = \frac{64 \cdot 2 - 128}{2}$$

3

$$\frac{a^3 - 2a^2 - 7a + 12}{a^3 - 3a^2} \div \frac{a - 3}{a^2 + a - 4a}$$

$$\frac{63}{38}$$

$$\frac{a^2 - 7a}{a^2 - 3a} = \frac{(a - 3)(a^2 + a - 4a)}{-4a + 12}$$

$$\frac{7 + 68}{2} = \frac{76}{2} = 38$$

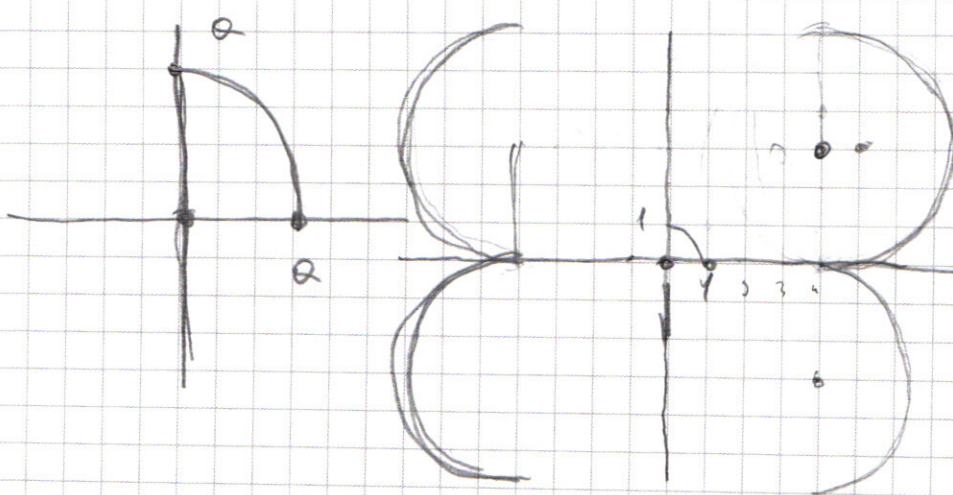
$$X_1 = 27, X_{63} = 68$$

$$\frac{7(63)}{2(2 - 1)}$$

$$63, 4 \cdot 240, 2520 = 126$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2484$$



$$a_1 = 7 + 0 - 1$$

$$a_{63} = 68$$

$$\frac{7 + 68}{2} = 38$$

$$\frac{76}{2} = 38$$

$$64$$

$$360 - 58$$

$$198$$

$$2116$$

$$378 - 25052$$

$$-2296$$

$$2082$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3345 \overline{) 5} \\ 30 \\ \underline{34} \\ 35 \\ \underline{25} \\ 25 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$5 \cdot 675 \rightarrow 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ 65 \\ \underline{25} \\ 25 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ 5 \\ \underline{25} \\ 25 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$55539111$$

$$555333111$$

80.

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 5 & 5 & 3 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$221$$

$$31$$

$$2,2,2,1$$

$$2,2,1,2$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \underline{31 \cdot 31} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \underline{31 \cdot 31 \cdot 21} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 221 \\ 221 \\ 212 \\ 212 \\ 122 \\ 122 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2,2,1,1 \\ 2211 \\ 2211 \\ 2211 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2,2,2,1 \\ 2,2,2,1 \\ 2,2,2,1 \\ 2,2,2,1 \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x$$

$$\sin 4x \sin 7x$$

$$\sin 4x \cos 7x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x, \quad |\sqrt{2}|$$

$$\sqrt{2} \cos 11x - \sqrt{2} \sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x = \cos 4x, \quad -\cos$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 7x\right) = \cos 4x, \quad \cos 7x = \sin 7x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos 4x, \quad \cos 7x = 1$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x + 2 \sin 4x \cos 7x, \quad 7x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$$

$$+ 2 \sin 4x (\cos 7x - \sin 7x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x,$$

$$\rightarrow \sin 4x (\cos 7x - \sin 7x) = (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\cancel{\cos 7x} - 2 \sin 4x = (\cancel{\cos 7x} + \sin 7x) \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x + \sin 7x,$$

$$\sqrt{2} \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & \begin{matrix} x > 0, \\ y > 0. \end{matrix} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

~~y⁵~~

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y &= 0, \\ (x-y)^2 - 4(y^2 - 3y + x) &= 0. \end{aligned}$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy}.$$

$$4(y^2 - 2y) = 0.$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x + 2\lg y}.$$

$$y(y-2) = 0.$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}.$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 2.$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2.$$

$$27 - 18 - 21 + 12.$$

$$38 \geq 5.$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = (y^4)^{\lg x},$$

$$y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} = 2^4 - 6 - 21 + 12.$$

$$\frac{y^5}{x} = y^4.$$

$$\frac{y^5}{x} = y^2 \cdot y^{\frac{2\lg y}{\lg x}}.$$

$$64 + 12$$

$$64 + 12 - 32 = 8$$

$$\frac{y}{x} = 1.$$

$$\frac{y^3}{x} = y^{\frac{2\lg y}{\lg x}}.$$

$$\frac{y^3}{x} = y^{2\lg_x y}.$$

$$\sqrt{x+x} \cdot (\sqrt{x-x})^{2+12} \cdot (\sqrt{x-2})^{-2+0}$$

$$y = x.$$

$$y^{3+2\lg_x y} = x.$$

$$\frac{y^3}{x} = y^{2\left(\frac{1}{\log_y x}\right)},$$

$$3 - 2\log_x y = \log_y x, \quad \log_x y = \frac{1}{2}.$$

$$3 - 2t = \frac{1}{t}.$$

$$x = y, \quad y = x^2.$$

$$3t - 2t^2 = 1$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

$$9 - 8 = 1.$$

$$\frac{3 \pm 1}{2}$$

$$t_1 = 1.$$

$$t_2 = 0,5.$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)