

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $2x^2 + 2x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$

$x(3x + 4) = 0$

~~$x = 0$~~

$x = -\frac{4}{3}$ ~~$x = \frac{4}{3}$~~

$3x + 4 = 0$

$x = -\frac{4}{3} \Rightarrow (-\frac{4}{3}; \frac{4}{3})$

② $-2x - x(-x)^{1/2} - 4x - 8(-x)^{1/2} = 0$

~~$-2x$~~ $2(-x)^{1/2} - x + 4(-x)^{1/2} - 8 = 0$

$(-x) + 6(-x)^{1/2} - 8 = 0$

кв. др. отн. $(-x)^{1/2}$

$\begin{cases} (-x)^{1/2} = 2 \\ (-x)^{1/2} = 4 \end{cases} \begin{cases} x = -4 \Rightarrow (-4; 2) \\ x = -16 \Rightarrow (-16; 4) \end{cases}$

Ответ: $(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}); (-4; 2); (-16; 4)$

~~Вопрос~~

(ABC) — начертание окруж.

ингу

(EFD) — начертание окруж.

Верху

~~Вопрос~~

$$G = (SO) \cap (EFD)$$

$$K = (SO) \cap (ABC)$$

$$SH \perp (ABC) \quad I = (ED) \cap (SK)$$

$$SH \perp (DEF) \quad \alpha = \angle KSO$$

$$KO = GO = r = OH$$

$$SDEF \sim SABC \text{ (т.к. } (ABC) \parallel (DEF) \Rightarrow$$

$$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \frac{3}{2} = \frac{SG + 2r}{SG}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + 2 \frac{r}{SG} \quad \text{или}$$

$$\frac{r}{SG} = \frac{1}{4}$$

(по 2^м углам)

$$\triangle KSO \sim \triangle ISG \text{ (по 2^м углам)}$$

$$\frac{SG+r}{SG} = \frac{r}{\tan \alpha \cdot SG}$$

$$\left(1 + \frac{r}{SG}\right) \tan \alpha = \frac{r}{SG}$$

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) \tan \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \arctan \frac{1}{5}$$

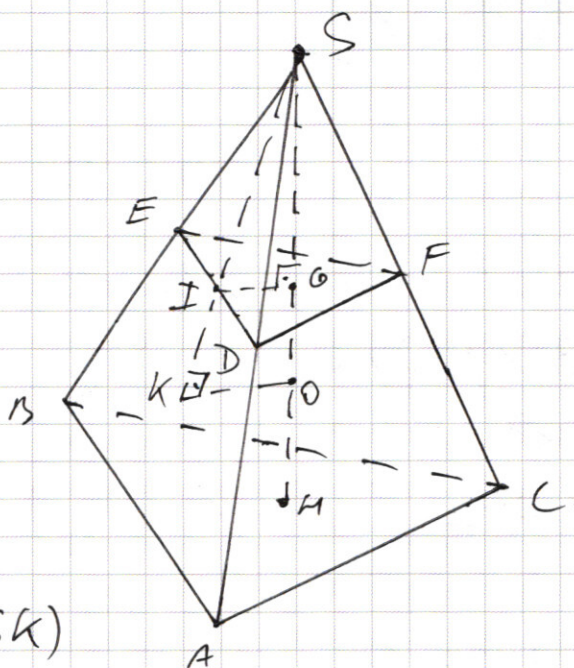
$$\frac{SG+r}{\frac{SG}{\cos \alpha}} = \frac{r}{\tan \alpha \cdot SG}$$

$$1 + \frac{r}{SG} = \frac{r}{\sin \alpha \cdot SG}$$

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \arcsin \frac{1}{5}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(3/q^3 y - 1/q(-x)) / q(-x) = 2/q^2 y$$

$$2/q^2 y - 3/q(-x) / q y + 1/q^2(-x) = 0$$

$$D = 9/q^2(-x) - 3/q^2(-x) = (8/q(-x) - 2\sqrt{2}/q(-x)) / (3/q(-x) +$$

$$+ 2\sqrt{2}/q(-x)) = 1/q^2 x$$

$$1/q y = \frac{3/q(-x) \pm 1/q(-x)}{4}$$

$$4/q y = 3/q(-x) + 1/q(-x)$$

$$4/q y = 3/q(-x) - 1/q(-x)$$

$$1/q y = 1/q(-x)$$

$$2/q y = 1/q(-x)$$

$$1/q y = 1/q(-x)$$

$$2/q y = 1/q(-x)$$

$$y = -x \quad (1)$$

$$y^2 = -x \quad (2)$$

$$(1) \quad 2x^2 + 2x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$$

$$x(5x + 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{4}{5} \end{cases} \quad \left(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

$$(2) \quad -2x - x(-x)^{1/2} - 4x - 8(-x)^{1/2} = 0$$

$$(-x)^{1/2} - x + 6(-x)^{1/2} - 8 = 0$$

$$\begin{cases} (-x)^{1/2} = 2 \\ (-x)^{1/2} = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ x = -16 \end{cases} \quad \begin{cases} (-4; 2) \\ (-16; 4) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right); (-4; 2); (-16; 4)$$

✓ 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x =$$

$$= \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$(1) \sin 5x = \cos 5x$$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k$$

$$(2) \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 5x + \cos 5x) = \sin 5x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 5x \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} \sin 2x \cos 3x + \sqrt{2} \cos 2x \sin 3x +$$

$$+ \sqrt{2} \cos 2x \cos 3x - \sqrt{2} \sin 2x \sin 3x$$

$$(\sqrt{2} \cos 3x + \sqrt{2} \sin 3x - 2) \cos 2x = \sqrt{2} (\sin 3x - \cos 3x) \sin 2x$$

$$\sqrt{2} (\sin 3x + \cos 3x) \cos 2x - 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\sin 3x - \cos 3x) \sin 2x$$

$$(\sin(3x + \frac{\pi}{4}) - 1) \cos 2x = \sin(3x - \frac{\pi}{4}) \sin 2x$$

$$2 \cos 2x = \cos 3x \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin 3x \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$-2 \sin(\frac{1}{2}(2x + 5x - \frac{\pi}{4})) \sin(\frac{1}{2}(2x - 5x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\frac{1}{2}(2x + 5x - \frac{\pi}{4}) = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2}(2x - 5x + \frac{\pi}{4}) = \pi k$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k \\ -3x + \frac{\pi}{4} = 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \end{cases}$$

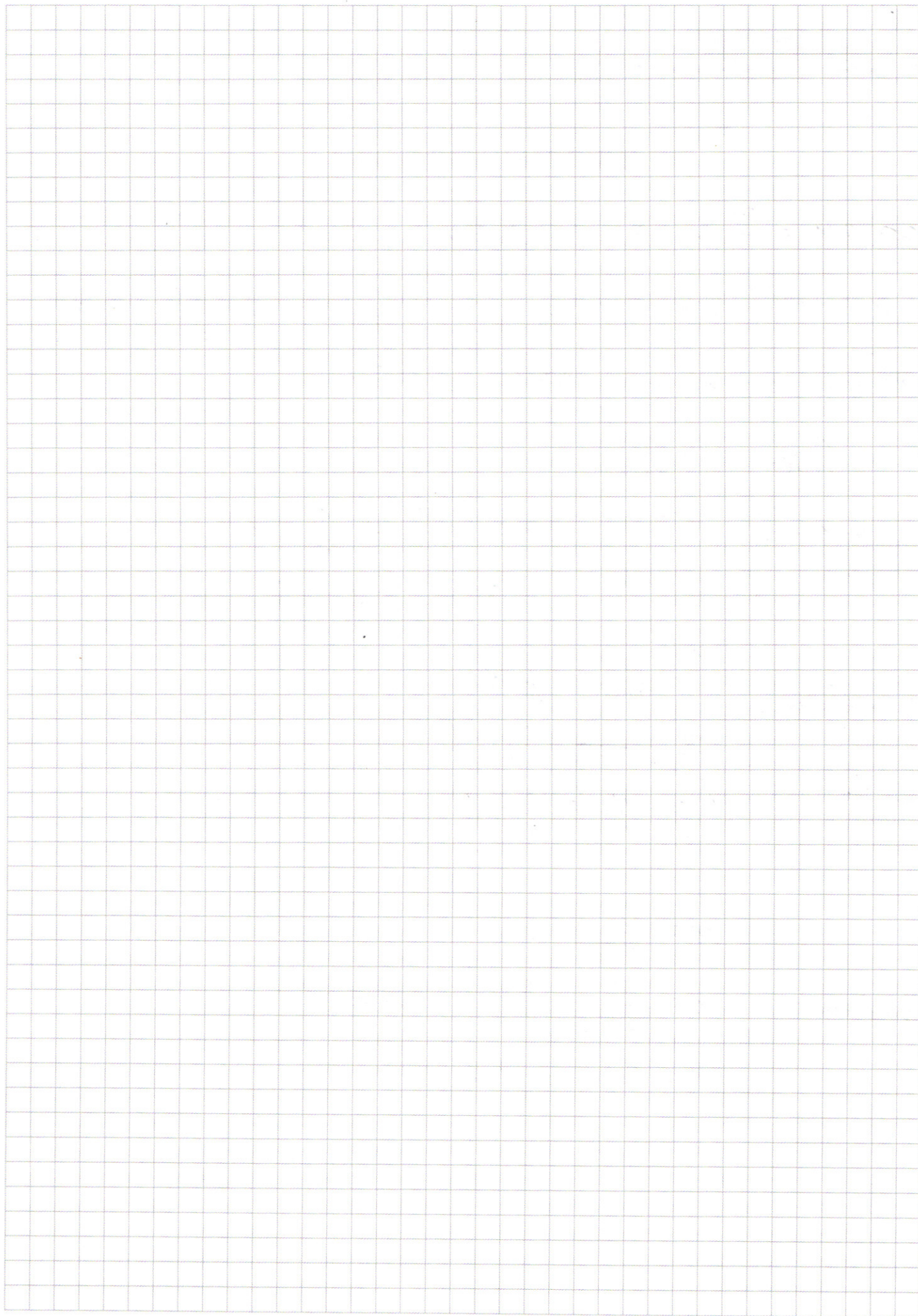
Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k \\ x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \end{cases}$$

это не решение

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 10x = \cos(7x + 3x) = \cos 7x \cos 3x -$$

$$- \sin 7x \sin 3x$$

~~или~~

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x =$$

$$= \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x -$$

$$- \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos$$

~~или~~

$$2 \cos 5x \cos 4x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} = 2 \sin 5x \cos 4x$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg 5} &= (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 2y &= 0 \end{aligned} \right.$$

Область решений:

$$\left\{ \begin{aligned} y > 0 \\ xy < 0 \\ -xy > 0 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} y > 0 \\ xy < 0 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x < 0 \\ y > 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left(\frac{x^2}{y} \right)^{\lg 5^2} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

~~x^2~~

$$(-x)^{\lg 5^4} \cdot y^{-\lg 5^2} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(-x)^{\lg 5^4 + \lg(-xy)} = y^{\lg 5^2}$$

$$(-x)^{\lg \frac{y^4}{xy}} = y^{\lg 5^2}$$

$$(-x)^{\lg \frac{y^3}{x}} = y^{\lg 5^2} = (y^{\lg 5})^2$$

$$\lg \frac{y^3}{x} \lg(-x) = \lg y^2 \lg y$$

$$\lg \frac{y^3}{x} = \lg y$$

$$\lg \frac{y^3}{x} = \lg y$$

$$(-x)^{\lg \frac{y^3}{x}} = y^{\lg 5^2}$$

$(-1; 1)$ — решение

~~$\lg \lg$~~

$$\lg \left(\frac{y^3}{x} \right) = \lg(-x) = \lg y^2 \cdot \lg y$$

$$(\lg y^3 - \lg(-x)) \lg(-x) = \lg y^2 \lg y^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y-x+6| + |y+x-6| = 12 \quad (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(I) $y \geq x-6, y \geq -x+6$

$$y-x+6 + y+x-6 = 12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6, x \in \mathbb{R}$$

(II) $y \geq x-6, y \leq -x+6$

$$y-x+6 - y-x+6 = 12$$

$$x = 0$$

(III) $y \leq x-6, y \leq -x+6$

$$-y+x-6 - y-x+6 = 12$$

$$y = -6, x \in \mathbb{R}$$

(IV) $y \leq x-6, y \geq -x+6$

$$-y+x-6 + y+x-6 = 12$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x = 6$$

(1) задаёт прямоугольник с вершинами $(0; 6), (6; 6), (6; -6), (0; -6)$

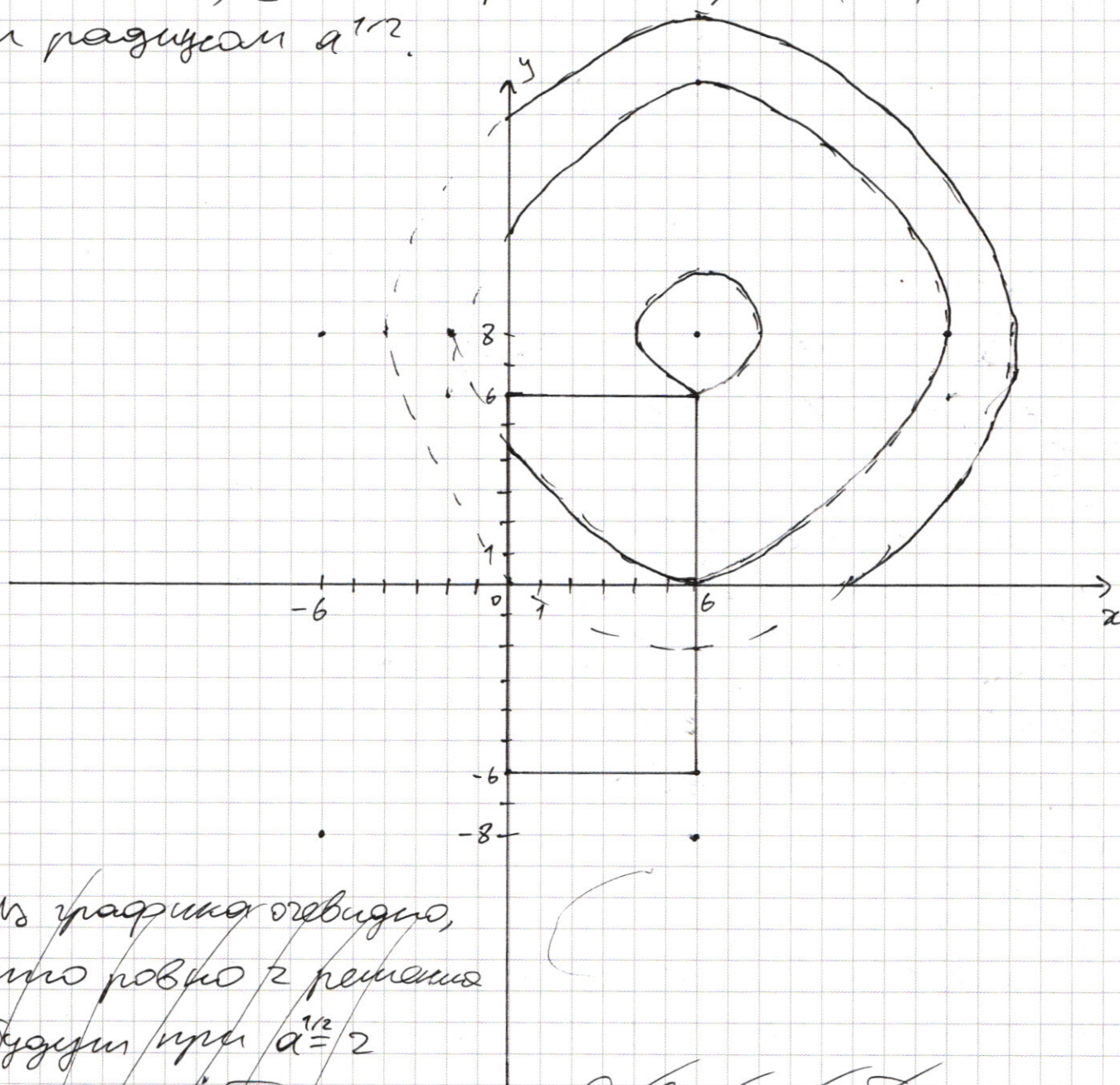
(2) :

Ⓘ: ~~$y > 0$~~ $x \geq 0, y \geq 0$: окр. с центром $(6; 8)$
и радиусом $a^{1/2}$

Ⓜ: $x \geq 0, y \leq 0$: окр. с центром $(6; -8)$
и радиусом $a^{1/2}$

Ⓢ: $x \leq 0, y \leq 0$: окр. с центром $(-6; -8)$
и радиусом $a^{1/2}$

Ⓝ: $x \leq 0, y \geq 0$: окр. с центром $(-6; 8)$
и радиусом $a^{1/2}$.



Из графика очевидно,
что ровно 2 решения
будут при $a^{1/2} = 2$
или $a = 4$

Ответ: $a = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

центры окружностей центрально симметричны относительно точки O . Треугольники симметричны относительно O . Поэтому ровно 2 решения соответствуют ситуации, когда окружность с центром $(6; 8)$ касается пересекает ломаную $(0; 0); (0; 6); (6; 6); (6; 0)$ ровно в 1^{ой} точке. $(0; 0)$ не включается

$$a^{\text{кр}} \in \{2\} \cup (8; \sqrt{6^2 + 8^2})$$

$$a^{\text{кр}} \in \{2\} \cup 8$$

$$a^{\text{кр}} \in \{2\} \cup (8; \sqrt{6^2 + 8^2})$$

$$a^{\text{кр}} \in \{2\} \cup (8; 10)$$

$$a \in \{52\} \cup (252, 100)$$

Ответ: 5

Ответ: $a \in \{4\} \cup [64; 100]$

Ответ: $a \in \{4\}$

Ответ: $a \in \{4\} \cup (64; 100)$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Область решений:

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^4}{y}\right)^{\lg y^2} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(-x)^{\lg y^4} y^{-\lg y^2} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(-x)^{\lg y^4 - \lg(-xy)} = y^{\lg y^2}$$

$$(-x)^{\lg \frac{y^4}{-xy}} = y^{\lg y^2}$$

$$(-x)^{\lg \frac{y^3}{-x}} = y^{\lg y^2}$$

$(-1; 1)$ не явл. решением системы

$$\lg \frac{y^3}{-x} \lg(-x) = \lg y^2 \lg y$$

$$(\lg y^3 - \lg(-x)) \lg(-x) = 2 \lg^2 y$$

$$(3 \lg y - \lg(-x)) \lg(-x) = 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg(-x) \lg y + \lg^2(-x) = 0$$

квар. отн. $\lg y$ ↑

$$D = 9 \lg^2(-x) - 8 \lg^2(-x) = \lg^2(-x)$$

$$\lg y = \frac{1}{4} (3 \lg(-x) \pm |\lg(-x)|)$$

$$\begin{cases} 4 \lg y = 3 \lg(-x) + \lg(-x) \\ 4 \lg y = 3 \lg(-x) - \lg(-x) \end{cases} \quad \begin{cases} \lg y = \lg(-x) \\ 2 \lg y = \lg(-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ y^2 = -x \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \alpha \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$y = x - 6$$

$$y = -x + 6$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} ($$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

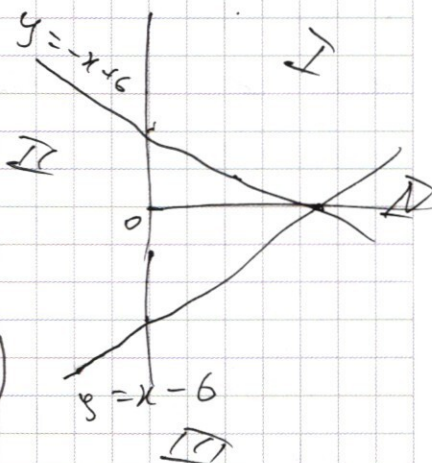
$$\begin{cases} \alpha + \beta = \gamma \\ \alpha - \beta = \varphi \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\gamma + \varphi}{2}$$

$$\beta = \frac{\gamma - \varphi}{2}$$

$$\sin \gamma + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\gamma + \varphi}{2} \cos \frac{\gamma - \varphi}{2}$$

$$\cos \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} ($$



✓ 7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{Z} / \\ y \in \mathbb{Z} / \end{matrix}$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$(x - 4) \cdot 3^{81} - 3^x - x + 85 > 0$$

$$(x - 4) - 3^{x-81} - \frac{x+25}{3^{81}}$$

$$f(x) = (x - 4) \cdot 3^{81} - 3^x - x + 85$$

$$\text{при } x \in \mathbb{Z}, x \leq 4 \quad f(x) < 0$$

$$\text{при } x \in \mathbb{Z}, x = 4 \quad f(x) = 0$$

$$\text{при } x > 4 \quad f(x) > 0$$

✓ 1

$$\begin{array}{r} 16875 \mid 5 \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{25} \\ 12 \\ \underline{10} \\ 2 \\ \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 675 \mid 5 \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 135 \mid 5 \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ \underline{20} \\ 7 \\ \underline{5} \\ 2 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$$

или в виде

$\Rightarrow$ число будет состоять из $4^{\text{х}}$, $5^{\text{х}}$ и $3^{\text{х}}$ "3". Чтобы произведение цифр не уменьшалось, на оставшаяся цифра равна 1.

$$C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = 8 \cdot 1 \cdot \frac{7!}{3!(7-3)!} = 8 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 280$$

Ответ: 280 чел.