

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8-значное число

$$\text{число} = 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

3 цифры - тройки

3 цифры - пятёрки

2 оставшиеся - только 1.

тогда кол-во способов =

$$= \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 560$$

Ответ: 560 чисел.

$$3375 \mid 5$$

$$675 \mid 5$$

$$135 \mid 5$$

$$27 \mid 3$$

$$9 \mid 3$$

$$3 \mid 3$$

$$1 \mid 1$$

$$\begin{array}{r} 25 \cdot 15 \cdot 9 \\ \times 3 \\ \hline 75 \\ 150 \\ 225 \\ \hline 375 \end{array}$$

$$3375 \mid 15$$

$$225 \mid 15$$

$$15 \mid 15$$

$$1 \mid 1$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta +$$

$$+ \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta =$$

$$= 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) =$$

$$= 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \cos 7x \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 11x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - \cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - \sin 11x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-(\sin(11x - \frac{\pi}{2}) + \sin 11x) + \sin(3x - \frac{\pi}{2}) + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 3x - \sin 11x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \cos 7x \sin(-4x) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) \sin(-4x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$(1) \int \sqrt{5} |y-3-x| + |(y-3)-(-x)| = 6 \quad a? : 2 \text{ рсм.}$$

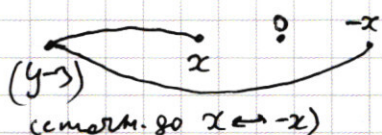
$$(2) \begin{cases} (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

(1): прочитаем по-русски:

сумма расстояний от $y-3$ до x и от $y-3$ до $-x$ равняется 6.

$$|(y-3)-x| + |(y-3)+x| = 6$$

2 б-та:

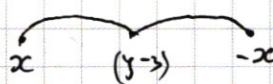


$$\begin{aligned} p(y-3; x) + p(y-3; -x) &= \\ &= 2p(y-3; 0) \end{aligned}$$

$$2|y-3| = 6$$

$$|y-3| = 3$$

$$|y-3| \geq |x|$$



$$\begin{aligned} p(y-3; x) + p(y-3; -x) &= \\ &= 2|x| \end{aligned}$$

$$2|x| = 6$$

$$|x| = 3$$

$$\begin{cases} |x| = 3 \\ |x| \geq |y-3| \end{cases}$$

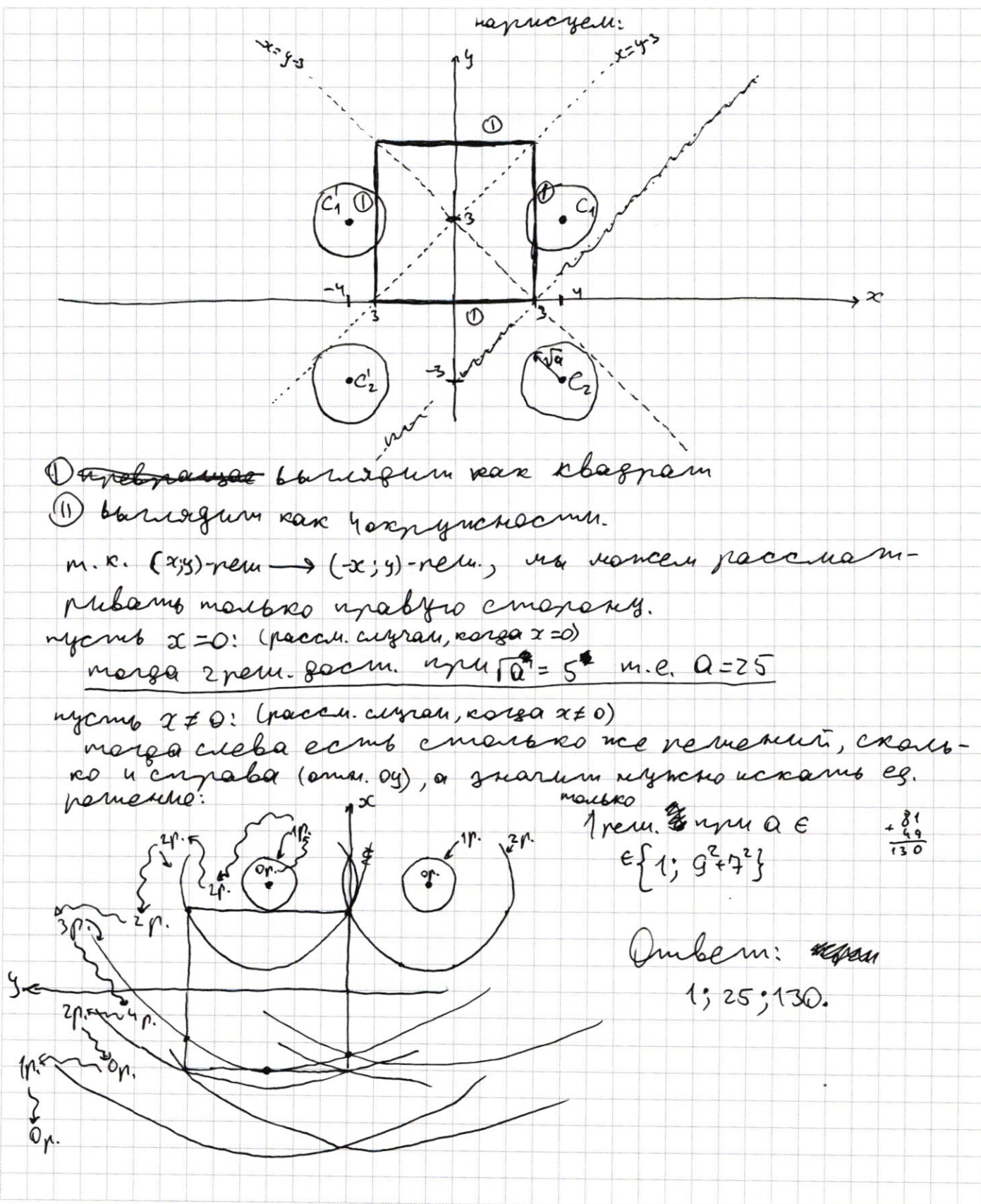
(2): $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$ - ~~окружность~~ несколько окружностей с радиусом $\sqrt{a}$

имеем:

$$\left(\begin{cases} |y-3| = 3 \\ |y-3| \geq |x| \\ |x| = 3 \\ |y-3| \leq |x| \end{cases} \right) \textcircled{I}$$

$$\left(\begin{cases} (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases} \right) \textcircled{II}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$-2 \cos 7x \sin 4x - 2 \cos(\pi - 7x) \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \cos 7x \sin 4x + 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x$$

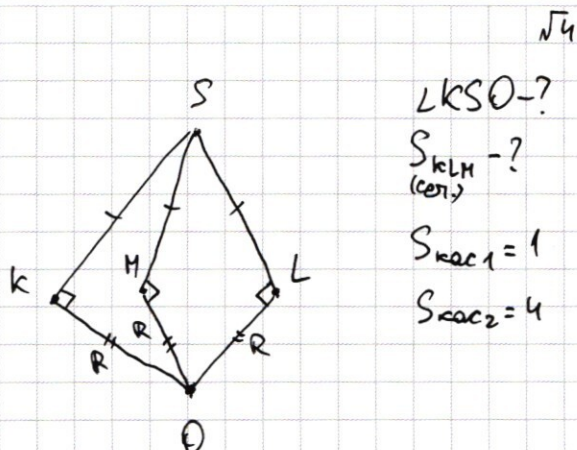
$$\cos 14x = 0$$

$$-2 \sin 4x \left(\cos 7x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \left(2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-4 \sin 4x \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 14x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle KSO = ?$

S_{KLM} - ?
(сеп.)

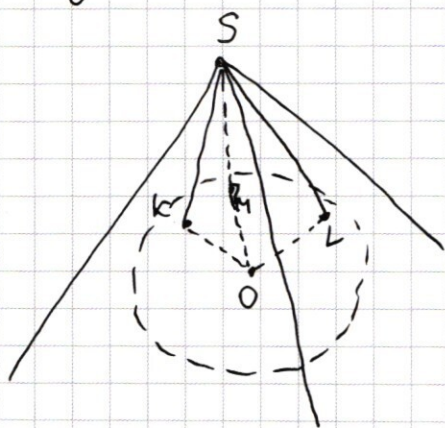
$S_{кас1} = 1$

$S_{кас2} = 4$

$$OK = OM = OL = R$$

т.е. SK, SM и SL - кас. к
сфере, $SK = SM = SL$

т.е. $\triangle SKO = \triangle SMO = \triangle SLO$ (т.к. по
гипотенуз. и стороне),
 $(KLM) \perp SO$ (т.е. проек-
ция L на SO в $\triangle SLO = Z$, т.к. M ...
и т.к. K ... совпадают,
а значит $SO \perp KZ, SO \perp MZ, SO \perp LZ$)



пусть $S_{кас1}$ имеет $\triangle 1$, а

$S_{кас2}$ имеет $\triangle 2$

тогда плоскость $\triangle 1 \parallel$ плос-
кости $\triangle 2$ (т.к. они $\perp SO$) и $\parallel$
 $\parallel (KLM)$ (т.к. $\perp SO$)

пусть:

$$\triangle 1 = \triangle G_1 F_1 H_1$$

$$\triangle 2 = \triangle G_2 F_2 H_2$$

а $\triangle G_3 F_3 H_3$ лежит в (KLM)

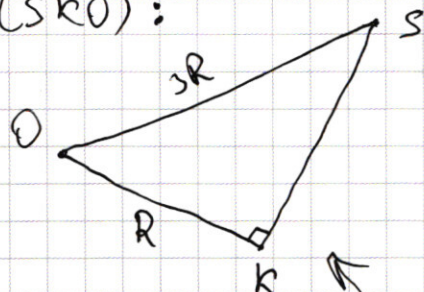
т.е. $(G_1 F_1 H_1) \parallel (G_2 F_2 H_2) \parallel (G_3 F_3 H_3)$,
 $G_i F_i \parallel G_j F_j$, (и все G_i, H_i, F_i
аналогично)

т.е. $\triangle 1 \sim \triangle 2 \sim \triangle G_3 F_3 H_3$

Пусть $SO = d$ тогда

$\triangle 1 : \triangle G_3 F_3 H_3 : \triangle 2 = (d-R) : d : (d+R)$ (т.к. $d-R$ - рассто-
яние от т. кас. до S , d - расст. от S до O , а $d+R$ - (т.к. кас. $\triangle 2$; S)

(SKO):



мы знаем, что

$$\frac{(d-R)^2}{(d+R)^2} = \frac{S_{\text{сac1}}}{S_{\text{сac2}}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{d-R}{d+R} = \frac{1}{2}$$

$$2d - 2R = d + R$$

$$d = 3R$$

$$P(O; S) = 3R$$

$\angle KSO$ мы не можем найти не можем
м.к. ΔKSO - н/гр.

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

и мы знаем, что

$$\begin{cases} (d-R)^2 : d^2 : (d+R)^2 = 1 : S_{\text{клим}} : 4 \\ d = 3R \end{cases}$$

$$(2R)^2 : 9R^2 : (4R)^2 = 1 : S_{\text{клим}} : 4$$

$$4R^2 : 9R^2 : 16R^2 = 1 : S_{\text{клим}} : 4$$

$$\frac{16R^2}{4R^2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{9R^2}{4R^2} = \frac{S_{\text{клим}}}{1} = \frac{9}{4}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

$$S_{\text{клим}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ищете систему:

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$$

$\sqrt{3}$

т.е. из $\lg x \in \mathbb{R}$ следует, что $x > 0$ и из $\lg xy$ следует,
что $xy > 0$, $y > 0$

логарифмируем по осн.-числу 10:

$$(1) \begin{cases} \lg x \lg \frac{y^5}{x} = 2\lg xy \lg y \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1): \lg x (5\lg y - \lg x) = 2\lg xy (\lg x + \lg y)$$

$$5\lg x \lg y - \lg^2 x = 2\lg x \lg y + 2\lg^2 y$$

$$\lg^2 x + 2\lg^2 y - 3\lg x \lg y = 0; (\lg x - \lg y)(\lg x - 2\lg y) = 0$$

~~Ищете систему:~~

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ (\lg x - \lg y)(\lg x - 2\lg y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ \begin{cases} x = y & (1) \\ x = y^2 & (2) \end{cases} \end{cases}$$

(из упр-ия I мы знаем, что
 $x > 0$ и $y > 0$)

(1):

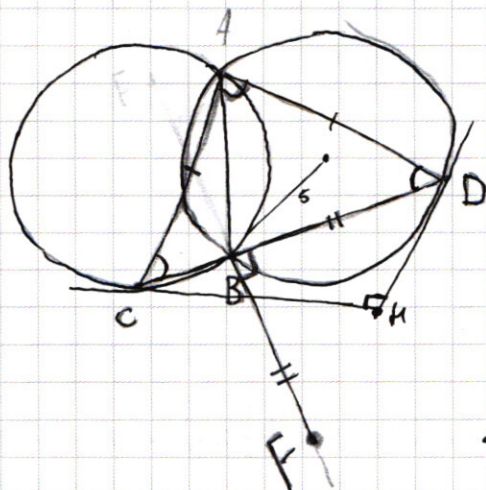
$$\begin{cases} x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$-4x(x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$



$\sqrt{6}$

$CF=? ; BC=6 SAFC=?$

$R=5$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB} = \angle ADB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle CAD - \text{пр } \angle$$

проведём касательные через C и D.

пусть они перес. в м-ре H.

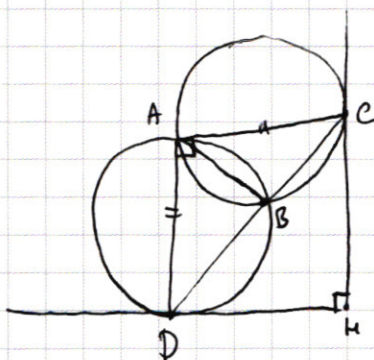
$$\text{мы знаем: } \angle CAB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CB} = \angle DCH$$

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BD} = \angle CDH$$

$$\angle CAB + \angle BAD = 90^\circ = \angle DCH + \angle CDH,$$

а значит $CH \perp DH$.

пусть CB — диаметр и DB — диаметр
тогда $CB \perp DB$.



~~заметьте, что из экр-ции 1, экр-ция 2, получаем, что вершины на 90° от A.~~

повернём экр-ию ABD на 90° от м. A:

~~Две точки совпадут с C, CH должно стать $\parallel$ DH~~



если окружности не совпадут, то $CH \nparallel DH$ (противоречие), а значит они должны совпасть.

окр-ии совпали: (B выдвигается)

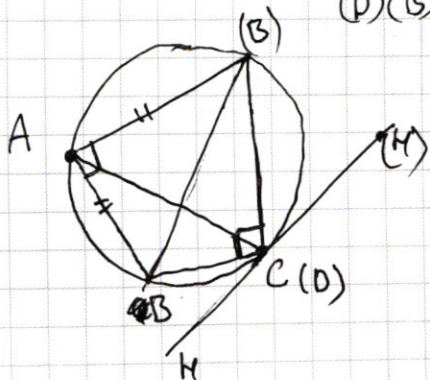
$$(D)(B) \perp BC \text{ (м.к. поворота на } 90^\circ)$$

$\triangle (B)CB$ — пр.т., а значит

$$BD^2 + BC^2 = (5+5)^2 = 100$$

$$AB = A(B), B(B) = 10 \Rightarrow$$

$$AB = A(B) = 5\sqrt{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 $\sqrt{7}$

м.р. Катини

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \max(0; 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65})$$

решили:

$$70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \geq 0$$

$$2^{64}x + 70 - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \geq 0$$

$$(1) f(x) = -2^x + 2^{64}x - x - 3 \cdot 2^{65} + 40 \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = -\ln 2 \cdot 2^x + 2^{64} - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$2^{64} = 1 + \ln 2 \cdot 2^x$$

$$\ln 2 \cdot 2^x = 2^{64} - 1$$

лм. ер. релметне

т.е. кол-во экстремумов у $f: 1$.

$f''(x) = -\ln^2 2 \cdot 2^x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, а значит f вогнута
всюду.

↑ выпукла вверх, т.к. ср. экстремум $\Rightarrow$ имеет не более 2-х корней. $\Rightarrow$ не более 2-х решений пер-ва (1) $\Rightarrow$ не более 2-х целых решений (1).

~~$$f(8) = -8 + 3 \cdot 2^{65} - 3 - 3 \cdot 2^{65} + 170 \geq 0$$~~

~~$f(2) = 82944$~~

$$f(6) = -\frac{6^4}{34} + 3 \cdot 2^{65} - 6 - 3 \cdot 2^{65} + 70 = 0$$

~~$$f(5) = -52 + 5 \cdot 2^{64} = x - 3 \cdot 2^{65} + 10$$~~

$$f(6) = 2^6 - 1 - \ln 2 \cdot 2^6 > 0 \Rightarrow \underline{6 - \text{левая граница.}}$$

- т.к. 6-левая граница суживания, следовательно утверждение в рамке (т.е. не нужно сужив. по тем х, где ф-ия не целая)

основание:

нусть у нас есть какой-то целый x !

нужно найти

$$y \in (f(x); g(x)]$$

также будет как раз

$$g(x) - f(x) \quad m.k.$$

12-1-11

замечили,
что мы не
считаем
пары (x, y) 1 раз
раз n .
и вносим
в с.с. x и y раз

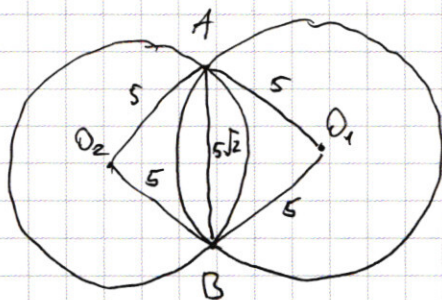
u m.r. $f(x) \in \mathbb{Q}$ u $g(x) \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$$

~~$$x^2 + 2x - 64 = 0 \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 256}}{2} = \frac{-2 \pm 16}{2} \Rightarrow x = 7 \text{ или } x = -9$$~~

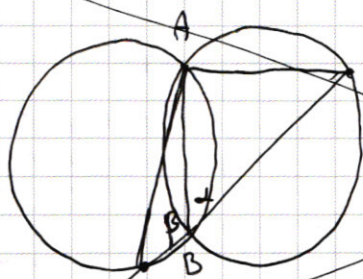
возвр. к первой картинке:



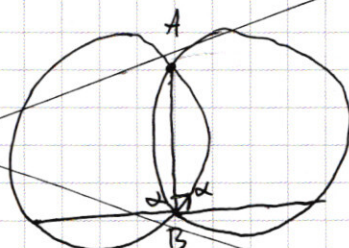
$\triangle AO_1B = \triangle AO_2B$ - п/у.т., п/д.
(по теореме, одн. гипотенуза и катет)
(по теореме, одн. гипотенуза и катет)

а значит $\frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ \Rightarrow \angle APC = \angle ACD = 45^\circ$

возм. 2 в-та взаимн. пересечения:



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



$$\alpha = 90^\circ$$

мы знаем, что угол между кас. и хордой = впис. углу.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(64) = -2^{64} + 64 \cdot 2^{64} - 64 - 6 \cdot 2^{64} + 70 > 0$$

$$f(65) = -2 \cdot 2^{64} + 65 \cdot 2^{64} - 65 - 3 \cdot 2^{65} + 70 =$$

$$= -8 \cdot 2^{64} + 65 \cdot 2^{64} - 65 + 70 > 0$$

$$f(70) = -2^6 \cdot 2^{64} - 70 + 6 \cdot 2^{64} + 70 = 0$$

70 - правая граница.

для (1)

т.е. ответ: $x \in [6; 70]$

т.е. нужно найти:

$$\sum_{x=6}^{70} (70 + x \cdot 2^{64} - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) =$$

$$2^{70} - 1 - 2^5 =$$

$$= 2^{70} - 33$$

$$= 65 \cdot 70 + 2^{64} \left(\frac{76 \cdot 2^{65}}{2} \right) - \left(\frac{76 \cdot 2^{65}}{2} \right) - 3 \cdot 2^{65} - \sum_{x=6}^{70} 2^x =$$

$$= 65 \cdot 70 + (2^{64} - 1) (65 \cdot 38) - 3 \cdot 65 \cdot 2^{65} - 2^{70} + 33 =$$

$$= 2^{64} (65 \cdot 38 - 6 \cdot 65 - 2^6) + 65 \cdot 70 - 65 \cdot 38 + 33 =$$

$$= 2^{64} (65 \cdot 32 - 2 \cdot 32) + 65 \cdot 32 + 1 \cdot 32 + 1 =$$

$$= 2^{64} \cdot 63 \cdot 32 + 66 \cdot 32 + 1 =$$

$$= 2016 \cdot 2^{64} + 2113$$

$$\begin{array}{r} \times 63 \\ 32 \\ + 126 \\ \hline 189 \\ + 2016 \\ \hline 96 \\ \hline 2112 \end{array}$$

Ответ: $2016 \cdot 2^{64} + 2113$ пар.

(2):

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y + 12 = 0 \end{cases}$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 4y - 3y + 12) = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

$$y(y-3)(y^2+y-4) = 0$$

$$y(y-3)\left(y - \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)\right)\left(y - \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\right) = 0$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ y = 0 \\ y = 3 \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ x = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} y & 1 & -2 & -7 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & -7 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} y^2 + y - 4 &= 0 \\ D &= 1 + 16 = 17 \\ y &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} y & 1 & -2 & -7 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3 &= 2 \cdot 9 \\ 9 &= 18 \end{aligned}$$

Ответ: $(4; 4)$
 $(9; 3)$
 $\left(\frac{18-2\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$