МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть есть некое число $\overline{abcdefgk}$, где каждая буква - цифра. Известно, что $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f\cdot g\cdot k = 3375$. Разложим число 3375 на простые множители: $3375 = 5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot1\cdot1$. Если бы все цифры были различными, то кол-во перестановок равнялось бы 8! Т.к. 5 повторяется 3 раза, 3 повторяется 3 раза и 1 повторяется 2 раза, то различных вариантов чисел будет $\frac{8!}{3!\cdot3!\cdot2!} = 560$

Ответ: 560.

№2.

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\cdot\sin 7x\cdot\sin 4x - 2\cdot\sin 4x\cdot\cos 7x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$2\sin 7x\cdot\sin 4x + 2\sin 4x\cdot\cos 7x = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)(\sin 7x + \cos 7x)$

$2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)(\sin 7x + \cos 7x)$

$(\sin 7x + \cos 7x)(\sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x) - 2\sin 4x) = 0$

1. $\sin 7x + \cos 7x = 0$

$\sin^2 7x + 2\sin 7x\cdot\cos 7x + \cos^2 7x = 0$

$\sin 14x = -1$

$14x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7},\ n\in\mathbb{Z}$

2. $\sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x) - 2\sin 4x = 0$

$\sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x = 2\sin 4x$

$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 7x$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}.$

$\sin 4x = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin 7x - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x$

$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$

2.1) $4x + 2\pi n = 7x - \frac{\pi}{4}, n \in Z$

$3x = 2\pi n + \frac{\pi}{4}, n \in Z$

$x = \frac{8\pi n + \pi}{12}, n \in Z$

2.2) $4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

$11x = \frac{5\pi + 8\pi n}{4}, n \in Z$

$x = \frac{5\pi + 8\pi n}{44}, n \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}; \frac{8\pi n + \pi}{12}; \frac{5\pi + 8\pi n}{44}, n \in Z.$

№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1): $|y-(3+x)| + |y-(3-x)| = 6.$

1. $y \geq 3+x, y \geq 3-x$

$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$

$2y = 12$

$y = 6$

2. $y \geq 3+x, y \leq 3-x$

$y - 3 - x - y + 3 - x = 6$

$-2x = 6$

$x = -3$

3. $y \leq 3+x, y \geq 3-x$

$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$

$x = 3$

4. $y \leq 3+x, y \leq 3-x$

$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$

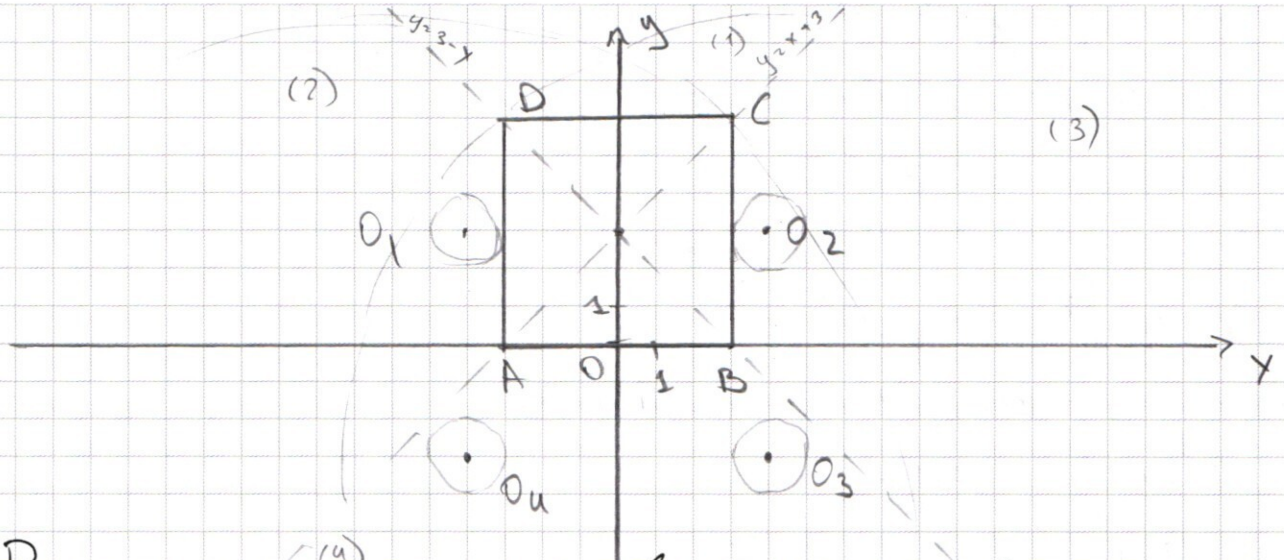
$y = 0.$

(2) – т. к. возможны 4 случая: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$, то графиком этой функции будут являться 4 окр-ти с центрами $(4;3), (4;-3), (-4;3), (-4;-3)$ и радиусами $\sqrt{a}$.

Построим графики данной системы ур-ий

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Рассмотрим, как будет изменяться кол-во решений в зависимости от длины радиуса ($\sqrt{a}$)

$\sqrt{a} \in (0;1)$ - 0 решений

$\sqrt{a} = 1$ – 2 реш. - когда окр-ти с центрами в O_1 и O_2 кас. AD и CB соотв.

$\sqrt{a} \in (1; \sqrt{10}]$ – 4 реш. - Пока окр-ти O_3 и O_4 не касаются т. B и A

$\sqrt{a} \in (\sqrt{10}; \sqrt{58}]$ - 8 реш. - когда каждая из окр-тей пересекает стороны квадрата 2 раза

$\sqrt{a} \in (\sqrt{58}; \sqrt{130})$ - 4 реш. - когда окр-ти O_2 и O_1 уже не кас. квадрата.

$\sqrt{a} = \sqrt{130}$ - 2 реш. - когда окр-ть O_4 кас. т. C, а окр-ть O_3 кас. т. D

$\sqrt{a} > \sqrt{130}$ - 0 реш. - когда ни одна окр-ть уже не пересекает квадрат.

$\sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1$

$\sqrt{a} = \sqrt{130} \Rightarrow a = 130$

Ответ: $a = 1$, $a = 130$.

№3.

ОДЗ: $x>0, y>0$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \ (1) \end{cases}$$

(1): $x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0$

$x^2-2x(y+2)+(y+2)^2-(y+2)^2-3y^2+12y=0$

$(x-y-2)^2-y^2-4y-4-3y^2+12y=0.$

$(x-y-2)^2-4y^2+8y-4=0$

$(x-y-2)^2-(4y^2-8y+4)=0$

$(x-y-2)^2-(2y-2)^2=0$

$(x-y-2-2y+2)(x-y-2+2y-2)=0$

$(x-3y)(x+y-4)=0$

$x=3y \qquad x=-y+4$

(2): $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy}$

$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=\lg\left(y^{2\lg xy}\right)$

$\lg x\cdot\lg\frac{y^5}{x}=\lg(xy)^2\cdot\lg y$

Подставим $x=3y$

$\lg 3y\cdot\lg\frac{y^5}{3y}=\lg 9y^4\cdot\lg y.$

$(\lg 3+\lg y)(4\lg y-\lg 3)=(2\lg 3+4\lg y)\lg y$

Замена: $\lg 3=a \quad \lg y=b$

$(a+b)(4b-a)=(2a+4b)b$

$4ab-a^2+4b^2-ab=2ab+4b^2$

$ab-a^2=0$

$a(b-a)=0$

$\lg 3(\lg y-\lg 3)=0$

$\lg y=\lg 3$

$y=3 \Rightarrow x=9$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Подставим $x = 4-y$. Заметим, что в этом случае $y \in (0;4)$

$\lg(4-y)\cdot(5\lg y - \lg(4-y)) = (2\lg(4-y)+2\lg y)\cdot \lg y$

Замена: $\lg(4-y)=k$, $\lg y = t$

$k(5t-k) = (2k+2t)t$

$5kt-k^2 = 2kt+2t^2$

$2t^2-3kt+k^2=0.$

Решим относительно t

$D = 9k^2-8k^2 = k$

$t_{1,2} = \frac{3k\pm k}{4}$

$t_1 = k$ $\quad$ $t_2 = \frac{k}{2}$

$\lg y = \lg(4-y)$ $\quad$ $\lg y = \frac{\lg(4-y)}{2}.$

$y = 4-y$ $\quad$ $2\lg y = \lg(4-y)$

$2y = 4$ $\quad$ $\lg y^2 = \lg(4-y)$

$y = 2 \Rightarrow x = 2$ $\quad$ $y^2 = 4-y$

$y^2+y-4=0$

$D = 1+16=17$

$y_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ $\quad$ $y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ $\varnothing$ – т.к. $y<0$

$x = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$ $\quad$ $\cancel{x = \frac{9+\sqrt{17}}{2}}$

Ответ: $(2;2)$, $(9;3)$, $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 7x \cdot 2$

$-2\sin 7x \cdot \sin 4x - 2\sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$2\sin 7x \cdot \sin 4x + 2\sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2}(\sin^2 7x - \cos^2 7x)$

$2\sin 4x(\sin 7x \cancel{+\cos 7x}) = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)(\sin 7x \cancel{+\cos 7x})$

1. $\sin 7x + \cos 7x = 0$ $\quad \cos 7x \cos 4x - \cancel{\sin 7x}\sin 4x +$

$1 + \sin 14x = 0$

$14x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$

2. $\sin 4x = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)$

$\frac{\sin 4x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 7x$

$\frac{\sin 4x}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin 7x - \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x$

$\frac{\sin 4x}{2} = \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{\sin 4x}{2} = \sin 2x \cdot \cos 2x$

$\sin 11x \cdot \cos 7x - \sin 7x \cdot \cos 11x = \sqrt{2} \cdot \sin 7x - \sqrt{2}\cos 7x$

$\sin 11x \cdot \cos 7x - \sin 7x(\cos 11x + \sqrt{2}) = -\sqrt{2} \cdot \cos 7x$

$\cos 7x(\sqrt{2} + \sin 11x) = \sin 7x(\cos 11x + \sqrt{2})$

$\frac{\sin 7x(\cos 11x + \sqrt{2})}{\cos 7x(\sin 11x + \sqrt{2})} = 1.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x = y + 4.$

$\lg(y+4)\,(5\lg y - \lg(y+4)) = 2\lg y\,(\lg(y+4) + \lg y)$

$\lg(y+4)\cdot \lg\frac{y^5}{y+4} =$

$$\left(\frac{y^5}{y+4}\right)^{\lg y+4} = y^{2\lg y^2+4y}$$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$x^2 - 2x(y+2) + (y+2)^2 - (y+2)^2 - 3y^2 + 12y = 0$

$(x - y - 2)^2 - y^2 - 4y - 4 - 3y^2 + 12y = 0$

$(x-y-2)^2 - 4y^2 + 8y - 4 = 0$

$(x-y-2)^2 - 4(y^2 - 2y + 1) = 0$

$(x-y-2)^2 - (2y-2)^2 = 0$

$(x - y - \cancel{2} - 2y + \cancel{2})(x - y - 2 + 2y - 2) = 0$

$x = 3y \qquad x = y + 4.$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$$

$y^{4\lg 3y} = 3$

$\lg x \cdot \lg\frac{y^5}{x} = \lg(xy)^2 \cdot \lg y$

$\lg 3y \cdot \lg\frac{y^4}{3} = \lg 9y^4 \cdot \lg y$

$\lg 3 = a \qquad \lg y = b$

$(a+b)(4b-a) = (2a+4b)b$

$4ab - a^2 + 4b^2 - ab = 2ab + 4b^2$

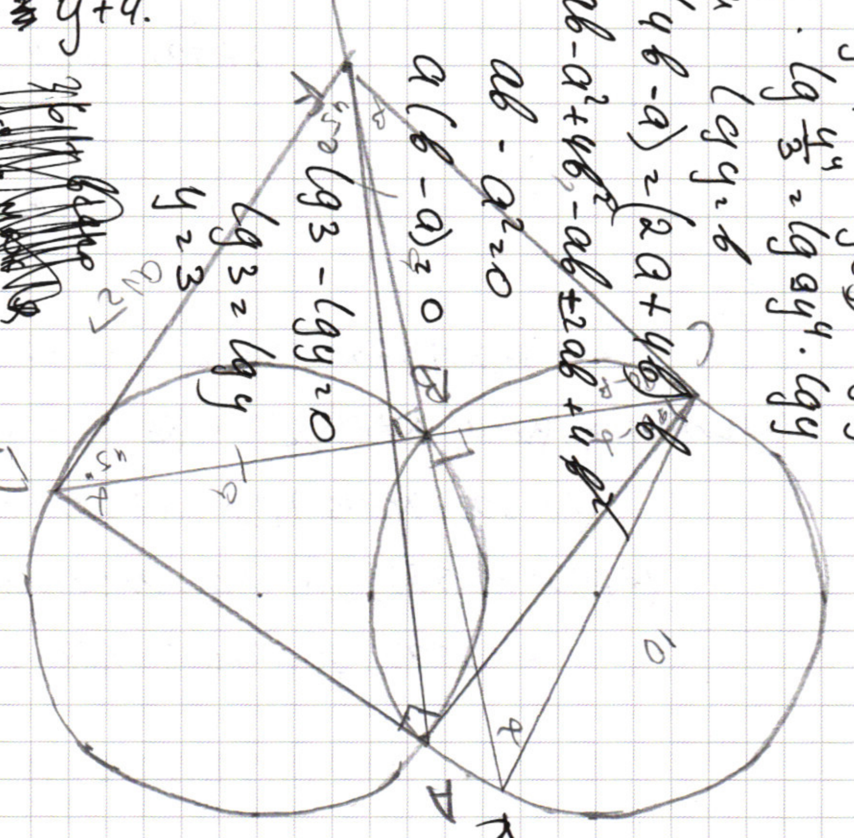
$ab - a^2 = 0$

$a(b-a) = 0$

$\lg 3 - \lg y = 0$

$\lg 3 = \lg y$

$y = 3$



$90 - \alpha + \alpha + 45 + 90 - \beta =$
$= 225 - \beta$
$135 + \beta$

$10AC = BC^2 + aBC$

$\frac{AC}{BC} = \frac{BC+Ba}{10}$

$\frac{AD}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{10}$

$\triangle DAC \sim \triangle ABC$

$180 - 90 - 90 + \alpha$

№6.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(4x+3x) = \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos 4x$

$\cos(4x+3x) = \cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x$

$\cos 3x(\sin 4x - \cos 4x) + \sin 3x(\cos 4x + \sin 4x) = \ldots$

$\sin 4x = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)$

$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$

$70 + (2^{64}-1)x - 2^x + 3\cdot 2^{65} \geq 1.$

$69 + 2^{64}\cdot x + 3\cdot 2^{65} \geq x + 2^x$

$69 + 2^{64}(x+6) \geq x + 2^x$

$(x - y + 2 - 2y + 2)(x - y + 2 + 2y - 2) = 0$

$(x - 3y + 4)(x + y) = 0$

$x = 3y - 4 \ (2) \qquad x = -y \ (1)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5.

$|y-(3+x)|+|y-(\cancel{3}3-x)|=6.$

1. $y\geqslant 3+x,\ y\geqslant 3-x$

$y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6$

$2y=12$

$y=6$

2. $y\geqslant 3+x,\ y\leqslant 3-x$

$\cancel{y}-\cancel{3}-x-\cancel{y}+\cancel{3}-x=6$

$-2x=6$

$x=-3$

3. $y\leqslant 3+x,\ y\geqslant 3-x$

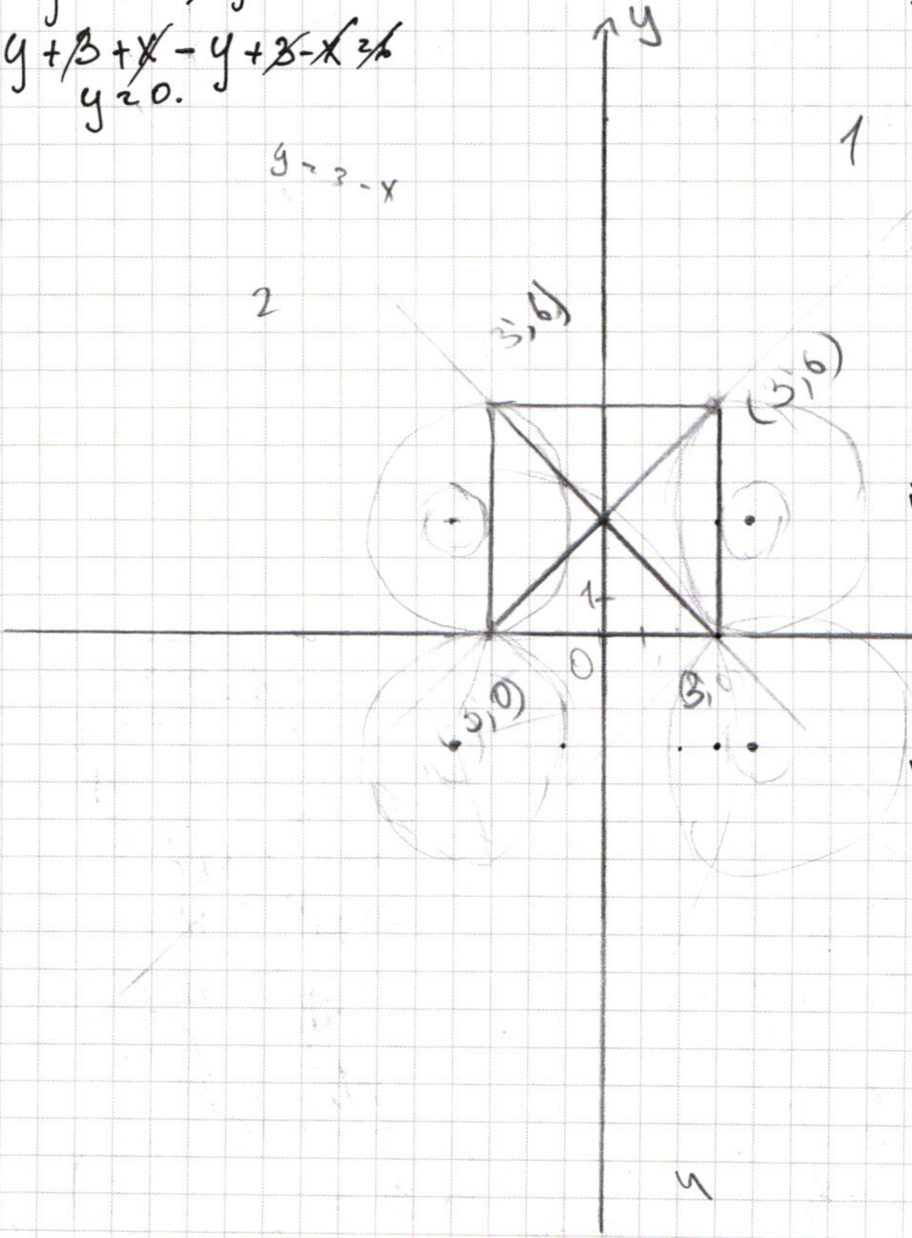
$-\cancel{y}+\cancel{3}+x+\cancel{y}-\cancel{3}+x=6$

$x=3.$

4. $y\leqslant 3+x,\ y\leqslant 3-x$

$-y+\cancel{3}+\cancel{x}-y+\cancel{3}-\cancel{x}\ \cancel{=6}$

$y=0.$



$y=x+3$

$y=0,\ x=3$

$y=x+3$

$y=0,\ x=-3$

$y=3,\ x=0$

$y=3-x$

$y=0,\ x=3$

$y=3,\ x=0$

$\sqrt{a}\in(0;1)-0$

$\sqrt{a}=1-2$

$\sqrt{a}\in(1;\sqrt{3})-4.$

$\sqrt{a}=\sqrt{3}-4.$

$\sqrt{a}>\sqrt{3}:8$

$\sqrt{a}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}:8$

$\sqrt{a}>\sqrt{58}-4.$

$\sqrt{a}=\sqrt{82}-4.$

$\sqrt{a}>\sqrt{82}-4$

$\sqrt{a}=\sqrt{81+49}=\sqrt{130}$ - 2реш.

$\sqrt{a}>\sqrt{130}:0.$

$\sqrt{a}=1\quad \sqrt{a}=\sqrt{130}$

$a=1\quad a=130$

$\begin{cases} y>2^x+3\cdot 2^{65} \\ y\leqslant 70+(2^{64}-1)x \end{cases}$

$2^x+3\cdot 2^{65}<70+(2^{64}-1)x$

$\log_{10}x\cdot(\log_{10}y^5-\log_{10}x)=\log_{10}(x^2y^2)\cdot\log_{10}y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 4x = \sqrt{2}(\sin 4x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos 4x - \cos 4x \cdot \cos 3x + \sin 4x \cdot \sin 3x)$

$\sin^2 4x = 2(1 - \sin(4x))$

$\log a \cdot b = \log a + \log b$

$\log a/b = \log a - \log b$

$x^2 - 2x(y+2) - (y+2)^2 - 3y^2 + 12y = 0$ $+(y+2)^2$

$(x-y-2)^2 - y^2 - 4y + 4 - 3y^2 + 12y = 0$

$(x-y-2)^2 - 4y^2 + 8y + 4 = 0$

$(x-y-2)^2 - (4y^2 - 4y + 4) = 0$

$(x-y-2)^2 - (2y-2)^2 = 0$

$(x - y - 2 - 2y + 2)(x - y - 2 + 2y - 2) = 0$

$x = 3y\ (1)$ $\qquad$ $x = y + 4.\ (2)$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$

$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg y^{\lg(xy)^2}$

$\lg x \cdot (\lg y^5 - \lg x) = (\lg x^2 + \lg y^2) \cdot \lg y$

$\lg x(5\lg y - \lg x) = (2\lg x + 2\lg y) \cdot \lg y$

$\lg x = a,\ \lg y = b$

$a(5b - a) = (2a + 2b)b$

$5ab - a^2 = 2ab + 2b^2$

$2b^2 - 3ab + a^2 = 0.$

$2\lg^2 y - 3\lg y \cdot \lg x + \lg^2 x = 0$

$2 \cdot \log_{10}\sqrt{10} \cdot \log_{10}\sqrt{10} - 3 \cdot \log_{10}\sqrt{10} \cdot \log_{10} 3\sqrt{10}$

(1): $\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3} \cdot y^{2\lg y^2}$

$\frac{y^{4\lg 3} \cdot \cancel{y^{4\lg y}}}{3} = y^{2\lg 3} \cdot \cancel{y^{4\lg y}}$

$y^{4\lg y} \neq 0.$

$\frac{y^{4\lg 3}}{y^{2\lg 3}} = 3$ $\qquad$ $\lg t = \log_{10} t$

$y^{2\lg 3} = 3.$

$\log_y 3 = 2\lg 3$

$y^{\lg 9} = 3$

$\lg y^{\lg 9} = \lg 3$

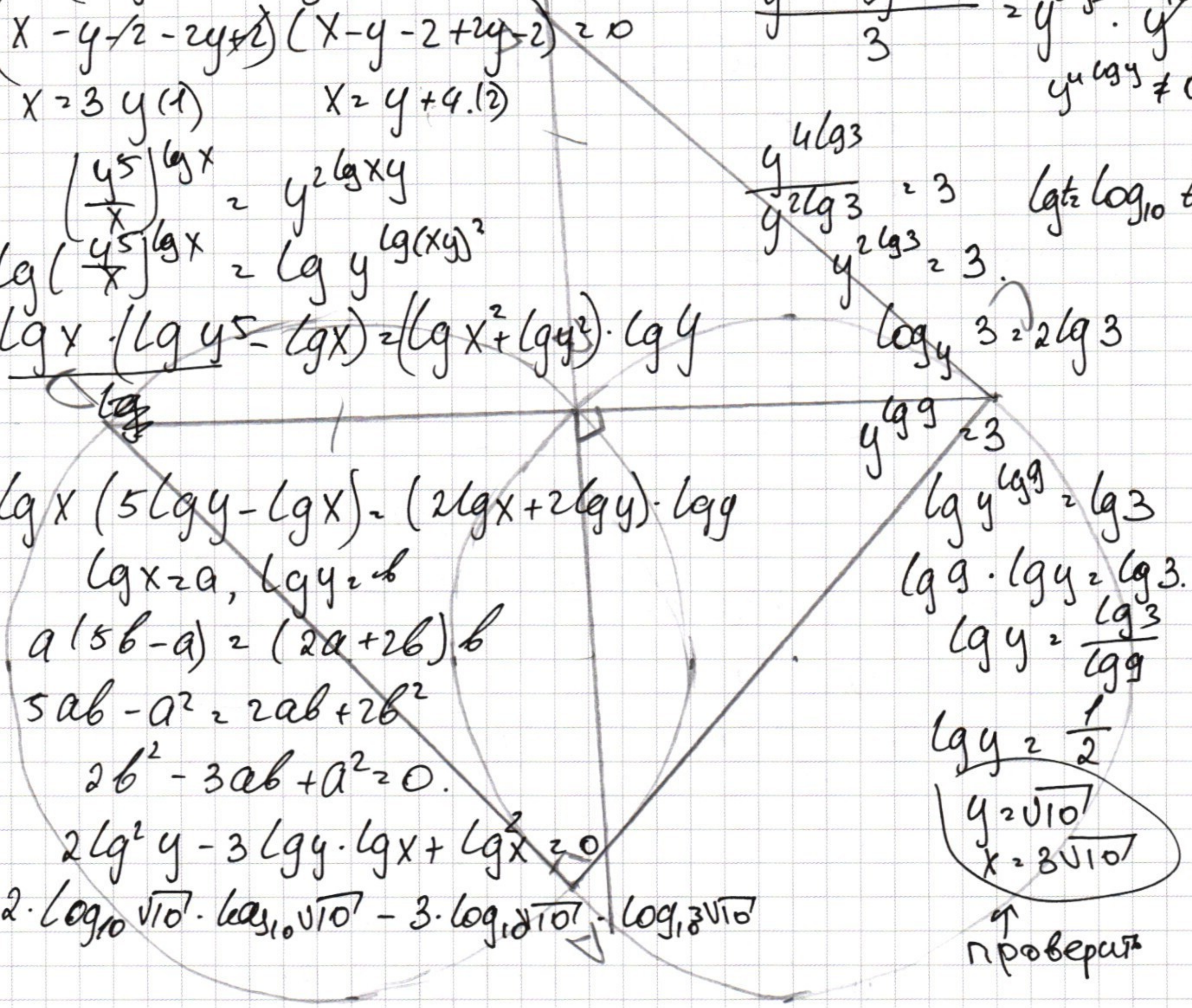
$\lg 9 \cdot \lg y = \lg 3.$

$\lg y = \frac{\lg 3}{\lg 9}$

$\lg y = \frac{1}{2}$

$y = \sqrt{10}$
$x = 3\sqrt{10}$

проверить



$2^x+3\cdot 2^{65} < y \le 70+(2^{64}-1)x$

$2^x < y-3\cdot 2^{65}$

$\log_2 2^x < \log_2(y-3\cdot 2^{65})$

$x < \log_2(y-3\cdot 2^{65})$

$y \le 70+2^{64}\cdot x - x$

$y-3\cdot 2^{65} \le 70+2^{64}\cdot x - x - 3\cdot 2^{65}$

$y-3\cdot 2^{65} \le 70+2^{64}(x-6)-x$

$2^x < 70+2^{64}(x-6)-x$

$x=0$

$x=1$

$2^x+3\cdot 2^{65} < 70+2^{64}\cdot x - x$

$2^x+x-2^{64}\cdot x < 70-3\cdot 2^{65}$

$2^x+x+3\cdot 2^{65} < 70+2^{64}\cdot x$

$2(1+3\cdot 2^{64}) < y \le 69+2^{64}$

$2+3\cdot 2^{65} > 69+2^{64}$

$2^{64}\cdot 5 > 67$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$

~~$x=y=3x$~~

$x=3y$

$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg\left(y^{2\lg xy}\right)$

$\lg x\cdot(\lg y^5-\lg x) = \lg xy\cdot \lg y^2$

$\lg x(5\lg y-\lg x) = 2\lg y(\lg x+\lg y)$.

$(\lg 3+\lg y)(5\lg y-\lg 3-\lg y) = 2\lg y(\lg 3+2\lg y)$

$\lg 3 = a,\ \lg y = b$

$(a+b)(4b-a) = 2b(a+2b)$

$4ab-a^2+4b^2-ab = 2ab+4b^2$

$a^2-ab=0$

$a(a-b)=0$

$\lg 3(\lg 3-\lg y)=0$

$\lg 3 = \lg y$

$y=3$

$x=9$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$ $\quad 2^{65} < \frac{y-2^x}{3} \quad 2^{64} < \frac{y-2^x}{6}$

пусть $x > 0$

$2^{64} - 1 < \frac{y-6-2^x}{6}$

$(2^{64}-1)x < \frac{y-6-2^x}{6} \cdot x$

$(2^{64}-1)x + 70 < \frac{x(y-6-2^x)+420}{6}$

$y <$

$\log_2 2^x = x$

$2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1)x$

$t + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1)\log_2 t$

$\frac{t+3\cdot 2^{65}-70}{2^{64}-1} < \log_2 t$

$(2^{32}-1)(2^{32}+1)$

$(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$(2^{8}-1)(2^{8}+1)$

$(2^{4}-1)(2^{4}+1)$

$(2^{2}-1)(2^{2}+1)$

$(2-1)(2+1)$

$\frac{t+3\cdot 2^{65}-70}{3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)} < \log_2 t$

5 17 256 65537 65537·2+1

$\begin{array}{r} 256 \\ \times 256 \\ \hline 1536 \\ 1280 \\ 512 \\ \hline 65536 \end{array}$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \end{array}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sin 4x = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)$

$\sin^2 4x = 2(1 - \sin 14x)$

$\frac{1-\cos 8x}{2} = 2(1 - \sin 14x)$

$1 - \cos 8x = 4 - 2\sin 14x$

$2\sin 14x - \cos 8x - 3 = 0.$

$0 \le 1 - \sin 14x \le \frac{1}{2}$

$-1 \le -\sin 14x \le -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \le \sin 14x \le 1$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le 14x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\frac{\pi}{84} + \frac{\pi n}{7} \le x \le \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le 14x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\frac{5\pi}{84} + \frac{\pi n}{7} \le x \le \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$

$0 \le \sin^2 4x \le 1$

$-1 \le \sin 4x \le 1$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le 4x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

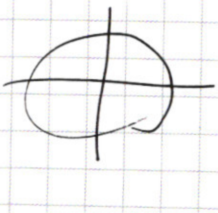
$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \le x \le \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

$2\sin 4x = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)$

$\cancel{\sqrt{2}\cdot\sin 4x = \sin 7x - \cos 7x.}$

$\cancel{2\sin^2 8x =}$

$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 7x$



$\sin 4x = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin 7x - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 7x$

$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2\pi n + 4x = 7x - \frac{\pi}{4}$

$3x = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{8\pi n + \pi}{12}$

$4x + \cancel{2\pi n} = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$11x = \frac{5\pi + 8\pi n}{4}$

$x = \frac{5\pi + 8\pi n}{44}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\overline{abcdefge}$

$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot e = 3375$

3375 | 5
675 | 5
135 | 5
27 | 3
9 | 3
3 | 3
1 | 1
1

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

5, 5', 3.

число состоит из

1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5 только.

$3! = 6.$

5 5' 3
5 3 5'
5' 3 5
5' 5 3
3 5 5'
3 5' 5

$\frac{6}{2} = 3.$

$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$? потом. $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 560$ ← ответ.

25 × 27 = 175 + 50 = 675

675 × 5 = 3375.

№2.

$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cancel{-\sin 7x \cdot \sin 4x - \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x}$ $\quad \cos(11x+3x)$

$\cancel{-\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos 11x \cdot \cos 3x - \sqrt{2}\sin 11x \cdot \sin 3x$

$\sin 7x \cdot \sin 4x + \sin 4x \cdot \cos 7x = 2\sqrt{2}\cos^2 7x + \sqrt{2}$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$

$\cancel{\sin 7}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\sin^2 7x - \cos^2 7x)$ $\quad \cancel{5, 5', 5''}, 3 \quad 5\,5'\,3\,3'$

$\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)(\sin 7x + \cos 7x)$

5 5' 3 3'
5 5' 3' 3
5' 5 3' 3
5' 5 3 3'

1. $\sin 7x + \cos 7x = 0$

$1 + 2\sin 7x\cos x = 0$

$\sin 14x = -1$

$14x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$

2. $\sin 4x = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)$

$\sin^2 4x = 2(1 - \sin 14x)$

№3.

ОДЗ: $x>0, y>0$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \quad (1) \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \quad (2) \end{cases}$$

$a^{\log_a b}$ $a^{\log_b a}$

$\log_b a = x$

$b^x = a$

$(b^x)^x = b^{x \cdot x} =$

$= b^{(\log_b a)^2} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b a} =$

$= a^{\log_b a}$

$(1): \frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$

$(y^{\lg x})^5 = (y^{\lg x})^2 \cdot (y^{\lg y})^2 \cdot x^{\lg x}$

$(y^{\lg x})^3 = (y^{\lg y})^2 \cdot x^{\lg x}$

$(2): x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0$

$x^2 - x(2y+4) - 3y^2+12y=0$

$D = 4y^2+32y+16+12y^2-48y =$

$= 16y^2-16y+16 = 16(y^2-y+1)$

$x_{1,2} = \frac{2y+4 \pm 4\sqrt{y^2-y+1}}{2}$

$x_{1,2} = y+2 \pm 2\sqrt{y^2-y+1}$

$3y^2 - \underbrace{12y+2xy}_{y(2x-12)} - x^2+4x=0$

$D = 4x^2-48x+144+\cancel{4x^2-16x}\ 12x^2+\cancel{48x} =$

$= 4x^2-96x+144 = 4(x^2-24x+36)$

$\times\begin{array}{r}24\\24\end{array}$ $\begin{array}{r}96\\48\\576\\-144\\432\end{array}$ $\times\begin{array}{r}36\\4\\144\end{array}$

$432 \mid 2$, $216 \mid 2$, $108 \mid 2$, $54 \mid 2$, 27

$x^2-2xy-4x-\underbrace{3y^2+12y}_{-3y(y-4)}=0$

$(y+2)^2 = y^2+4y+4$

$x^2-\underbrace{2xy-4x}_{-2x(y+2)}-3y^2+6y+6y=0$

$x^2-2x(y+2)+(y+2)^2-y^2-4y-4-3y^2+12y=0$

$(x-y+2)^2-4y^2+8y-4=0$

$(x-y+2)^2-4(y^2-2y+1)=0$

$(x-y+2)^2-4(y-1)^2=0$ $\quad (x-y+2)^2-(2(y-1))^2=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)