

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-2)^2 - 3(y-2)^2 + 8 - 2xy = 0$$

$$(x-2)^2 - 3(y-2)^2 - 2(xy-4) = 0$$

$$\frac{y^{5/2} \cdot x}{x^2 \cdot x} = y^{2/2} \cdot x$$

$$y^{2/2} \cdot x = x \cdot y$$

$$y^{5/2} \cdot x - 2 \cdot x \cdot y = x \cdot y$$

$$y^{5/2} \cdot x - 2 \cdot x \cdot y = x \cdot y$$

$$\lg \frac{x^3}{y^2} \cdot \lg y = \lg x \cdot \lg x$$

$$(3 \lg x - 2 \lg y) \lg y = \lg x^2$$

$$a^2 = -2b^2 + 3ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases} \quad \begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2 \lg y \end{cases}$$

$$x = y$$

$$x = y^2$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0 \quad x = 2$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & -7 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{matrix}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = \sqrt{17}$$

$$x = 9$$

$$\frac{8!}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 10 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 27 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$315$$

$$3!$$

$$\begin{array}{r} 115 \\ 151 \\ 511 \end{array}$$

$$\frac{3!}{2!}$$

$$1155$$

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{2} = 6$$

$$\begin{array}{r} 1551 \\ 1155 \\ 5115 \\ 5511 \\ 5151 \\ 1515 \end{array}$$

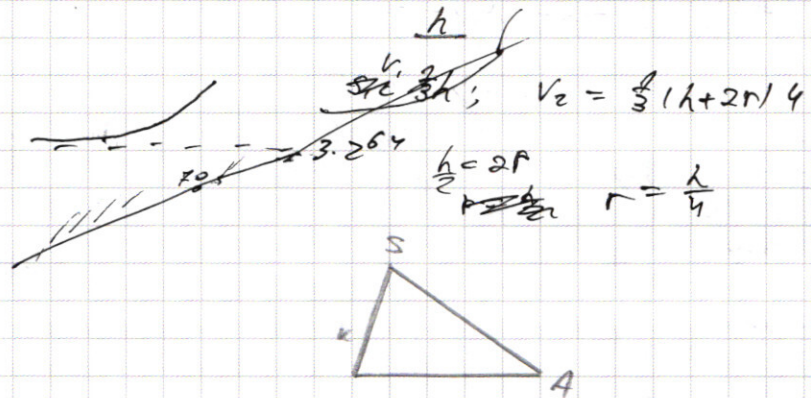
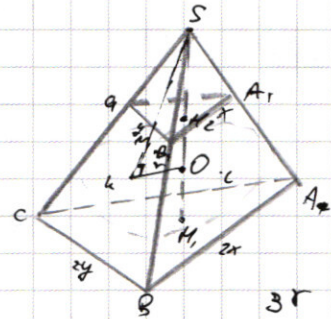
$$16^{2/2} = 4^{2/2}$$

$$4 - 8 - 8 - 12 + 24$$

$$\frac{56}{3} = 16.8$$

$$3^{2/2} = 3^{2/2}$$

$$3 \cdot 3^{2/2}$$



3.2⁶⁴
6

$$y > 0 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 2^{64} - 1 + 70$$

$$y \leq 2^{65} - 2 + 70$$

$$y \leq 3 \cdot 2^{64} - 3 + 70$$

$$ab = ach$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \vee 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x - (2^{64} - 1)x + 3 \cdot 2^{65} - 70 \vee 0$$

$$y' = \ln 2 \cdot 2^x - 2^{64} + 1$$



3⁵

3³ 20

$$3^{\lg 3} = 3^{2 \lg 2}$$

81

$$27 - 54 - 36 - 12 + 36$$

$$\frac{TH_1}{KO} = \frac{SH_1}{SO}$$

$$TH_2 = \frac{KO \cdot SH_2}{SO} = \frac{2r}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \sqrt{2} \sin 3x \sin 11x + \sin 11x - \sin 3x - \cos 11x + \cos 3x = 0$$

$$\sin 11x (1 - \sqrt{2} \sin 3x) - \cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \sin 3x + \cos 3x = 0$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos \cancel{x+y} - \cos \cancel{x-y})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) - \sin(x-y))$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} = \cos x - \cos y$$

$$x = \frac{u+w}{2}; y = \frac{u-w}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\sin u - \sin w) = \sin \frac{u+w}{2} \cos \frac{u-w}{2}$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin 7x \cos \frac{4}{2}x$$

$$\cos 3x - \cos 11x$$

$$\cos 11x - \cos 3x = 2 \sin 7x \sin \frac{3x-11x}{2} = 2 \sin 7x \sin(-4x)$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin 7x \cos 4x = \sqrt{2} \cos 14x \quad \sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$2 \sin 7x (\cos 4x - \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x \quad \Omega(1-2t^2)$$

$$\sqrt{2} t^2 - 2\sqrt{2} t^2 + 2t(1-2t^2) - \sqrt{2} = 0$$

$$2t^2 + \sqrt{2}t(1-2t^2) - 1 = 0$$

$$D = 2(\dots)^2 + 8$$

$$2 \sin(-4x) \cos 7x + 2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin x - \sin y = 21$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) - \cos(x-y))$$

$$x = \frac{u+w}{2}; y = \frac{u-w}{2}$$

$$\sin \frac{u+w}{2} \sin \frac{u-w}{2} = \frac{1}{2} (\cos u - \cos w)$$

$$2 \sin \frac{u+w}{2} \cos \frac{u-w}{2} = \cos u - \cos w = 2 \sin \frac{u+w}{2} \sin \frac{u-w}{2}$$

$$\sin 4x + 2 \sin 7x \sin 4x \quad \sin 3x + \sin(-11x) = 2 \sin(-4x) \cos 7x$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

~ ~ ~ ~ ~

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 30 \overline{) 675} \\ 37 \overline{) 35} \\ 25 \overline{) 25} \\ 0 \end{array}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 25} \\ 30 \overline{) 27} \\ 175 \end{array}$$

$$125 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_8 = 3^2 \cdot 5^3$$

$$a_i \in [1, 2]$$

$$\begin{array}{c} 9 \\ 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ x \end{array}$$

$$8 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 3!}$$

$$\begin{array}{c} 8 \\ 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \\ 3! \cdot 3! \cdot 2! \end{array}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^5 = y^{2 \log x y} \\ x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x + 12y = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 - y)^2 - 4y^2 + 12y - 4x$$

$$(x^2 - 2)^2 - 4 - 3(y^2 - 4y + 4) + 12 - 2xy = 0$$

$$(x-2)^2 - 3(y-2)^2 + 8 - 2xy = 0$$

$$\begin{cases} 1y - 3x + 1y - 3x = 6 \\ (1x - 4)^2 + (1y - 3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$I \ y \geq x + 3$$

$$y = -x + 3$$

$$2y - 3 - x + 3 + x = 6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$-2y + 6 = 6$$

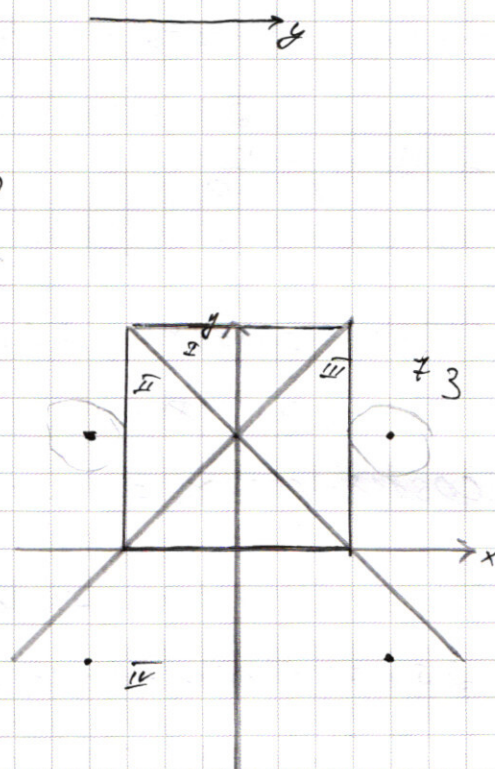
$$y - 3x - y + 3 - x = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

$$2^5 + 3 \cdot 2^{65} \vee 70 + 5 \cdot 2^{64} - 5$$

$$2^{64} (3 \cdot 6 - 5) +$$



$$49 + 9 = 58$$

$$\frac{1}{4} + \frac{20}{3} = -\frac{1}{44} + \frac{26}{11}$$

$$11 + \frac{88n}{3} = -1 + 8e$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✦ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✦ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ✦ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

- ✦ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✦ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Обозначим восьмизначное число за $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$.
Из условия $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 3375$. Так как произведение не равно нулю, то все $a_1, a_2, \dots, a_8$ — натуральные числа от 1 до 9. Число 3375 представимо в виде $3^3 \cdot 5^3$. Значит $a_1, a_2, \dots, a_8$ либо равны 1, либо 3, либо 5, либо $9 = 3^2$, причем 9 может встречаться в числе не более одного раза. Другие цифры не подходят, так как $3375 \div 2$, $3375 \div 4$, $3375 \div 6$, $3375 \div 7$, $3375 \div 8$. Получается в данном числе обязательно должно быть три «пятёрки», три «тройки» или одна «девятка» и одна «девятка», а остальные цифры — «единицы».

- Рассмотрим случай, когда 9 — одна из цифр числа. Цифры числа: 1, 1, 1, 9, 3, 5, 5, 5. Их можно переставить $\frac{8!}{3! \cdot 3!}$ способами, каждый из которых даёт новое число.
- Рассмотрим случай, когда 9 — не одна из цифр числа. Цифры числа: 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5. Их можно переставить $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$ способами, каждый из которых даёт новое число.

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 560 + 560 \cdot 2 = 1680; \text{ Ответ: } 1680 \text{ чисел}$$

$\sqrt{2}$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\begin{cases} \cos 11x - \cos 3x = 2 \sin 7x \sin 4x \\ \sin(-11x) + \sin 3x = 2 \sin(-4x) \cos 7x \end{cases}$$

$$2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) + \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x - \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x - \cos 7x) (\sqrt{2} \sin 4x + \cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 7x - \cos 7x = 0 \\ \sqrt{2} \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x - 1 = 0, \text{ где } \alpha: \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 7x = \cos 7x \quad (1) \\ \sin 4x = -\cos(7x - \frac{\pi}{4}) \quad (2) \end{cases}$$

$$\sin 4x = -\cos(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$(1) \sin 7x = \cos 7x \Rightarrow \cos 7x = 0 - \text{не соответствует решению}$$

$$\tan 7x = 1; 7x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \sin 4x = -\cos(7x - \frac{\pi}{4}); \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \sin(4x); \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 4x)$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 4x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 7x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 4x + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \\ 3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = -\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}; 1 + 4k = 7 + \frac{56l}{3}; 3 + 12k + 4 = 21 + 56l$$

$$12k = \frac{56l}{3} + 18; 3k = \frac{14l}{3} + 4,5$$

$$\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi l}{3} = -\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi l}{3} = -\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}$$

$$1 + \frac{56l}{3} = -\frac{28}{11} + \frac{56l}{11}$$

$$44 + \frac{56 \cdot 44}{3} l = -28 + 4 \cdot 56l$$

$$56 \cdot 44l = 12 \cdot 56l - 72 \cdot 3$$

$$44l = 12l - \frac{216}{56}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ &\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}, l \in \mathbb{Z} \\ &-\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\begin{cases} \cos 11x - \cos 3x = 2 \sin 7x \sin(-4x) \\ \sin(-11x) + \sin 3x = 2 \sin(-4x) \cos 7x \end{cases}$$

$$\sin(-11x) + \sin 3x = 2 \sin(-4x) \cos 7x$$

$$2 \sin(-4x) (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & (1) \\ \cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0 \end{cases}$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

(1) $\sin 7x + \cos 7x = 0$, $\cos 7x = 0$ - не кор. решение

$$\tan 7x = -1; 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

(2) $\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$

$$\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \sin 4x, \text{ где } \begin{cases} \cos d = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin d = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(-4x)$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 4x)$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 4x + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} - 4x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l$$

$$11x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$$

Ответ:

$$-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} &= y^{2 \lg xy} \quad (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \quad (2) \end{aligned} \right.$$

Необходимо, чтобы $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, т.к. $\lg x$ - сущ. сл. и $\lg xy$ - сущ. сл.

$$(1) \frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg xy} = x^{\lg x}, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

Так как обе части неотриц., $y = \sqrt[5]{x}$ возр. на $\lg y$, $y^{5 \lg x - 2 \lg xy} > 0$, $x^{\lg x} > 0$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg xy} = x^{\lg x} \Leftrightarrow \lg y^{5 \lg x - 2 \lg xy} = \lg(x^{\lg x})$$

$$(5 \lg x - 2 \lg xy) \lg y = \lg x \cdot \lg x$$

$$(5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y) \lg y = \lg^2 x$$

Пусть $a = \lg x$, $b = \lg y$

$$(3a - 2b)b = a^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(a - b)(a - 2b) = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2 \lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases}$$

I случай $(x = y)$:

$$(2) \quad x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$\begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \end{matrix} \Rightarrow y = 2$$

II случай ($x = y^2$):

$$(2) \quad x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{y}{y_0} (y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -7 & 12 \\ \hline 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$y_1 = 3 - \text{решение, так как } y \geq 0 \Rightarrow x_1 = 9$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 - \text{не } y \geq 0$$

$$y_3 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} > 0 - y \geq 0 \Rightarrow x = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $(2; 2)$; $(\frac{9}{2}; \frac{3}{2})$; $(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{4}$

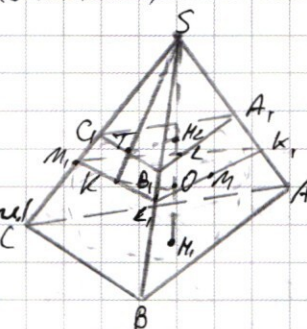
1. Пусть сечения с площадью 4 и 1 будут $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно, причём $\triangle ABC$ касается в т. H_1 , а $\triangle A_1B_1C_1$ в H_2

2. Рассмотрим тетраэдр $SABC$:

SH - высота тетраэдра (по опр.), т.к. $(SH) \perp (ABC)$

3. Известно, что $S_{\triangle ABC} = 4$, $S_{\triangle A_1B_1C_1} = 1$

$$\left. \begin{array}{l} (ABS) \cap (ABC) = (AB) \\ (ABS) \cap (A_1B_1C_1) = (A_1B_1) \\ (ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \text{ (по усл.)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (AB) \parallel (A_1B_1) \\ \text{(по св-ву параллельных)} \end{array}$$



Аналогично $(BC) \parallel (B_1C_1)$, $(AC) \parallel (A_1C_1)$

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (по т. об углах между параллельными сторонами)

Аналогично $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по 2 углам)

4. $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$ (по св-ву подоб. фигур.)

Рассмотрим $\triangle AM_1S$ и $\triangle A_1M_2S$: $\angle AM_1S = \angle A_1M_2S = 90^\circ$

(по опр. пер-ти прям. и тл.), $\angle ASM_1$ - общий $\Rightarrow \triangle AM_1S \sim \triangle A_1M_2S$ (по 2 углам)
 $\frac{SM_2}{SM_1} = \frac{SA_1}{SA}$ (по св-ву подоб. Δ)

5. Рассмотрим $\triangle ABS$ и $\triangle A_1B_1S$: $\angle ABS = \angle A_1B_1S$ - общий,

$\angle BAS = \angle B_1A_1S$ (как соотв. углы при пер. пар. AB и A_1B_1 сеч. AS) $\Rightarrow \triangle ABS \sim \triangle A_1B_1S$ (по 2 углам)

$$\Rightarrow \frac{SM_2}{SM_1} = \frac{1}{2} \text{ (из п. 4)} \Rightarrow 2SM_2 = SM_1 = SM_2 + M_2H_1 \Rightarrow SM_2 = M_2H_1$$

6. Заметим, что H_1, H_2 - диаметр сферы, получается

$$OH_2 = OH_1 = r; SH_2 = r$$

7. Рассмотрим $\triangle SKO$:

$\angle SKO = 90^\circ$ (по опр. пер-ных площ. и мл.)

$OK = r$ (как радиус), $OS = OH_1 + H_1H_2 = 3r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$

8. Аналогично для $\triangle SLO$: $\sin \angle LSO = \frac{1}{3}$

для $\triangle SMO$: $\sin \angle MSO = \frac{1}{3}$

9. Рассмотрим $\triangle SKO$, $\triangle SLO$, $\triangle SMO$:

SO - общая, $OK = OL = OM$ (как радиусы) $\Rightarrow \triangle SKO = \triangle SLO = \triangle SMO$
(по катету и гипотенузе)

9. Построим $[KN] \perp [SO]$, $N \in [SO]$,

$[LN] \perp [SO]$, $N \in [SO]$

$[MN] \perp [SO]$, $N \in [SO]$

$\triangle KNO = \triangle LNO = \triangle MNO$ ($\angle ONK = \angle ONL = \angle ONM$ (соотв. зл. в рав. $\triangle$), $OK = OL = OM$ (как радиусы) в рав. $\triangle$, по катету и гипотенузе)

$ON_1 = ON_2 = ON_3$ (как соотв. зл. в рав. $\triangle$)

$N_1 = N_2 = N_3 = N \Rightarrow \triangle KMN$ - сечение уга мл. (KMN) , причем $(KMN) \parallel (ABC)$

10. $KS = \sqrt{9r^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$ (по т. Пифагора).

$$KN = \frac{2\sqrt{2}r \cdot r}{3r} = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$$

Аналогично $LN = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$, $MN = \frac{2\sqrt{2}}{3}r \Rightarrow N$ - ц. вкр. окр. $\triangle KMN$

11. Рассмотрим $\triangle KSO$ и $\triangle SH_2T$:

Пусть $[SK] \cap [AH_2] = M$

$\angle SH_2T = \angle SKO = 90^\circ$ (по опр. пер-ных площ. и мл.)

$\angle KSO$ - общий

$\Rightarrow \triangle KSO \sim \triangle SH_2T$
(по 2 углам)

12. Из подобия $\frac{TH_2}{KO} = \frac{SH_2}{SK}$; $TH_2 = \frac{KO \cdot SH_2}{SO} = \frac{r \cdot 2r}{3r} = \frac{2}{3}r$

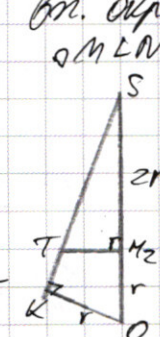
13. $\triangle KMN \sim \triangle ABC$ (по 2-умам), т. к. $\angle KMN = \angle ACB$ (по т. об углах), $\angle MKN = \angle ABC$ (по т. об углах)

$$\frac{S_{\triangle KMN}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$$

$$k = \frac{r_{\text{вн. } \triangle KMN}}{r_{\text{вн. } \triangle ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle KMN}}{S_{\triangle ABC}} = 1 \cdot \left(\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}r}{\frac{2}{3}r} \right)^2 = 1 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{3}$; 2



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{5}$

a: $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$ имеет ровно два решения

I случай $(y \geq x+3 \text{ и } y \geq -x+3)$

$$y-3-x+y-3+x=6; \quad 2y-6=6; \quad y=6$$

II случай $(y \geq x+3 \text{ и } y \leq -x+3)$

$$y-3-x-y+3-x=6; \quad -2x=6; \quad x=-3$$

III случай $(y \leq x+3 \text{ и } y \geq -x+3)$

$$-y+3+x+y-3+x=6; \quad 2x=6; \quad x=3$$

IV случай $(y \leq x+3 \text{ и } y \leq -x+3)$

$$-y+3+x-y+3-x=6; \quad -2y+6=6; \quad y=0$$

(2) $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$

При $a < 0$: Нет решений

При $a = 0$: 4 точки $(4; 3); (-4; 3); (4; -3); (-4; -3)$

При $a > 0$: 4 ок-ти с ц. $O_1(4; 3), O_2(-4; 3), O_3(4; -3), O_4(-4; -3)$

$$\text{и } r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{a}$$

~~Система имеет ровно 2 решения~~

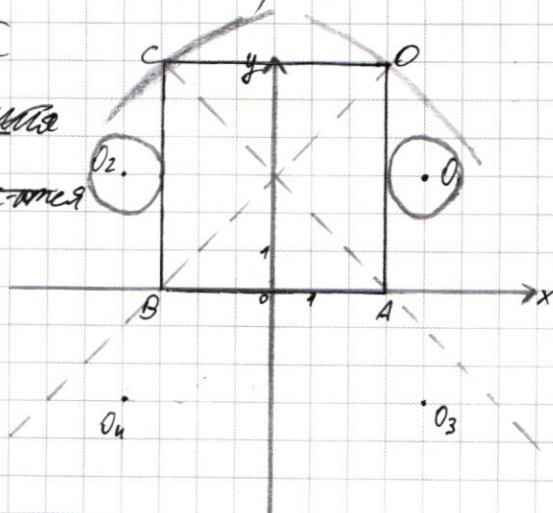
~~если ок-ти с ц. O_1 и O_2 касаются~~

~~квадрата~~

Ур-ие (1) задаёт квадрат

с вершинами $A(3; 0), B(-3; 0), C(3; 6), D(-3; 6)$

и стороной $AB=6$



При $a < 1$ - нет решений

При $a = 1$ - система имеет ровно 2 решения,
так как окружности с O_1 и O_2 касаются
сторон квадрата, а окр-ты с O_3 и O_4 не им. общ. т. с кв.
~~Решение~~ $\rho(O_1; [AD]) = \rho(O_2; [BC]) = 1$, $r_3 < O_3A$, $r_4 < O_4B$

При $1 < a \leq \sqrt{58}$ - система имеет более 2 решений,
так как окр-ты с O_1 и O_2 пер. квадрат в

2 точки (~~$\sqrt{58}$~~ ~~Решение~~ $O_1C = O_1B = O_2A = O_2D = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$)
При $a > \sqrt{58}$ окр-ты с O_1 и O_2 не им. общ. т. с квадратом ABCD
Окр-ты с O_3 и O_4 касаются имеют по одной
общей точке с квадратом либо при $r_3 = r_4 =$
 $= O_3A = O_4B = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, либо при $r_3 = r_4 = O_3C = O_4D =$
 $= \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130}$

При $a = \sqrt{10}$ - не подходит из следующего выше

При $a = \sqrt{130}$ - ровно 2 решения, так как окр-ты
с O_1 и O_2 не имеют общих точек с кв. ABCD,
а с O_3 и O_4 ровно 2.

Ответ: 1; ~~$\sqrt{130}$~~ 130

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x, y): \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} & (1) \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x & (2) \end{cases}$$

Решим (1): При $x \leq 0$: $2^x + 3 \cdot 2^{65} \geq 3 \cdot 2^{65} + 1$

При $x = 6$: $2^x + 3 \cdot 2^{65} = 3 \cdot 2^{65} + 64$

При $x > 6$: $2^x + 3 \cdot 2^{65} > 3 \cdot 2^{65} + 64$

Решим (2): При $x \leq 0$: $70 + (2^{64} - 1)x \leq 70$

При $x = 6$: $70 + (2^{64} - 1)x = 3 \cdot 2^{65} + 64$

При $x > 6$: $70 + (2^{64} - 1)x > 3 \cdot 2^{65} + 64$

$\sqrt{6}$

1. Пусть $\angle BO_1C = 2\alpha$, $\angle BO_2D = 2\beta$

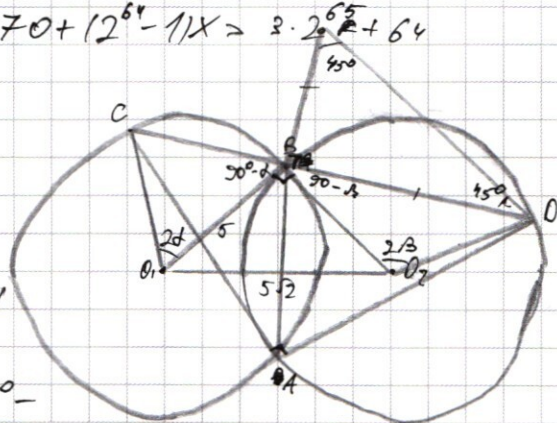
Тогда $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, но
 $\angle BAC + \angle BAD = \angle CAD = 90^\circ = 2\alpha + 2\beta$ (по угл.)

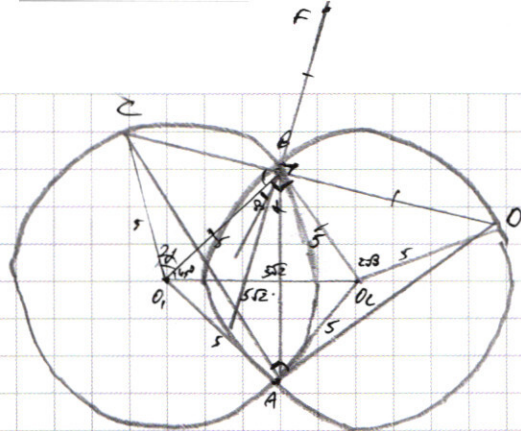
2. $\angle O_1BO_2 = 180^\circ - \angle O_1BC - \angle O_2BD = 180^\circ -$

$-(90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta = 90^\circ$ (из п. 1)

3. Рассмотрим $\triangle BO_1O_2$: $BO_1 = O_2B = 5$, $\angle O_1BO_2 = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow O_1O_2 = 5\sqrt{2}$ (по св-ву пгч. тр.)

4. $AO_1 = O_1B = BO_2 = O_2A$, как радиусы $\Rightarrow AO_1BO_2$ - ромб (по определению) $\Rightarrow$
 $\angle O_1BO_2 = 90^\circ \Rightarrow O_1BO_2A$ - квадрат (по определению) $\Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$ (по св-ву кв.)





$$r_1 = r_2 = 5$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$180^\circ - 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

$$\frac{8!}{3!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\frac{\cos x}{\sin}$$

$$560 \quad 1620$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y)$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y$$

$$x = \frac{u+w}{2}; y = \frac{u-w}{2}; x-y = w;$$

$$\cos w - \cos u = 2 \sin \frac{u+w}{2} \sin \frac{u-w}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = 2 \sin 7x \sin \frac{3x-11x}{2} = -2 \sin 7x \sin 4x$$

sin