МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Решите уравнение. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$;

$\Leftrightarrow \quad -2\sin 2x \sin 7x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0$

Откуда следует, что $\left[\begin{array}{ll} \cos 2x = \sin 2x & (1) \text{ уравн.} \\ 2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = 0 & (2) \text{ уравн.} \end{array}\right.$

Из (1) $\Rightarrow tg\, 2x = 1$, так как если $\cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$, получаем противоречие на $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$; $\Rightarrow$ (так как $\sin 2x = \cos 2x$)

$2\sin^2 2x = 1$

$\sin^2 2x = \frac{1}{2}$

а $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \cos 4x = 1 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow$

$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, где $k \in \mathbb{Z}$

Из (2) $\Rightarrow \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\sin 7x - (\sin 2x + \cos 2x)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\sin 7x = \sin 2x + \cos 2x$

$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x$,

но $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, так как $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\Rightarrow \sin 7x$ или можем писать так:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \sin 2x \cos\frac{\pi}{4} + \cos 2x \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

$\Rightarrow \sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \quad \sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$2\sin\frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$2\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}=0 & (1)' \\ \cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}=0 & (2)'\end{array}\right.$$

Из (1') получаем, что $\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}=\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow 5x-\frac{\pi}{4}=2\pi k$

$x=\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}$, где $k\in\mathbb{Z}$

Из (2') получаем, что $\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$

$$9x+\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi n$$

$$9x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{9}, \text{ где } n\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ В итоге получаем, что

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, \text{ где } k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}, \text{ где } n\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi m}{9}, \text{ где } m\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow$$

Ответ.

$x=\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4};\ \frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5};\ \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi m}{9}\right\}$, где $k, n, m\in\mathbb{Z}$ (целые числа).

(3) Решите систему уравнений $\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (1)\\ y^2-xy-2x^2+8x-4y=0. & (2)\end{cases}$

ОДЗ

$\begin{cases}x>0\\ \frac{y}{x^7}>0\end{cases}$ так как $x>0 \Rightarrow \begin{cases}x^7>0\\ \frac{y}{x^7}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>0\\ y>0.\end{cases}$ Рассмотрим (1) уравнение.

$$(x^2y^4)^{-\ln x}=\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}}, \text{ а } y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}=y^{\ln y-\ln x^7}=\frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}} \Rightarrow$$

$$(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \Leftrightarrow$$

$$1=(x^2y^4)^{\ln x}\cdot\frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}}=x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}\cdot\frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}}=x^{2\ln x}\cdot y^{\ln y}\cdot y^{\ln\frac{1}{x^3}} \Leftrightarrow$$

$$1=x^{2\ln x}\cdot y^{\ln\frac{y}{x^3}}$$

$$x=e^{\ln x} \Rightarrow x^{2\ln x}=\left(e^{\ln x}\right)^{2\ln x}=e^{2\ln^2 x}$$

$$y^{\ln\left(\frac{y}{x^3}\right)}=\left(e^{\ln y}\right)^{\ln\left(\frac{y}{x^3}\right)}=e^{\ln y(\ln y-3\ln x)}=e^{\ln^2 y-3\ln x\ln y}$$

$\Rightarrow$ Следует, что

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^{2\ln x}\cdot y^{\ln\left(\frac{y}{x^3}\right)}=1 \Leftrightarrow e^{2\ln^2 x}\cdot e^{\ln^2 y-3\ln x\ln y}=1 \Leftrightarrow e^{2\ln^2 x+\ln^2 y-3\ln x\ln y}=e^0=1$

$\Leftrightarrow 2\ln^2 x-3\ln x\ln y+\ln^2 y=0$

Рассмотрим 2 случаи, когда $1)' \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right.$ $2)' \begin{cases} x\neq 1 \\ y\neq 1 \end{cases}$

1)' Когда $x=1$

из (2) уравнении следует, что $y^2-y-2+8-4y=0 \Leftrightarrow$ ~~$y^2-5y+2=0$, $D<0$~~ $y^2-5y+6=0$, $D=1$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ ~~не имеет действительных корней $\Rightarrow x\neq 1$;~~

~~Когда $y=1 \Rightarrow 1-x-2x^2+8x-4$~~

Когда $x=1 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow \ln y=0 \Rightarrow y=1$

Но $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ не удовлетворяет (2) уравнение, Так же получается, если $\ln y=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ не удовлетворяют уравнению.

Следует, что $\begin{cases} \ln x\neq 0 \\ \ln y\neq 0 \end{cases} \Rightarrow 2\ln^2 x-3\ln x\ln y+\ln^2 y=0 \;\Big|\; :\ln^2 y$ (так как $\ln^2 y\neq 0$ и можем)

$2\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2-3\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)+1=0$

$\frac{\ln x}{\ln y}=t$ обозначим, получаем, что $2t^2-3t+1=0$, $D=1$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3+1}{4}=1 \\ t=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{\ln x}{\ln y}=1 & (1)' \\ \frac{\ln x}{\ln y}=\frac{1}{2} & (2)' \end{array}\right.$ Из (1)' получаем, что $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$

а $x=y \Rightarrow$ что $y^2-xy-2x^2+8x-4y=0 \Leftrightarrow$

$y^2-y^2-2y^2+8y-4y=0$

$-2y^2+4y=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$

Но из $\underline{\text{ОДЗ}}$ $y>0 \Rightarrow$

$y=0$ не удовлетворяет равенству, а $y=2>0$;

Следует, что $\underline{\underline{(2;2)}}$ удовл. систему.

Из $(2')$ получим, что $2\ln x = \ln y \iff \ln x^2 = \ln y \Rightarrow x^2 = y$

Из (2) уравнение в системе $\Rightarrow$ $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$

$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$

$\Leftarrow$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \end{array}\right.$

$x=0$ не удовлетворяет <u>ОДЗ</u>.

$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$

Когда $x^2 = y \Rightarrow$ из (1) уравнения $(x^2y^4)^{-\ln x} = (y^5)^{-\ln x} = y^{-5\ln x} = y^{-\ln x^5}$

$y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} = y^{\ln\left(\frac{1}{x^5}\right)} = y^{\ln(x^{-5})} = y^{-5\ln x} = y^{-\ln x^5}$

$\Downarrow$

удовлетворяет (1) равенству.

А из (2) $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$

$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \end{array}\right.$ $x = 0 \notin$ <u>ОДЗ</u>

$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$

$\Updownarrow$

$y\sqrt{y} - y - 6\sqrt{y} + 8 = 0$

$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$

~~Так как $x > 0 \Rightarrow x^3 + 8 > x^2 + 6x$~~ Заметим, что

$x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$

$x^2(x-2) + x(x-2) - 4(x-2) = 0$

$(x-2)(x^2 + x - 4) = 0 \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

от $x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} > 0 \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \text{ не удовл. ОДЗ.} \end{array}\right.$

$\Rightarrow y = x^2 = \left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = \dfrac{18 - 2\sqrt{17}}{4} =$

$= \dfrac{9-\sqrt{17}}{2} > 0 \Rightarrow$ значит $\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$ удовлетворяет

систему уравнение

<u>Ответ.</u> $(x;y) = (2;2), \left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{9-\sqrt{17}}{2}\right);$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $9261 = 3^3 \cdot 7^3$; Мы имеем число $\overline{a_1 a_2 \ldots a_8}$. Произведение чисел ровно $3^3 \cdot 7^3$, значит у этих чисел есть ровно 3 число 7.
А остальных 5 чисел произведение получается $3^3 = 27$, если их будет (1, 1, 9, 3, 1) или (1, 1, 3, 3, 3). Только эти 2 варианта возможны.
$\Rightarrow$ Получаем, что сколько восьмизначных чисел получается, 11193777 и 11333777 из этих чисел. Значит, нам надо считать количество восьмизначных таких чисел, у которых либо (1) 3 единицы, 3 семёрки, 9, 3

или (2) 3 тройки
3 семёрки
2 единицы.

(1) 3 единица, 3 семёрка, 9, 3 | 11193777. Предположим, что все числа разные, $1_a 1_b 1_c 9 3 7_x 7_y 7_z$ (здесь написал $7_x, 7_y, 7_z$, чтобы их разность был выдан).
$\Rightarrow$ так получим $8!$ чисел. Но когда мы писали эти числа $1_a(\ldots)$, $1_b(\ldots)$, $1_c(\ldots)$ | $\Rightarrow$ эти варианты были одинаковыми $\Rightarrow$ что надо $8!$ делить $3!$ (столько же способов $(1_a, 1_b, 1_c)$ (если разные можем переставить (перестановка)).
Так же $8!$ надо делить ещё $3!$ из за 3 семёрки, потому что варианты полученных из $7_x(\ldots)$, $7_y(\ldots)$, $7_z(\ldots)$ были одинаковыми. Получаем $\frac{8!}{3! \cdot 3!}$ числа.

(2) случаи, мы имеем 3 ~~ед~~ тройки, 3 семёрки, 2 единицы | Получаем $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}$

числа, таким же способом, как предыдущие:
Смотрим, что это перестановка с сочитаниями.

В Общем получаем $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}+\frac{8!}{3!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}}=$

$=560+2\cdot 560=3\cdot 560=1680$ способов. Столько же восьмизначных чисел существует, с произведениями цифр $\ni 261$.

Ответ. 1680.

5) $\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 & (1) \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a & (2) \end{cases}$ система имеет ровно 2 решения.

1) $\begin{cases} x+y+5\geq 0 \\ y-x+5\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x+y+5+y-x+5=10 \\ y=0; \end{matrix}$ Во первых смотрим, что $|a|+|b|\geq|a+b|$, при $a,b\in R$;

$\Rightarrow |x+y+5|+|y-x+5|\geq|x+y+5-y+x-5|=|2x|$ $\left(|t|=|-t|, \Rightarrow |y-x+5|=|-y+x-5|\right)$

$\Rightarrow 10\geq|2x| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\leq 10 \\ 2x\geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-5;5]$

и $|x+y+5|+|y-x+5|\geq|x+y+5+y-x+5|=|2y+10|$

$10\geq|2y+10| \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+10\leq 10 \\ 2y+10\geq -10 \end{cases}$ $\begin{cases} y\leq 0 \\ y\geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow y\in[-10;0]$;

2) $\begin{cases} x+y+5\geq 0 \\ y-x+5<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x+y+5-y+x-5=10 \\ 2x=10 \Rightarrow x=5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y<0 \\ y\geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow y\in[-10;0)$

3) $\begin{cases} x+y+5<0 \\ y-x+5\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -x-y-5+y-x+5=10 \\ x=-5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y<0 \\ y\geq -10 \end{cases}$ | когда $x=-5 \Rightarrow y\in[-10;0)$

$\Rightarrow |y|+|y+10|=10$, но $|y+10|+|y|\geq|y+10-y|=10 \Rightarrow$

равенства будет, когда $\left[\begin{matrix} \begin{cases} y+10<0 \\ y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} y+10\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \end{matrix}\right.$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

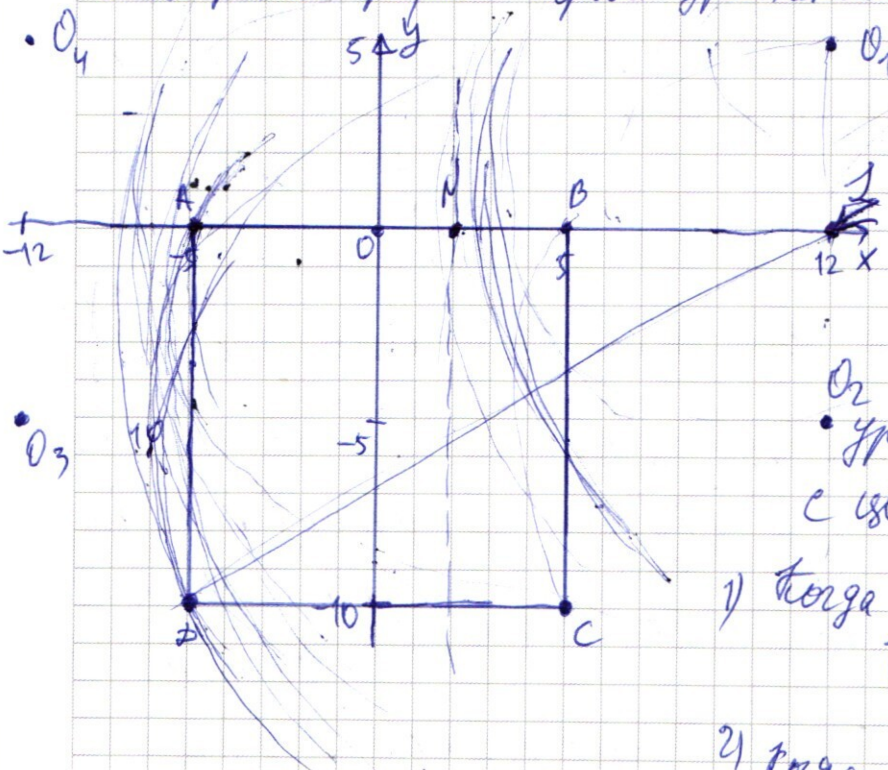
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $\begin{cases} x+y+5<0 \\ y-x+5<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -x-y-5-y+x-5=10 \\ y=-10 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x<5 \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-5;5);$

Когда $y=-10 \Rightarrow |x-5|+|5-x|\geq 0$

1) Когда $y=0 \Rightarrow |x+5|+|5-x|=10 \Rightarrow \begin{cases} x\geq -5 \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-5;5];$

Построим график первой уравнении.



Получается прямоугольник, с вершинами A, B, C и D.

$\begin{cases} \text{Когда } x=5 \Rightarrow |y+10|+|y|=10 \\ \text{Когда } x=-5 \Rightarrow |y|+|y+10|=10 \end{cases}$

O_2 Смотрим, что второе уравнение это окружность, с центром $(12;5)$ и радиусом $\left[\begin{matrix}\sqrt{a} \\ -\sqrt{a}\end{matrix}\right.$.

1) Когда $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-12)^2+(y-5)^2=a$

Окружность с центром $(12;5)$;

2) Когда $\begin{cases} x\geq 0 \\ y<0 \end{cases} \Rightarrow (x-12)^2+(y+5)^2=a$

Окружность с центром $(12;-5)$;

3) Когда $\begin{cases} x<0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+12)^2+(y-5)^2=a$

Окр. с центром $(-12;5)$;

4) Когда $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases} \Rightarrow (x+12)^2+(y+5)^2=a$

Окр. с центром $(-12;-5)$.

1) Смотрим, что если центр окружности в $(12;5)$, то радиус, должен быть больше чем $(12-(-5))=17$, $\Leftrightarrow a>17^2$, но и в это же время, $|AD|=10$; значит, если $a^2>17 \Rightarrow$ ...>17

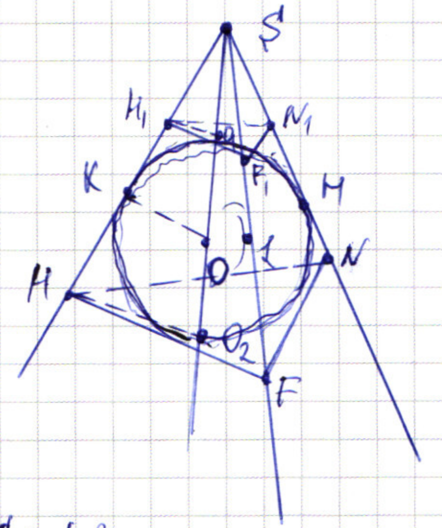
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow 17^2 < a < 389$, тогда будет ровно 1 решение, а если радиус будет равно $|1D|$ ⇒ будет ровно 2 решение ⇔ $a = 389$ ($r^2 = a = 1D^2 = (\sqrt{10^2+17^2})^2 = 389$,

$$\left[\begin{array}{l} 289 < a < 389 \\ 7^2 < a < 10^2 \end{array}\right.$$

Если у неё радиус больше $1B$, но меньше $1C$ ⇒ 2 решение. (Аналогично будет, если центр в O_2, O_3 или O_4)

4)



Плоскости, которые касаются сферы и перпендикулярны SO назовём α и β и их пересечения с трёхгранного углом HFN и $H_1F_1N_1$, а точки касания O_2 и O_1 а центр сферы O.

Смотрим, что S, O_1, O и O_2 лежат на одной прямой, так как O_1 и O_2 точки касания ⇒ $\begin{cases} OO_1 \perp \beta \\ OO_2 \perp \alpha \end{cases}$

$\begin{cases} SO \perp \alpha \\ SO \perp \beta \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} SO \perp \alpha \\ SO_2 \perp \alpha \end{cases}$ ⇒ $S, O, O_2 \in l_2$

$\begin{cases} SO \perp \beta \\ SO_1 \perp \beta \end{cases} \Rightarrow S, O, O_1 \in l_1$

$\Rightarrow \begin{cases} S, O, O_1 \in l_1 \\ S, O, O_2 \in l_2 \end{cases}$ ⇒ следует, что S, O, O_1, O_2 лежат на одной прямой.

$\triangle HNF \sim \triangle H_1N_1F_1 \sim \triangle K1M$, так как $\alpha \parallel \beta$

$\begin{cases} SO \perp \alpha \\ SO \perp \beta \\ SO \perp (K1M) \end{cases}$ ⇒ $\alpha \parallel \beta \parallel (K1M)$ ⇔ $(H_1N_1F_1) \parallel (HNF) \parallel (K1M)$.

$\Rightarrow \begin{cases} H_1O_1 \parallel KO \parallel HO_2 \\ \angle HSO_2 \text{ общий} \\ \angle O_1H_1S = \angle OKS = \angle O_2HS \end{cases}$ ⇒ что $\triangle SH_1O_1 \sim \triangle SKO \sim \triangle SHO_2$; ⇒ Из подобия $\triangle HO_2S \sim \triangle H_1O_1S$ ⇒

$$\frac{HO_2}{H_1O_1} = \frac{HF}{H_1F_1} = \sqrt{\frac{S_{HFN}}{S_{H_1F_1N_1}}} = \sqrt{16} = 4$$

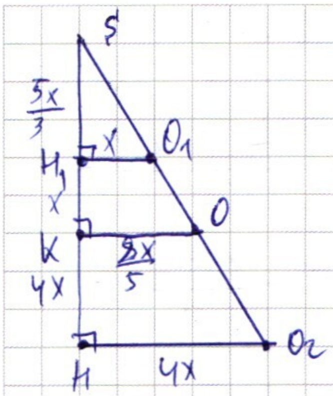
(так как $\triangle HNF \sim \triangle H_1F_1N_1$, они ~~это~~ касательные сферы, и $H_1F_1 \parallel HF \parallel K1$);

⇒ Пусть $H_1O_1 = x$ ⇒ $HO_2 = 4x$

Так как K точка касание ⇒ $HO_2 = HK = 4x$ и $H_1O_1 = H_1K = x$ (так как из одного точки проведены касательные).

⇒ Выделим $\triangle SHO_2$, $\triangle SKO$, $\triangle SH_1O_1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$HO_2 = HK = 4x$

$H_1O_1 = H_1K = x$

тогда $SH_1 = y$ обозначаем, получим

из подобия $\Delta SH_1O_1 \sim \Delta SHO_2$, что $\frac{SH_1}{SH} = \frac{H_1O_1}{HO_2}$

$\frac{y+5x}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{5x}{3} = SH_1;$

следует, что $tg\angle HSO = \frac{H_1O_1}{SH_1} = \frac{x}{\frac{5x}{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\angle HSO = arctg\frac{3}{5};$

$tg\angle HSO = \frac{KO}{SK}$ (из ΔKSO) $\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{KO}{x+\frac{5x}{3}} = \frac{3KO}{8x} \Rightarrow KO = \frac{8x}{5},$

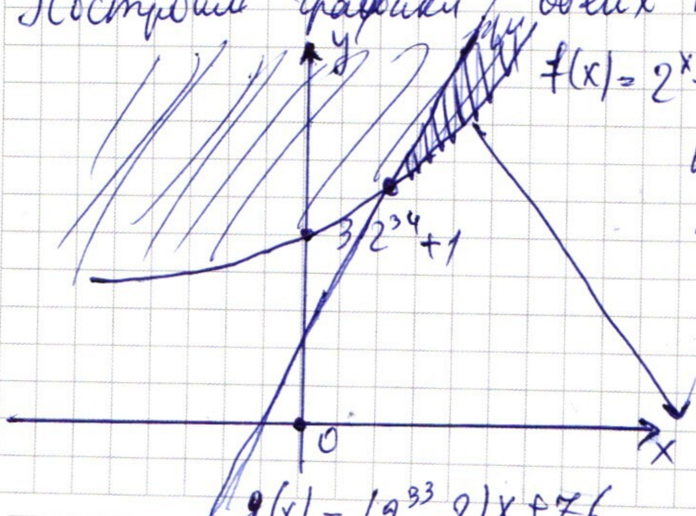
Значит так как $\Delta KLM \sim \Delta HFN \Leftrightarrow \left(\frac{KO}{HO_2}\right)^2 = \frac{S_{KLM}}{S_{HFN}} \Leftrightarrow \frac{S_{KLM}}{S_{HFN}} = \left(\frac{8x}{5\cdot 4x}\right)^2 = \frac{4}{25}$

$\Rightarrow S_{KLM} = \frac{4S_{HFN}}{25} = \frac{4\cdot 16}{25} = \frac{64}{25}.$

Ответ. $\angle KSO = arctg\frac{3}{5}$ и $S_{KLM} = \frac{64}{25}.$

7) $\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2x(2^{32}-1) \end{cases}$ значит $76 + (2^{33}-2)x < 2^x + 3\cdot 2^{34}$

Построим графики обеих неравенств.



$f(x) = 2^x + 3\cdot 2^{34}$; Ну так как $y \geq f(x)$, получим, что верхний часть, только удовлетворяет.

Так как $y < g(x)$:

значит удовлетворяет, только часть.

Смотрим, что $3\cdot2^{34} < 2^x + 3\cdot2^{34} < 76+(2^{33}-2)x$

но $2^x>0 \Rightarrow \quad x > \dfrac{3\cdot2^{34}-76}{2^{33}-2} > 0$

но и $0<2^x < \underbrace{76-3\cdot2^{34}}_{<0} + (2^{33}-2)x$, значит $x(2^{33}-2)+(76-3\cdot2^{34})>0$

$x > \dfrac{3\cdot2^{34}-76}{2^{33}-2} =$

Значит можем сказать, что $x>5$;

$= \dfrac{6\cdot2^{33}-12-64}{2^{33}-2} = 6 - \dfrac{64}{2^{33}-2} > 5$

Но и $2^x < 76-3\cdot2^{34}+(2^{33}-2)x \Leftrightarrow$

$(2^{33}-2)x-2^x > 3\cdot2^{34}-76 >> 0$

$(2^{33}-2)x > 2^x$, но 2^x функция очень быстро возрастает, а $(2^{33}-2)x$ более медленным, чем 2^x;

Если $x>34 \Rightarrow (2^{33}-2)x > 34(2^{33}-2) > 2^{38}-68 > 2^{38}-2^6$

$2^x > 2^{34}$

$t+1 \geq x > t$, где t целое число, то, $(2^{33}-2)x > t(2^{33}-2)$

$2^x \leq 2^{t+1} < t(2^{33}-2)$, значит, нам надо, что

$x \leq 39$, потому, что в противоположном случае,

$2^x \geq (2^{33}-2)x$ (это можем доказывать с помощью математической индукции);

И так $0 < x \leq 39$

тогда $\begin{cases} y \geq 2^0+3\cdot2^{34} = 3\cdot2^{34}+1 \\ y < 76+(2^{33}-2)\cdot2^{39} = 76+2^{72}-2^{40} \end{cases} \Leftrightarrow$

$3\cdot2^{34}+1 \leq y < 2^{72}-2^{40}+76 \Rightarrow N_y = (2^{72}-2^{40}+75-3\cdot2^{34}+1-1) =$

$3\cdot2^{34}+1 \leq y \leq 2^{72}-2^{40}+75 \qquad = (2^{72}-2^{40}-3\cdot2^{34}+75)$

а N_x (количество x) $= 39 \Rightarrow N_x\cdot N_y = N$

$N \rightarrow$ общее количество.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

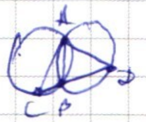
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = y^{\ln y - \ln x^7}$, ОДЗ $x>0$, $y>0$ $\quad x^{2\ln x}\cdot y^{\ln\left(\frac{y}{x^3}\right)} = 1$

$x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}\cdot y^{\ln y - \ln x^7} = 1$ $\quad x^{\ln x} = x^{\frac{1}{\log_x e}} =$

$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$



$y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0$

$-2y^2 + 4y = 0$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$y^2 - 2y = 0$ $\quad x^{2\ln x}\cdot y^{\ln x^4 - \ln x^7}\cdot y^{\ln y} = 1$ $\quad (x^2y^4)^{\ln x}\cdot y^{\ln y - \ln x^7} = 1$

$\boxed{y=0}$

$\boxed{y=2}$ $\quad x^{\ln x^2}\cdot y^{\ln y}\cdot y^{\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)} = 1$ $\quad x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x + \ln y - \ln x^7} = 1$

$x^{\ln x^2}\cdot y^{\ln\left(\frac{y}{x^3}\right)} = 1$ $\quad x^{2\ln x}\cdot y^{\ln y - 3\ln x} = 1$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\quad e^2\cdot y^{\ln\left(\frac{y}{x^3}\right)}$ $\quad y^{\ln y}$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$y^{\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{e^3}$ $\quad -x^2 - xy - \frac{y^2}{4} + \frac{5y^2}{4} - \frac{16y}{4} + 8x - x^2 = 0$

$64 - 16 - 24 + 8$

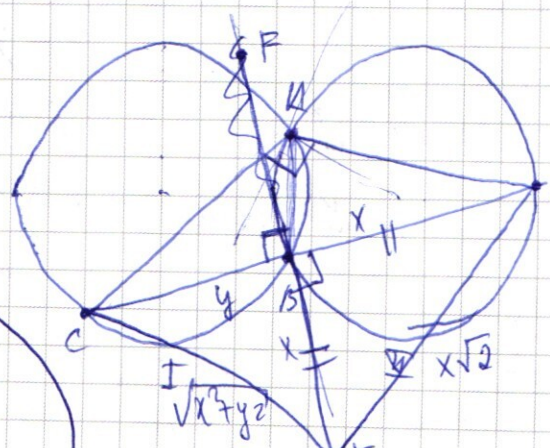
$y^{-5\ln x - 5}$ $\quad y^{-\ln x^3} = \frac{1}{e^3}$ $\quad (y\sqrt5)^2 - 2\cdot y\sqrt5\cdot\frac{8}{\sqrt5} + \frac{64}{5}$

$y^{\ln x^3} = e^3$ $\quad (x^2y^4)^{\ln x}\cdot y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} = 1$

$y^{\ln x} = y^{\ln y}$

$x = y$

$a^{\log_a b} = b$



$BF = BD$

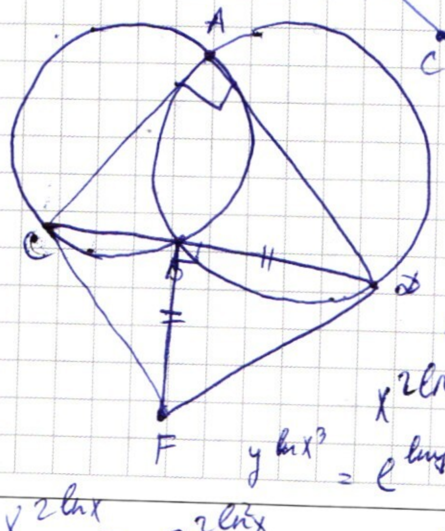
$CF - ?$

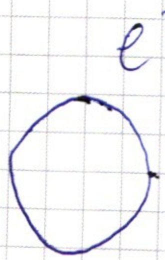
$R = 10$

$x^2 + y^2 = t^2$

$e^{2\ln^2 x + \ln^2 y - \ln y\ln x^3} = 1 = e^0$

$2\ln^2 x - 3\ln x\ln y + \ln^2 y$

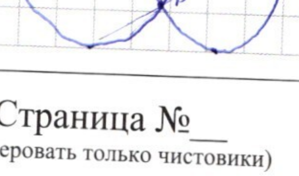




$a^{\log_a a}$

$x^{2\ln x}\cdot y^{\ln\frac{y}{x^3}} = 1$ $\quad y^{\ln y} = (e^{\ln y})^{\ln y} = e^{\ln^2 y}$

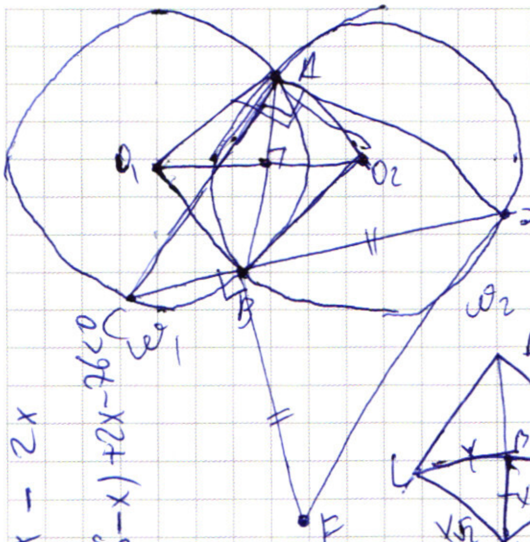
$y^{\ln x^3} = e^{\ln y\ln x^3}$



$x^{2\ln x} = e^{2\ln^2 x}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

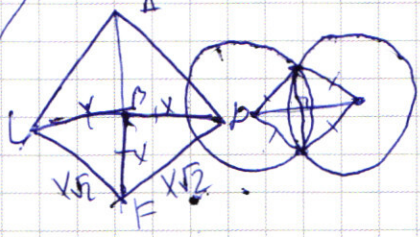


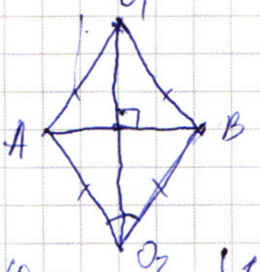
$O_1A = AO_1 = O_2B = BO_1$

$AB \perp O_1O_2$

AO_1BO_2 квадрат

~~$AB = O_1O_2 = 10\sqrt{2}$~~





$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7^3 \end{array}$$

$9261 = (3\cdot 7)^3$

$a_1 a_2 \ldots a_8$

$3^3 \cdot 7^3$

93 $\boxed{777}$

333

$\left\{ \begin{array}{ll} 11193777 & (1) \\ 11333777 & (2) \end{array} \right.$

101010

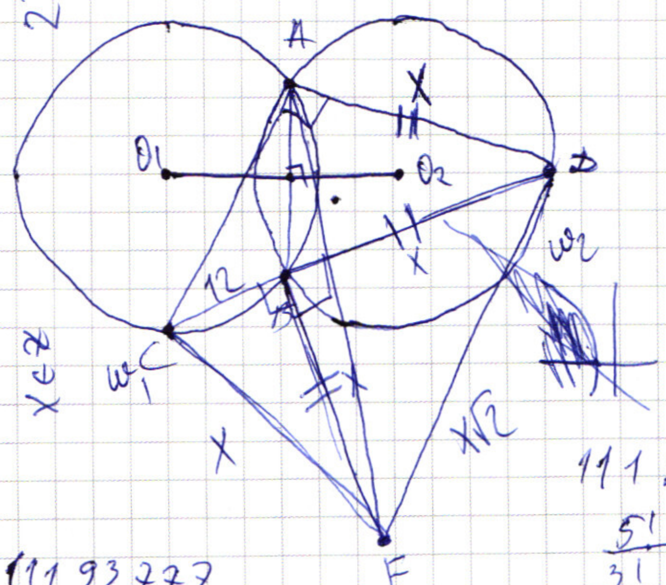
1001 93777

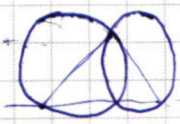
1000 +

$1_a 1_b 1_c\ 9 3 7_a 7_b 7_c$

1_a $\frac{8!}{2!\cdot 3!} = 560\cdot 6$

$\frac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2} =$





11123 $y \geq 2$

$\frac{5!}{3!} = 20$

$1_a 1_b 1_c\ 23$

$\frac{5!}{3!} = 20$

$= 560$

$560 \cdot 7 = 3920$

11193777

$\frac{8!}{3!\cdot 3!} = 560\cdot 2$

$560 \cdot 3 = 1680$

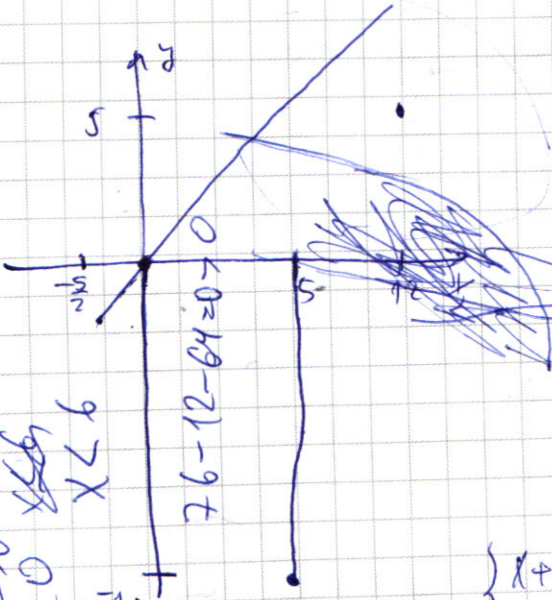
$t^2 = $

$y \geq x+5$

$y + x + 5 + y - x + 5 = 10$

$2y = 0$

$y = x \geq x - 5$



$\left\{ \begin{array}{l} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} y \geq -5-x \\ y \geq x-5 \end{array} \right. \Rightarrow y = x$

$x \geq -\frac{5}{2}$

$\left\{ \begin{array}{l} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 < 0 \end{array} \right.$

$y \geq -x-5$

$y < x-5$

$x + y + 5 - y + x - 5 = 10$ $\quad -10 \leq y < 0$

$2x = 10$

$x = 5$

$x = -5$

$\left\{ \begin{array}{l} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{array} \right.$

$y < -x-5 = -10$

$y > -10$

$-x-y-5+y-x+5 = 10$

$2^{33}(6-x) + 2x - 76 < 0$

$2^x + 2x > 2^6 + 2\cdot 6 = 64 + 12 = 76$

$2^x + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2^{33}x - 2x$

$x \in \mathbb{Z}$

$76 > 2x + 2^x$

$x > 6$

$2^{33}(x-6) + 76 - 2x - 2^x > 0$

$x < 6$

$76 - 12 - 64 = 0$

$2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2^{33}x - 2x$

$2^x = 76 + 2^{33}(x-6) - 2x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНС
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$ $y = x$ $x \geq -\frac{5}{2}$

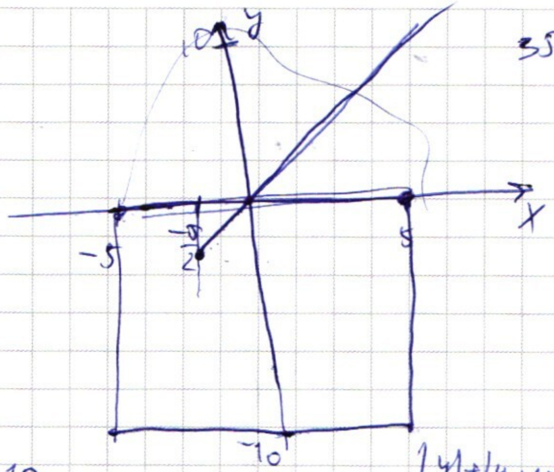
35 балл

3
5
4
0
3
0
6
15/35

$\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y < x-5 \end{cases}$ $x+y+5-y+x-5=10$

$x=5$

$-10 \leq y < 0$



$\begin{cases} y < -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$ $-x-y-5+y-x+5=10$

$-2x$

$x=-5$

$|y|+|y+10|$

$\geq |x+y+5+y-x+5| = |2x|$

$10 \geq |2x|$

$0 > y \geq -10$

$\begin{cases} y < -x-5 \\ y < x-5 \end{cases}$ $-x-y-5-y+x-5=10$

$y=-10$

$\begin{cases} 2x \leq 10 \\ 2x \geq -10 \end{cases}$ $x \in [-5;5]$

$y \in [0;10]$

$10 \geq |2y-10|$

$-10+5 < -x$

$-5 < x < 5$

$\begin{cases} 2y-10 \leq 10 \\ 2y-10 \geq -10 \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\angle KSO$

$tg\alpha = \frac{8}{5} = \frac{8R}{8x}$

$R = \frac{8x}{5}$

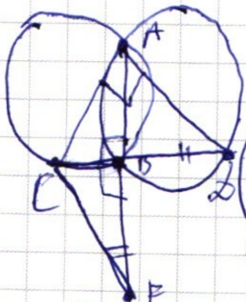
$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases}$ $2y=0$ $y=0$

$y = 80$

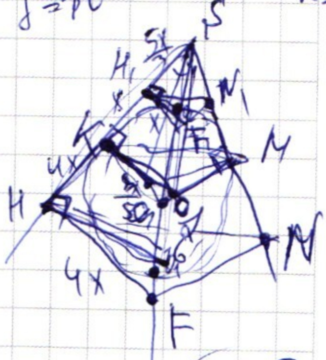
$x+y+5+y-x+5=10$ $x+5 \geq 0$

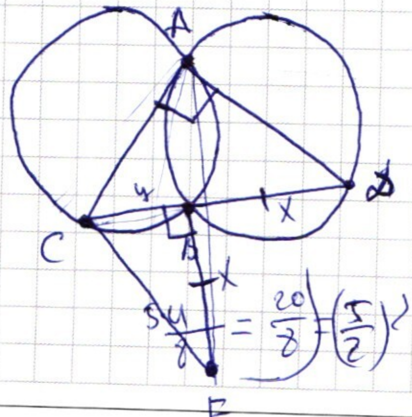
$y=0$ $-x+5 \geq 0$

$x+y$



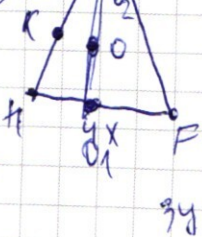
$R=10$





$\begin{cases} C, B, D \in l_{прям} \\ \angle CAD = 90° \end{cases}$

$\frac{5x+t}{x} = 4$



$\frac{54}{8} = \frac{20}{8} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\left(\frac{19x}{3}\right)^2 + 16x^2$ $x^2 + \frac{25x^2}{9}$

$\frac{25}{4} = \frac{16}{t}$ $t = \frac{64}{25}$

$3y = 5x$ $y = \frac{5x}{3}$

$BF = BD$

$CF = ?$

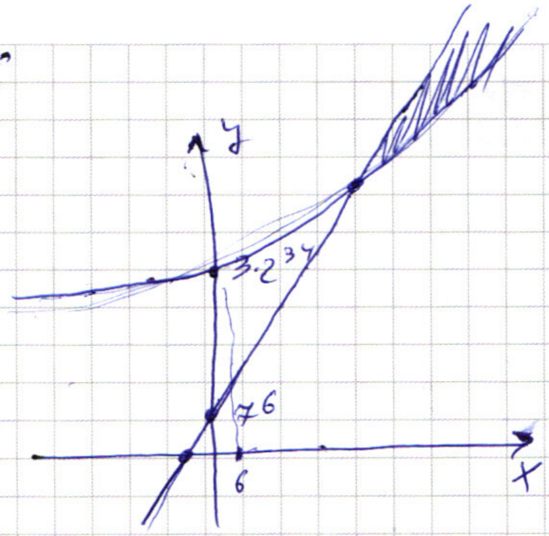
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2x(2^{32}-1) = (2^{33}-2)x + 76 \end{cases}$$

$(x;y) \in Z$

$a > 1$



$$\begin{cases} y < kx + b \\ y \geq a^x + c \end{cases}$$

$a^x + c \to c$

$kx + b \to -b$

$y = x \quad y \geq x$

$0 < 2^x + 3\cdot 2^{34}$ $76 + (2^{33}-2)x > 3\cdot 2^{34}$

$(2^{33} - 2)$

$x > 0$

$x > \frac{3\cdot 2^{34} - 76}{2^{33}-2} > 1$

$8 - 4 - 12 + 8$