

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$3375 = 125 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3 = 5^3 \cdot 3 \cdot 9$. Число, удовлетворяющее условию, можно записать либо с помощью трёх пятёрок, трёх троек и двух единиц, либо ~~с помощью~~ используя три пятёрки, одну тройку, одну девятку и три единицы. Это единственные возможные варианты, т.к. другие произведения различных степеней 5 и 3 не будут являться однозначными числами и их нельзя использовать как цифры. Рассмотрим оба случая.

1) 3 цифры „5“, три цифры „3“ и 2 цифры „1“. ~~Всего~~ Всего подходящих нам таких сочетаний будет $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} =$
 $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 560$.

2) 3 цифры „5“, 1 цифра „3“, 1 цифра „9“ и 3 цифры „1“. Нам подходят $\frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 =$
 $= 1120$.

Согласно правилу сложения, таких чисел всего $1120 + 560 = 1680$.

Ответ: 1680.

$\sqrt{2}$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = \sin \left(14x + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{cases} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0, & (1) \\ \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x = 0, & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 7x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$2 \cos \left(5,5x + \frac{3\pi}{8} \right) \cos \left(1,5x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \left(5,5x + \frac{3\pi}{8} \right) = 0 \\ \cos \left(1,5x - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5,5x + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 1,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x + \frac{3\pi}{4} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

 $\sqrt{5}$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, & (1) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a, & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad |y-3-x| + |y-3+x| = 6, (1)$$

$$(2) \quad (x-4)^2 + (y-3)^2 = a, (2)$$

Уравнение (2) задаёт 4 окружности радиусами $\sqrt{a}$ с центрами в точках $B(4; 3), D(-4; -3), C(4; -3),$

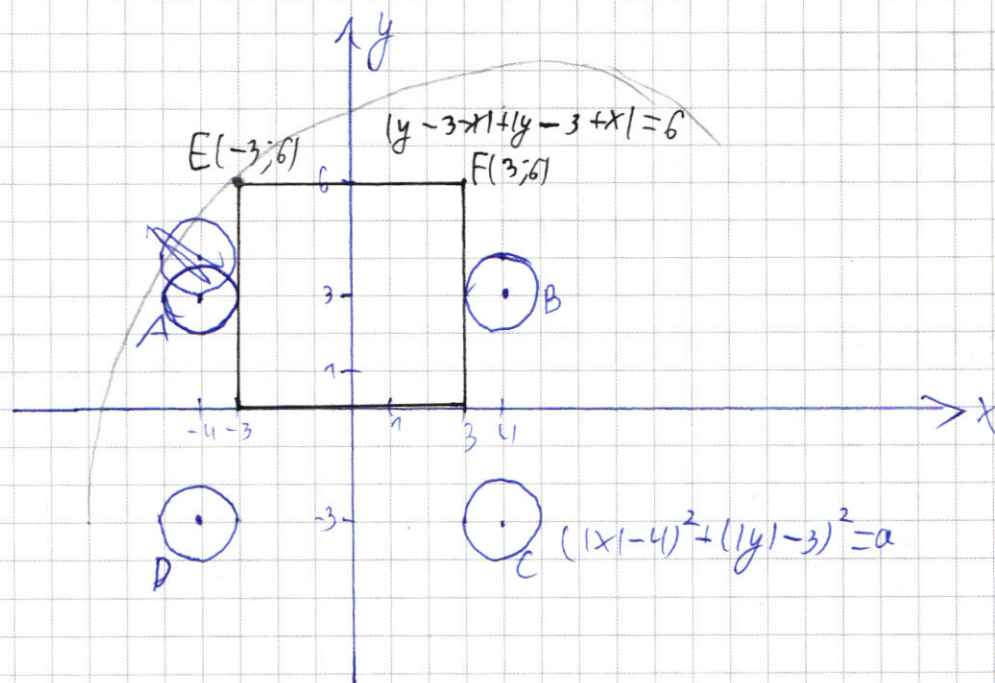
$A(-4; 3)$. Уравнение (1) можно представить как

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2y-6 = 6 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \\ -2x = 6 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2x = 6 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \\ -2y+6 = 6 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3 \\ x \geq -3 \\ y = 6 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y \geq 0 \\ y < 6 \\ x = -3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y < 6 \\ y \geq 0 \\ x = 3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x > -3 \\ x < 3 \\ y = 0 \end{array} \right. \end{array} \right]$$

Из этой системы следует, что уравнение (1) задаёт на координатной плоскости квадрат ^с центром в точке ~~(0;0)~~ $(3;3)$ со сторонами, параллельными координатным осям и равными 6. Фигуры на плоскости симметричны относительно оси OY , т.е. если решение есть на левой относительно оси OY плоскости, то есть и на правой.



Первый случай, когда у нас будет два решения — это когда окр.-ты с центрами в точках А и В касаются квадрата в точках $(-3; 3)$ и $(3; 3)$. Это произойдет при радиусе 1, т.е. $a^2 = 1^2$, $a = 1$.

Да. При увеличении радиуса у системы будет больше двух решений (сначала окр.-ты с центрами в А и В будут пересекать квадрат по два раза, потом квадрат начнет пересекать окр.-ты с центрами в ~~А~~ С и D, далее окр.-ты с центрами в А и В станут достаточно большими, чтобы не пересекать квадрат, но с окр.-тами с центрами в С и D всё ещё будет больше двух пересечений). Лишь когда окр.-ть с центром в точке С будет пересекать квадрат в какой-то дальнейшей точке $E(-3; 6)$ (аналогичное случится для окр.-ты с центром в D и точки $F(3; 6)$) — лишь тогда у системы будет ~~два~~ вновь два решения. Это произойдет при $a^2 = (4+3)^2 + (-3-6)^2 = 7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130$, т.е. $a = \sqrt{130}$. При $a > \sqrt{130}$ решений у системы не будет.

Ответ: 1; $\sqrt{130}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^2 + xy - 4x - 3y^2 - 3xy + 12y = 0 \\ & x(x+y-4) - 3y(y+x-4) = 0 \\ & (x-3y)(y+x-4) = 0 \\ & \begin{cases} x-3y = 0 \\ x+y-4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая, при которых выполняется ур-е (2):

$$1) \quad x = 3y, \text{ тогда ур-е (1) равносильно}$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y}$$

Отметим, что $y > 0$. Прологарифмируем выражение по основанию 10, и вынесем степени за логарифмы.

$$\begin{aligned} \lg 3y \cdot \lg\left(\frac{y^4}{3}\right) &= 2\lg 3y^2 \cdot \lg y \\ (\lg 3 + \lg y)(4\lg y - \lg 3) &= 2(\lg 3 + 2\lg y)\lg y. \end{aligned}$$

Сделаем замену $a = \lg 3$, $b = \lg y$

$$(a+b)(4b-a) = 2(a+2b)b$$

$$4ab - a^2 + 4b^2 - ab = 2ab + 4b^2$$

$$\cancel{-a^2} + \cancel{ab} - a^2 + ab = -a(b-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lg 3 = 0 \text{ — неверно} \\ a = b \end{cases}$$

$a=b \Leftrightarrow \lg y = \lg 3 \Rightarrow y=3, x=3y=9$. (сделав проверку, убеждаемся, что пара $(3; 9)$ является решением).

$$2) \quad x=4-y$$

$$\left(\frac{y}{4-y}\right)^5 \lg 4-y = y^2 \lg(4-y)$$

Отметим, что $y > 0, 4-y > 0$ и логарифмируем выражение

$$\lg(4-y)(5 \lg y - \lg(4-y)) = 2 \lg y (\lg y + \lg(4-y)).$$

Заменим $a = \lg y, b = \lg(4-y)$

$$b(5a - b) = 2a(a + b)$$

$$5ab - b^2 = 2a^2 + 2ab$$

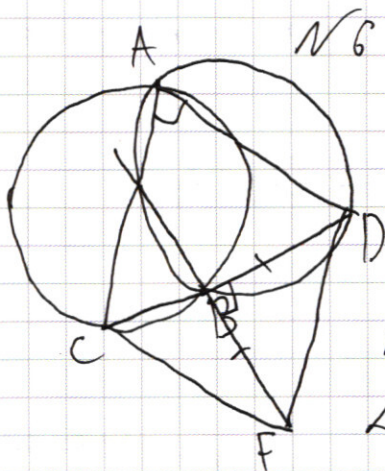
$$2a^2 - 3ab + b^2 = 2a^2 - 2ab \Rightarrow ab + b^2 = 2a(a - b) - b(a - b) = 0$$

$$+2ab \Rightarrow (2a - b)(a - b) = 0$$

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \lg y = \lg(4-y) \\ \lg y = \lg(4-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ y = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ — не удовлетворяет условию} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \Rightarrow x = \frac{9 - \sqrt{17} + 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Ответ: ~~(3; 9)~~ $(9; 3), (2; 2), \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$.



$\angle ADC = \angle ACD$, т.к. окр-ти равны,
 дуги $\overset{\frown}{AB}$ на обеих окр-тях стягиваются
 одной хордой и равны. $\angle ABC = \angle ACD = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$,
 т.к. $\triangle ACD$ — прямоугольный. $\Rightarrow \triangle ACD$ — равнобедренный;
 $\triangle ACD \sim \triangle BFD$ (по углам, т.к. $BF \perp CD$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\underline{3375} = 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot$

$\cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ — восьмизначные, однако, цифра 9.

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 20 \\ \hline 560 \end{array}$$

2) $\cos 11x - \sin 11x - (\cos 3x - \sin 3x)$

~~$\sqrt{2} \cos$~~ $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\alpha = x+y, \beta = x-y, \frac{\alpha+\beta}{2} = x, \frac{\alpha-\beta}{2} = y$

$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin \alpha = \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin \beta = \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$

$2 \sin 4x \cos 4x - 2 \sin 4x \cos 4x =$

$= 2 \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

~~$\sqrt{2} \cos(11x - \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4})$~~

$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos 11x - \sin 11x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) = \sqrt{2} \left(\cos 11x + \frac{\pi}{4} \right)$

~~$\sin 3x - \sin 3x$~~

$\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x \right) = \sqrt{2} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(3x + \frac{3\pi}{4})$

$\alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = \frac{3\pi}{4}$

~~$\sqrt{2}$~~ $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4})$

~~$\sqrt{2}$~~ $\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$

$$3) \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - \cancel{2x} \cdot (2y+4)x + (12y-3y^2) = 0$$

$$\frac{D}{4} = (y+2)^2 - 3(4y-y^2) = y^2 + 4y + 4 - 12y - 3y^2 = 4 - 8y - 2y^2 =$$

$$= -2(y^2 + 4y - 2)$$

$$\cancel{x} \cdot \cancel{(x-2y)} \cdot x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y$$

$$x^2 - 2xy + 4 - (3y^2 - 12y + 2\sqrt{3}) - 4 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = x(x-2y-4) -$$

$$x^2 + xy - 4(x-3y^2 - 3y + 12y) = 0$$

$$x(x+y-4) - 3y(y+x-4) = 0$$

$$(x-3y)(y+x-4) = 0$$

$$xy + x^2 - 4x - 3y^2 - 3xy + 12y = 0$$

$$1) x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg xy} \quad \text{логарифмируем}$$

$$\lg 3y \lg \left(\frac{y^4}{3}\right) = 2 \lg 3y^2 \lg y$$

$$\lg 3y (\lg y^4 - \lg 3) = (2 \lg 3y + \lg y) \lg y =$$

$$(\lg y + \lg 3) (4 \lg y - \lg 3) = (2 \lg 3 + 4 \lg y) \lg y$$

$$\lg y = a, \lg 3 = b$$

$$(a+b)(4a-b) = (2b+4a)a$$

$$4a^2 - ab + b^2 + 5ab = 2ab + 4a^2$$

$$\cancel{4a^2} - \cancel{ab} + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = 0$$

$$a = -b \Rightarrow \lg y = -\lg 3 = \lg \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}, x = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2 \cdot \lg \frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg \frac{1}{3}}$$

$$2 \lg \frac{1}{3} \cdot \lg \frac{1}{3} = \lg 3$$

$$b(2a+b)=0$$

$$1) b=0 = \lg 3, \text{ что не верно}$$

$$\left(\frac{3}{3^{10}}\right)^{\lg \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{2 \lg \frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3^9}\right)^{-\lg 3} = (3^9)^{\lg 3} = 3^{4 \lg 27} = 3^{12 \lg 3} = ?$$

$$2) 2a = -\lg 3$$

$$2a = \frac{1}{2} \log_{0,1} 3$$

$$a = \log_{0,1}$$

$$2a = \lg \frac{1}{3} = \lg y^2$$

$$y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{9}, x = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2) \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$$

$$\cos 2 - \cos \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = -2 \sin(\frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2}) \sin(4x)$$

$$-2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \sin 4x = \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \cos 14x = \sqrt{2} (\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x = \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin 11x - \sin 3x = 2 \sin 4x \cos 7x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \sin y \cos x$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$1) 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

1) 3 пятерки, 3 тройки, 2 единицы

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{\cancel{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 35 \cdot 16 =$$

$$= 760$$

2) 3 пятерки, 1 тройка,
1 девятка, 3 единицы

$$\frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{\cancel{6} \cdot \cancel{3} \cdot 2} = 20 \cdot 36 = 720$$

$$720 + 760 = \boxed{1480}$$

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a, & (2) \end{cases}$$

второе задает ~~с~~ несколько окружностей с радиусами $\sqrt{a}$ и центрами $(4; 3), (-4; -3), (4; -3), (-4; 3)$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2y-6=6 \Rightarrow y=6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 3 \\ y=6 - \text{никогда} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x \\ y < 6 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y-3-x - y+3-x = -x=6 \Rightarrow x=-6 \\ y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} y < x+3=6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \\ -y+3+x+y-3+x = 2x=6 \Rightarrow x=3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 3 \\ y=0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№32) $y = 4 - x \rightarrow x = 4 - y$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2 \lg(4-y)}$$

$$\lg(4-y) \cdot (\lg y - \lg(4-y)) = 2 \lg(4-y) \lg y = 2 \lg y (\lg(4-y) + \lg y)$$

$$a = \lg(4-y), b = \lg y$$

$$a - (5a - b) = 2b(a + b)$$

$$5a^2 - ab = 2ab + 2b^2$$

$$5a^2 - 3ab - 2b^2 = 5a^2 - 5ab + 2ab - 2b^2 = 5a(a-b) + 2b(a-b) = 0$$

$$(5a + 2b)(a - b) = 0$$

а) $a = b$, $4 - y = y$, $y = 2$, $x = 2$

$$[2]^{\lg 2} = 2^{2 \lg 2} = 2^{\lg 4} = 4 - \text{есть.}$$

б) $5a = -2b$

$$5 \lg(4-y) = -2 \lg(y)$$

$$(4-y)^5 = y^2$$

$$(4-t^2)^5 = t^2, \quad \left(\frac{2-t}{2+t}\right)^5 = t$$

$$5 \lg(4-y) = 2 \lg y = 0$$

$$y^2 = 4 - y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16$$

$$xy \quad 2a^2 - 3ab + b^2$$

$$2a^2 - 2ab - ab + b^2$$

$$2a(a-b) - b(a-b)$$

$$xy \quad D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - \text{мало}$$

$$\frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 14x = \sin(14x + \frac{\pi}{2}) = 2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \cos(7x + \frac{\pi}{4}) = -2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \sin 4x$$

$$1) \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

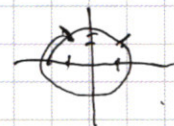
$$2) \cos(7x + \frac{\pi}{4}) = -\sin(4x + \frac{\pi}{2})$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(4x + \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$2 \cos(5,5x + \frac{3\pi}{8}) \cos(1,5x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$7x = -\frac{\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{28}$$

$$\cos \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} = -1$$



похоже на правду

$$1) \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} = 2^{65} (3 + 2^{x-65}) \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x = 70 + 2^{64}x - x \end{cases}$$

верхняя граница — $y = 70 + (2^{64} - 1)x$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$a/2^x + 3 \cdot 2^{65}. \text{ пр-я: } y' = \frac{1}{e} x$$

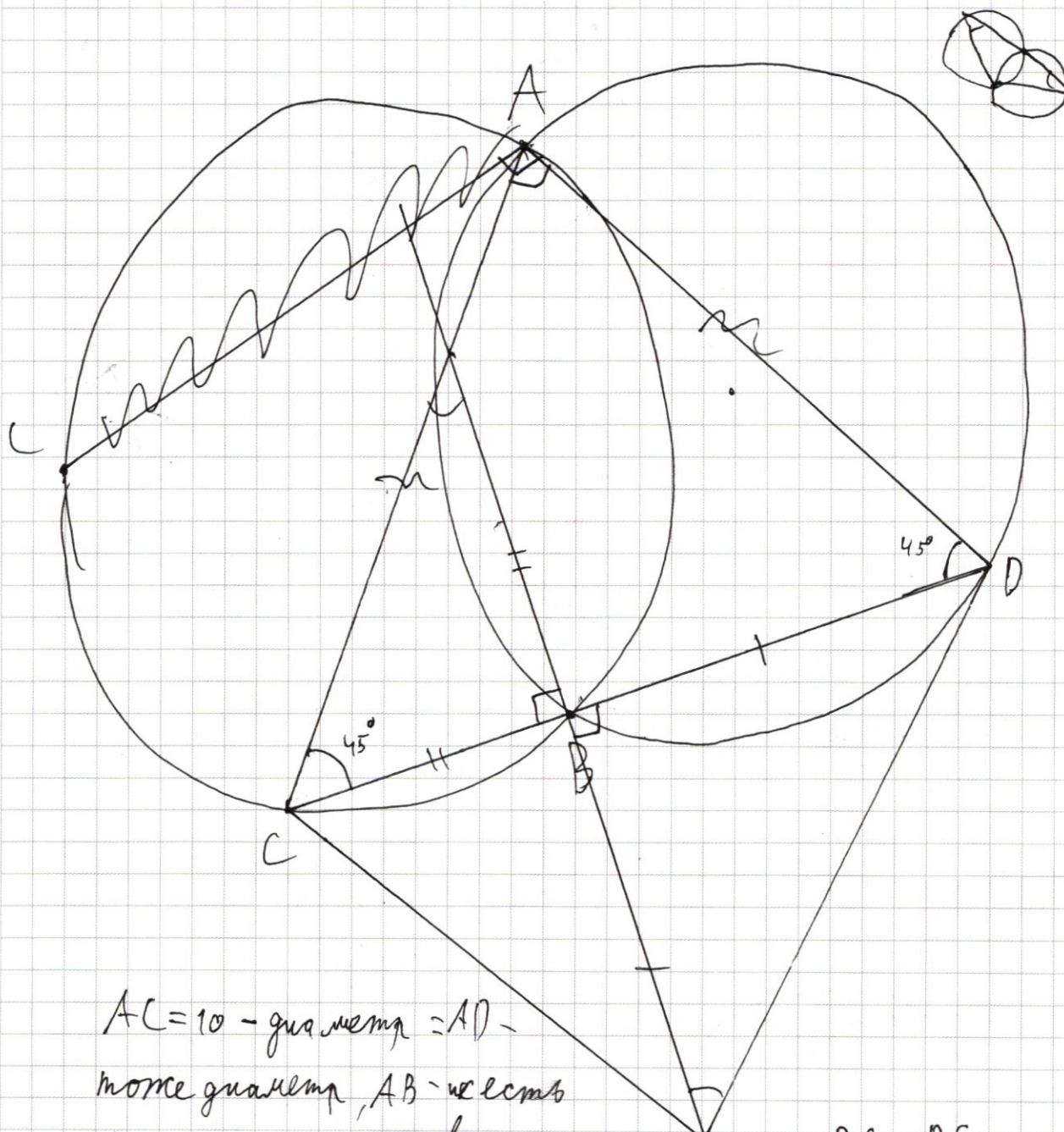
~~х~~ $y' = 2^{64} - 1 \Rightarrow y$ ~~меняет~~ ~~знак~~ ~~в~~ ~~а~~ ~~не~~ ~~меняет~~

А А А А А А А А А А

НАЛИТИКА. ??? в найм разуме. ??? А

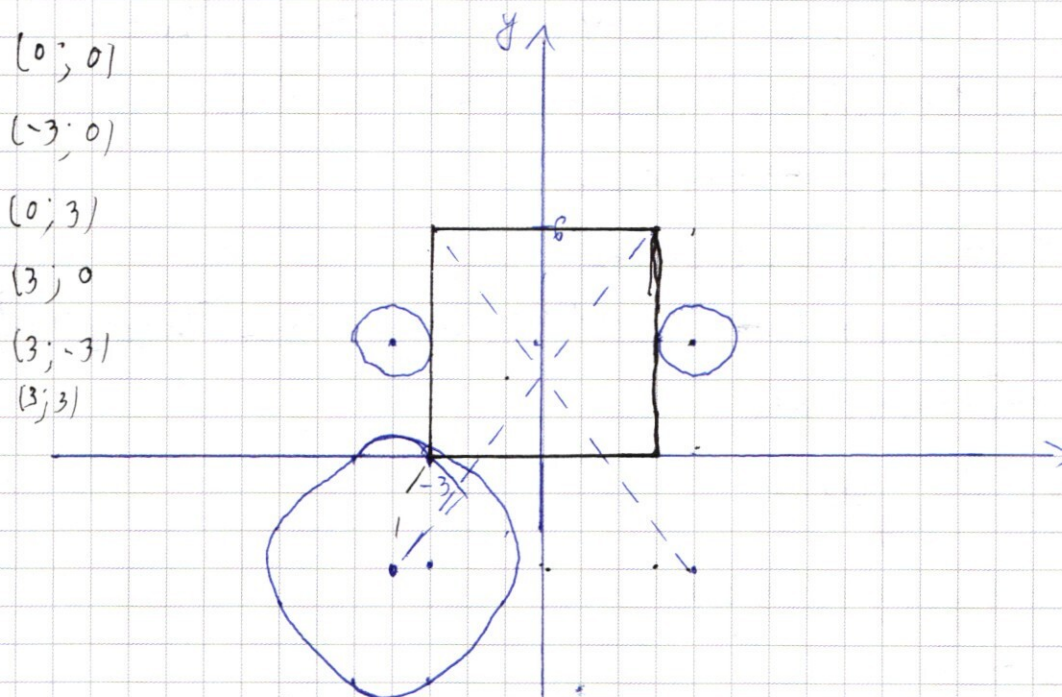
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos(5,5x + \frac{\pi}{8}) \cdot$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



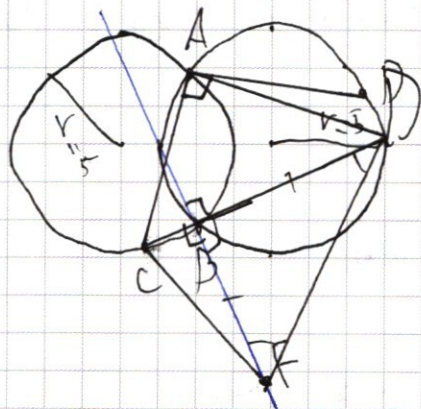
$AC = 10$ - гипотенуза $= AD$ -
 катет гипотенузы, AB - катет
 перпендикуляр и высота и медиана. $BC = BF$
 $CF = \sqrt{2} BD$, $CF = AD = 10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) $a=1$, 2) $a^2 = 7^2 + 9^2 = 63 + 49 = 112$, $a = \sqrt{112}$

61



$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x \Leftrightarrow$$

$$+ \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (2 \cos^2 7x - 1) = 1 - \sqrt{2} \cos^2 7x$$

$$\sin 4x \sin 7x + \sin 4x \cos 7x + \sqrt{2} \sin 4x \cos^2 7x = 1$$

$$\cos 7x (\sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x) + \sin 4x \sin 7x$$

$$\sin 4x \sin 7x + \sin 4x \cos 7x$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = \cos 14x$$

$$\sin 2 \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = -\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$-\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{3} \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ (x - 3y)(y + x - 4) = 0 \end{cases}$$

$$1) x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg(3y)} = y^{2(\lg 3 + \lg y)} = y^{4 \lg y + 2 \lg 3} = \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3 + \lg y}$$

$$\lg y (4 \lg y + 2 \lg 3) = (\lg 3 + \lg y) (4 \lg y - \lg 3)$$

$$a = \lg y, b = \lg 3$$

$$a(4a + 2b) = (a + b)(4a - b)$$

$$4a^2 + 2ab = 4a^2 + 4ab - b^2 - ab$$

$$-ab + b^2 = 0$$

$$b(b - a) = 0 \rightarrow b = a, y = 3, x = 9$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg y} = 3^{2 \lg 2y} = 3^{6 \lg 3} = 3^{6 \lg 3} \text{ — упр.}$$

$$\frac{y^4}{3} = 3^{\lg y}$$

$$3^{3 \lg y} = 3^{6 \lg 3} = 3^{2 \lg 2y} \text{ — упр.}$$