

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

Тогда, чтобы произведение цифр
восьмизначного числа было равно 3375,
оно должно состоять либо из цифр

3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1, либо из цифр 9, 3, 5, 5, 5, 1, 1, 1.

У нас есть 2 набора.

1) Составить 8-значное число мы можем 8! способами,
но цифры 3 и 5 повторяются трижды, а цифра 1
дважды. $\Rightarrow$ мы должны разделить количество
способов на $3! \cdot 2! \cdot 3!$

$$N_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

2) В этом наборе цифры 5 и 1 повторяются
трижды $\Rightarrow$ делим на $3! \cdot 3!$

$$N_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

Тогда общее количество способов

$$N = N_1 + N_2$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \\ &= 560 + 1120 = 1680 \end{aligned}$$

Ответ: 1680 чисел

W2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

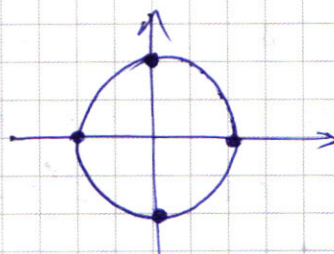
$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 14x \right)$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) (\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x) = 0$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot 2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} \right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x \right) = 0 \end{array} \right.$$



$$7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi a, a \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} - \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11}{2}x = -\frac{3\pi}{8} - \pi a, a \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi a}{11}, a \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

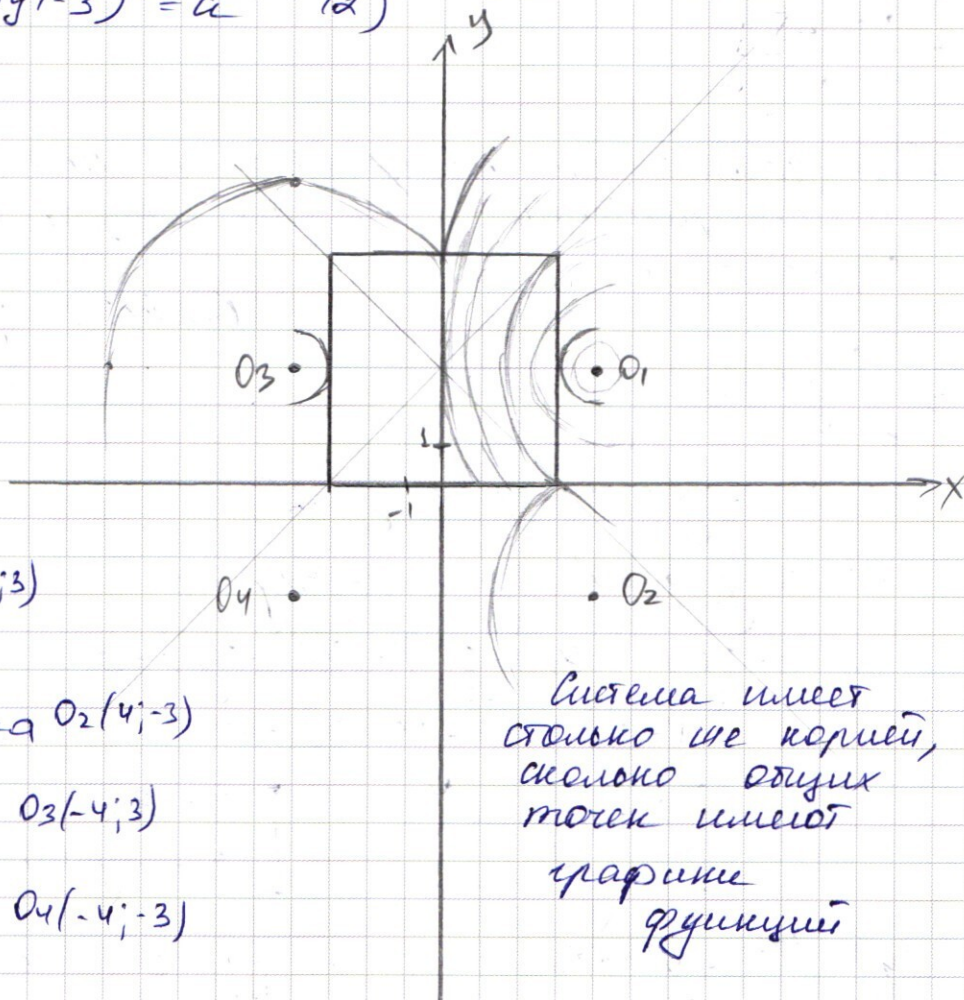
(1)

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ y = 0 \end{cases}$$



(2)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases} \quad O_1(4; 3)$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = a \end{cases} \quad O_2(4; -3)$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases} \quad O_3(-4; 3)$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = a \end{cases} \quad O_4(-4; -3)$$

Система имеет
столько же корней,
сколько общих
точек имеют
график
функций

Окружности радиуса R $\forall R \in \mathbb{R} \quad a = R^2, a \geq 0$

1) $R < 1 \Rightarrow$ нет точек пересечения
 $R = 1$

окружности с центрами в т. O_1 и O_3 касаются
графика (1) $\Rightarrow$ будет ровно 2 точки
пересечения, а значит и 2 корня

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$ подходит

При дальнейшем увеличении R число корней
будет > 2 , до тех пор, пока не достигнет
значения $R = 5$

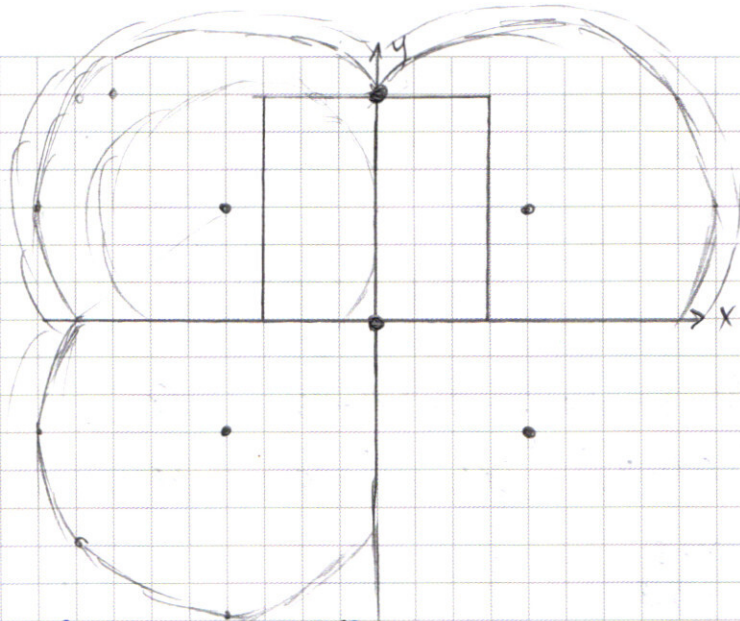
При $R=5$

При значении $R=5$
график тангенс
будет иметь 2
отличные точки

$(0;0)$ и $(0;6) \Rightarrow$

$$\boxed{a=25}$$

подходит



При дальнейшем увеличении R система не будет
иметь решений, т.к. не будет точек
пересечения

Ответ: $\begin{cases} a=1 \\ a=25 \end{cases}$

$$\sqrt{3} \int \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 3xy + xy - 3y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$x(x-3y) + y(x-3y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{\sqrt{3y}}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$y^4 \lg 3y = y^2 \lg 3y^2 \cdot 3 \lg 3y$$

$$y \lg 81y^4 - \lg 9y^4 = 3 \lg 3y$$

$$y \lg 9 = 3 \lg 3y$$

$$3 \lg y = 3 \lg 3y$$

$$3 \lg y^2 = 3 \lg 3y$$

$$y^2 - 3y = 0$$

$$y(y-3) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 & \text{не ур.} \\ y = 3 & \text{ур.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$

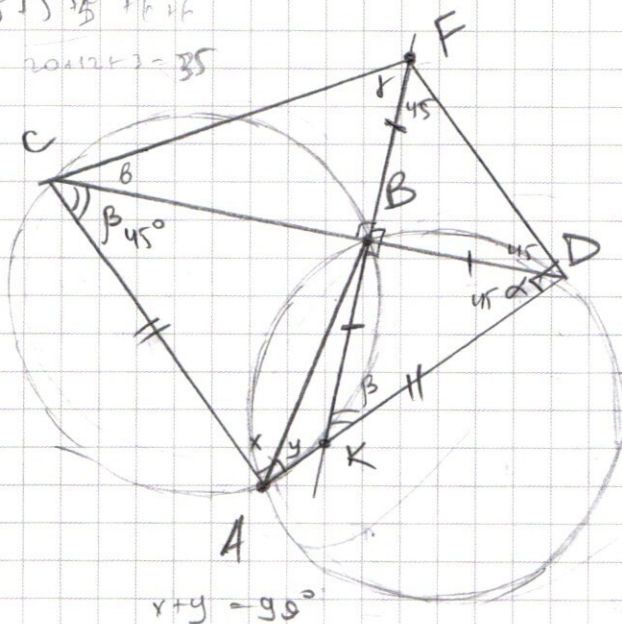
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~6

$$R = 5$$

$$BF = BD$$

CF - ?



$$\triangle BDK \sim \triangle ADC$$



$$\frac{BD}{AD} = \frac{DK}{DC} = \frac{BK}{AC}$$

$\triangle ABD$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

$\triangle ABC$

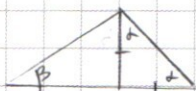
$$\frac{AB}{\sin \beta} = 2R$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

оба угла, $\angle 90^\circ \Rightarrow$

$$\alpha = \beta$$



$$\frac{BC}{\sin \angle CAB} = 2R$$

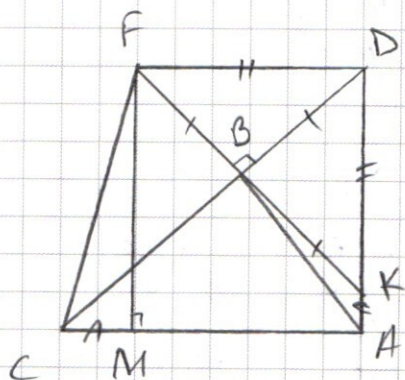
$$BC = 2R \sin \angle CAB = 2R \cdot \sin \alpha$$

BD

$$\frac{BD}{\sin \angle DAB} = 2R$$

$$\Rightarrow BD = 2R \cdot \sin \angle DAB = 2R \cdot \cos \angle CAB = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$



$$FD = DK$$

$$AC = AD$$

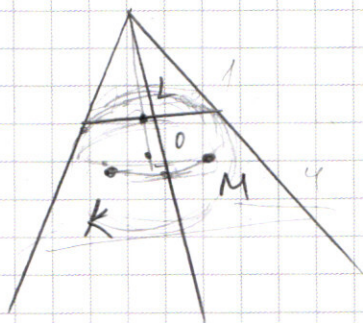
$$CM = AC - FD = AD - DK = AK$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{64}x - x$$

3 5 5 5 5 6 6
3 5 5 0 5 0 0

24



$$\textcircled{3} \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lg_a b &= c \\ a^c &= b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x-3y)(x+y-4) = 0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^{\lg} \\ \lg_a b &= c \end{aligned}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$\frac{y^4 \lg 3y}{3 \lg 3y} = y^2 \lg 3y^2$$

$$\frac{y^4 \lg 81y^4}{3 \lg 3y} = y^2 \lg 9y^4$$

$$\frac{y^4 \lg 81y^4}{y^4 \lg 9y^4} = 3 \lg 3y$$

$$y^4 \lg 9 = 3 \lg 3y$$

$$9 \lg 9 = 3 \lg 3y$$

$$\frac{y^5}{x} \lg x = y^2 \lg xy$$

$$3^2 \lg y = 3 \lg 3y$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 3y \\ y(y-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= 3 \\ y &= 3 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

$$\frac{y^5}{9} \lg 9 = 3^2 \lg 27$$

$$3^3 \lg 3 = 3^2 \lg 27$$

$$3^3 \lg 3 = 3^3 \lg 3$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$$

25) $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$

1) $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$

$y-3-x+y-3+x=6$
 $2y=12$
 $y=6$

2) $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases}$

$y-3-x-y+3-x=6$
 $-2x=6$
 $x=-3$

3) $\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$

$-y+3+x+y-3+x=6$
 $2x=6$
 $x=3$

4) $\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases}$

$-y+3+x-y+3-x=6$
 $-2y=0$
 $y=0$

1) $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq -x+3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \end{cases}$

$a \geq 0$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (x-4)^2 + (y-3)^2 = a$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \quad (x-4)^2 + (y+3)^2 = a$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (x+4)^2 + (y-3)^2 = a$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \quad (x+4)^2 + (y+3)^2 = a$

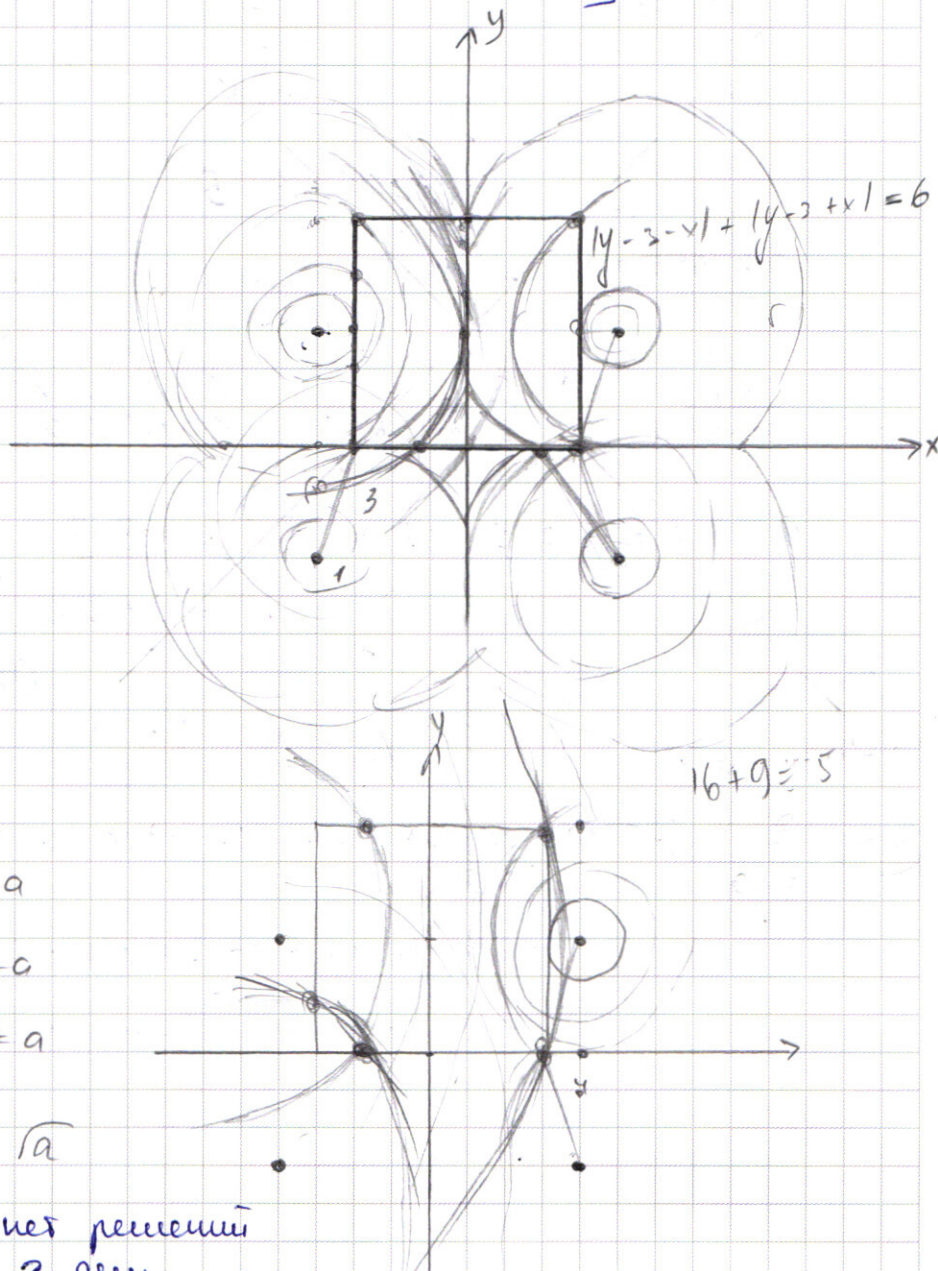
Вокругности радиуса $\sqrt{a}$

Если $a < 1$ нет решений

Если $a = 1$ 2 реш.

Если $1 < a \leq 10$ 4 реш.

$a > 10$ 6 реш.



$a = 1$

$a = 25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8$

3375 | 3
1125 | 3
375 | 3
125 | 5
25 | 5
5 | 5
1

Количество чисел - ?

$\begin{array}{r} 1125 \\ \times 3 \\ \hline 3375 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1125 \\ - 9 \\ \hline 375 \\ - 22 \\ \hline 15 \end{array}$

$900 + 210 + 15 = 1125$

25 + 5 = 30

= 1

$\begin{array}{r} 1125 \\ + 1125 \\ \hline 2250 \end{array}$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

333555.11
93555111

- два набора, из которых можно составить число.

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 + 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 70 \cdot 4 \cdot 4 = 70 \cdot 16 =$$

=

$$= \frac{1120}{560}$$

$$800 + 320 = 1120$$

$$\frac{76}{x \cdot 70} = \frac{1120}{1120}$$

$$70 \cdot 8 = 560$$

$$8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 10 \cdot 140 \cdot 8$$

~2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$x = 90^\circ$$

$$1 - 0 = \sqrt{2} \cdot \sin$$

$$\cos \alpha - \cos \beta =$$

$$= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 90^\circ - \cos 30^\circ = -2 \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin 60^\circ - \sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

$$1 - \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x =$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sin x - \cos x$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(60^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin 4x \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 14x$$

$$\sin 4x \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = -\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 14x$$

$$\sin 4x \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = -\sin$$

$$\sin 4x \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x - \sin x = -\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sqrt{2} \sin \left(11x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin \left(11x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \sin \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4} - 11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4} + 11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos 14x$$

$$\sin 4x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 14x\right)$$

$$-2 \sin x \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin x + \cos x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(30 + 60) = \sin 30 \cdot \cos 60 + \sin 60 \cdot \cos 30$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

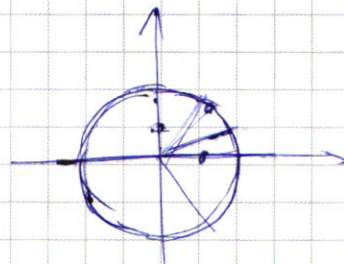
$$-2 \sin 4x \cdot$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(60 - 30) = \cos 60 \cdot \cos 30 + \sin 60 \cdot \sin 30$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\sin \alpha = \cos(90 - \alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 90 + 30$$

$$\sin 90 + \sin 30 =$$

$$= 2 \sin 60 \cdot \cos 30$$

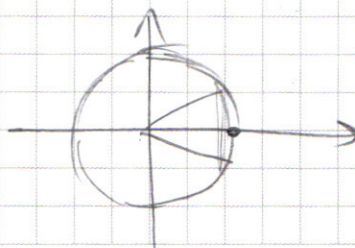
$$1 + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\sin 7x + \cos 7x = \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\cos 7x + \sin 7x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg xy} \cdot x^{\lg x}$$

$$(y^5)^{\lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg x^3 - \lg y^2} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = x^{\lg x}$$

$$\frac{x^{3 \lg y}}{y^{2 \lg y}} = x^{\lg x}$$

$$x^{3 \lg y - \lg x} = y^{2 \lg y}$$

$$x^{\lg y^3} = y^{2 \lg y}$$

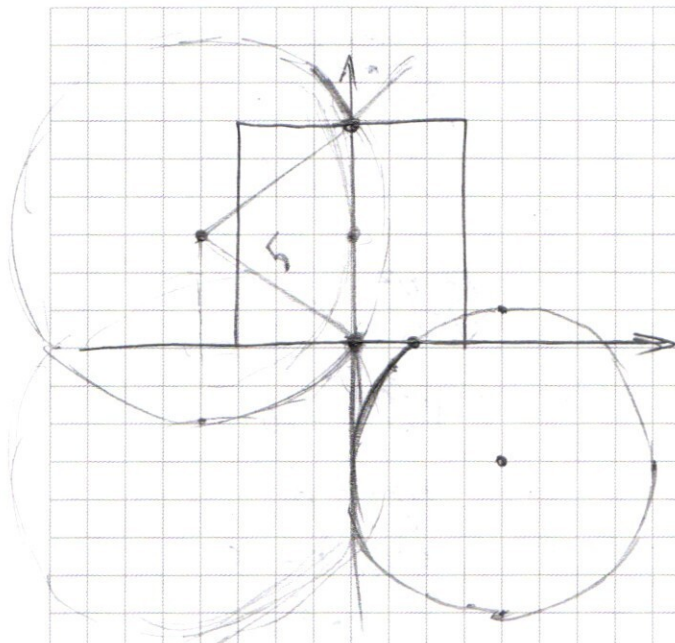
$$\log_{f(x)} g(x) = \log$$

$$\log_{f(x)} g(x) = \log$$

$$x^{\lg \frac{y^5}{x}} = y^{\lg x^2 y^2}$$

$$x^{\lg}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$a = 25$$

$$(\sqrt{x}-4)^2 + (\sqrt{y}-3)^2 = 25$$

$3 + 3 = 6$

$(0, 6)$

$$\int_{x=0}^x \int_{y=0}^y 1 \, dy \, dx = 0$$

$3 + 3 = 6$

6

③ $\int \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

~~Handwritten scribbles~~

$$(x-2)^2 - 2xy - 3y^2 + 12y - 4 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2xy - 4x - 2y^2 + 12y$$

$$(x-y)(x+y) - 2x(y+2x) -$$

$$x^2 - 3xy + xy - 3y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$x(x-3y) + y(x-3y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4)=0$$

$$x^2 - 3xy + xy - 3y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$(x+y)(x+3y-12)$$

$$x^2 + xy - 3xy - 3y^2 - 12x - 12y$$

$$(x + 3y)(x + y - 4)$$

$$x^2 - 3xy + xy - 3y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4)=0$$

$x = 3y$
 $x = -y + 4$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{1}{x^{\lg x}} = y^{5 \lg x - \lg x}$$

$$\frac{1}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x + 2 \lg y - 5 \lg x}$$

$$\frac{1}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg y - 3 \lg x}$$

$$\frac{1}{x^{\lg x}} = y^{\lg \frac{y^2}{x^3}}$$

$$x^{-\lg x} = y^{\lg \frac{y^2}{x^3}}$$

$$x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} =$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg xy} \cdot x^{\lg x}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{y^{2 \lg xy}} = x^{\lg x}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg xy} = x^{\lg x}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$\frac{y^{\lg \frac{x^3}{y^2}}}{y^{\lg x}} = x^{\lg x}$$

$$x^{\lg x} =$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = c$$

$$a^c = b$$

$$\log a + \log b = \log ab$$

$$\log a + \log b = \log ab$$

$$\lg \frac{y^2}{x^3}$$

$$x^{\lg x} = a$$

$$\lg x = b$$

$$\log_{10} x = b$$

$$10^b = x$$

$$(10^b)^b = a$$

$$10^{b^2} = a$$

$$10^{(\lg x)^2} = a$$

$$a^{\log_a c} = c^{\log_a a}$$

$$y^{\lg x^5 - \lg x^2 y^2} = y^{\lg \frac{x^5}{x^2 y^2}} = y^{\lg \frac{x^3}{y^2}}$$

$$-\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin x = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos 7x = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x - x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} - 4x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - 3x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

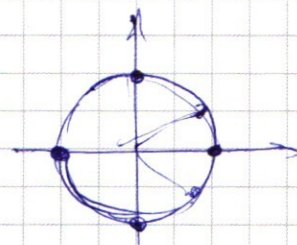
$$\frac{\pi}{8} - 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{8} - \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{24} - \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3\pi}{32} - \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x + \cos x$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sin x + \cos x$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(60 - 30) = \cos 60 \cdot \cos 30 + \sin 60 \cdot \sin 30$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 90 + \sin 30 = 2 \sin 60 \cdot \cos 30$$

$$1 + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)