



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1) $9261 = 3^3 \cdot 7^3$ - разложение на простые множители

9	2	6	1	3
3	0	8	7	3
1	0	2	9	3
3	4	3	7	
4	9	7		
7	7			
1				

нужно, чтобы пр-ие 8 цифр было 9261

1 вариант) 3 тройки, 3 семерки, 2 единицы

2 вариант) 1 тройка, 1 девятка, 3 семерки, 3 единицы

1 вариант) ставим 3 тройки: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$ вариантов

ставим 3 семерки (осталось 5 мест): $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ вариантов

места единицы определены $\Rightarrow$ 3 тройки, 3 семерки, 2 единицы можно
расставить $56 \cdot 10 = 560$ способами

2 вариант) ставим 3 семерки: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$ вариантов

ставим 3 единицы (осталось 3 места): $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ вариантов, 1 тройка и 1 девятка

на 2 места: 2 варианта $\Rightarrow$ 1 тройка, 1 девятка, 3 семерки, 3 единицы можно
расставить $56 \cdot 10 \cdot 2 = 1120$ вариантов

получается, что таких восьмизначных чисел $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680

Задача 2) выполним преобразования: $\cos 9x - \cos 5x = \cos(7x+2x) - \cos(7x-2x) =$

$$= (\cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x) - (\cos 7x \cos 2x + \sin 7x \sin 2x) = -2 \sin 2x \sin 7x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = \sin(7x+2x) + \sin(7x-2x) = (\sin 7x \cos 2x + \cos 7x \sin 2x) + (\sin 7x \cos 2x - \cos 7x \sin 2x) =$$

$$= 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\text{перенесем исходное ур-ие: } -2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) \quad \text{получаем:}$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = \cos 2x \\ \sin 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x \end{cases} \quad \textcircled{a}$$

$$\textcircled{a} \sin 2x = \cos 2x \quad | : \cos 2x \neq 0 \quad ; \quad \tan 2x = 1 \quad ; \quad 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad ; \quad \underline{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\textcircled{b} \sin 7x = \sin 2x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x + 2x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

совмещая $\textcircled{a}$ и $\textcircled{b}$ получаем:

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Задача 3)
$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad \textcircled{a}$$

условие:
$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{b} y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Rightarrow -y(-y+2x) - x(-y+2x) + 4(2x-y) = 0$$

$$(2x-y)(4-x-y) = 0 \Rightarrow \underline{y = 2x} \quad \text{или} \quad \underline{y = 4-x}$$

$$\textcircled{a} x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x} \quad | : y^{-4\ln x} \Rightarrow x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

логарифмируем: $\ln x^{-2\ln x} = \ln y^{\ln y - 3\ln x} \Rightarrow -2\ln x \cdot \ln x = (\ln y - 3\ln x) \ln y$

$$-2\ln^2 x = \ln^2 y - 3\ln x \cdot \ln y \Rightarrow \underline{2\ln^2 x + \ln^2 y - 3\ln x \cdot \ln y = 0}$$

~~пусть $y = 2x$, представим в $\textcircled{b}$: $2\ln^2 x + \ln^2(2x)$~~

пусть $\ln x = b, \ln y = a$; тогда $2b^2 + a^2 - 3ba = 0 \Rightarrow \underline{a^2 - 3ba + 2b^2 = 0}$

т. Введём:
$$\begin{cases} a_1, a_2 = 2b^2 \\ a_1 + a_2 = 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln y = \ln x \\ \ln y = 2\ln x \end{cases} \quad \textcircled{b}$$

представим $y = 2x$ в $\textcircled{b}$:
$$\begin{cases} \ln 2x = \ln x \\ \ln 2x = \ln x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x \\ 2x = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

 $\nearrow y = 2 \cdot 0 = 0$
 не есть (0;0) условие ~~не~~
 $\searrow y = 2 \cdot 2 = 4$ (2;4)

представим $y = 4-x$ в $\textcircled{b}$:
$$\begin{cases} \ln(4-x) = \ln x \\ \ln(4-x) = \ln x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-x = x \\ 4-x = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 2 \rightarrow y = 4 - 2 = 2 \quad \underline{(2;2)} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \rightarrow \text{если } x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \text{ то он не есть } y \in \mathbb{R}$

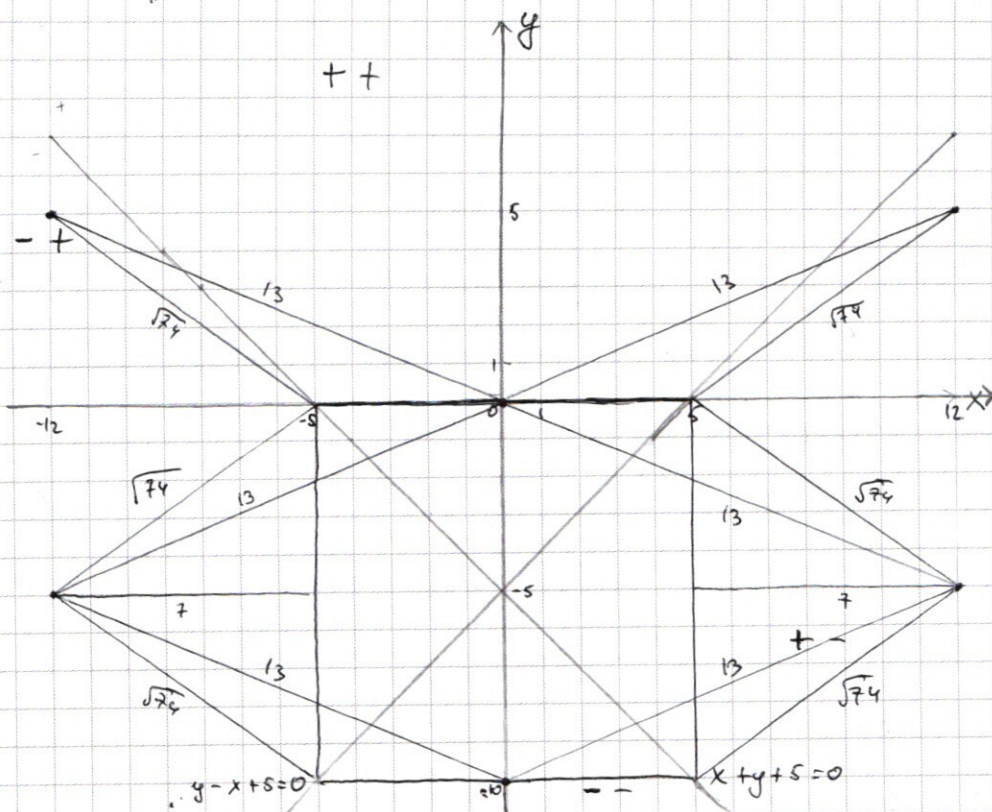
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

если $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, то $y = 4 - \frac{-1+\sqrt{17}}{2} = \frac{8+1-\sqrt{17}}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$ $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

Ответ: $(2; 4)$, $(2; 2)$, $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

Задача 5) $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (a) \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a & (b) \end{cases}$

8) Рассмотрим случаи, если $x > 0, y > 0$: $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ - окр-ть с центром $(12; 5)$, $R = \sqrt{a}$; если $x > 0, y < 0$: $(x-12)^2 + (y+5)^2 = a$ - окр-ть с центром $(12; -5)$, $R = \sqrt{a}$; если $x < 0, y > 0$: $(x+12)^2 + (y-5)^2 = a$ - окр-ть с центром $(-12; 5)$, $R = \sqrt{a}$; если $x < 0, y < 0$: $(x+12)^2 + (y+5)^2 = a$ - окр-ть с центром $(-12; -5)$, $R = \sqrt{a}$



а) раскроем модули на картинке, изобразив прямые $x+y+5=0$ и $y-x+5=0$ поставив знаки в 4х зонах, на которые делится плоскость этими прямыми
 $++$: $x+y+5+y-x+5=10 \Rightarrow y=0$ - прямая; $--$: $x+y+5-y-x-5=10 \Rightarrow x=5$ - прямая
 $++$: $x+y+5+y-x+5=10 \Rightarrow y=0$ - прямая; $--$: $x+y+5-y-x-5=10 \Rightarrow x=5$ - прямая

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x=4: \begin{cases} y \geq 2^7 + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1) \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2^7 + 2^{33} \cdot 6 \\ y < 62 + 2^{33} \cdot 8 \end{cases} \quad \text{при этом } x \text{ подходит}$$

$62 + 8 \cdot 2^{33} - 2^7 - 6 \cdot 2^{33} = 2^{33} - 2^7 + 62$
целое значение y

$$x=8: \begin{cases} y \geq 2^8 + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1) \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2^8 + 6 \cdot 2^{33} \\ y < 60 + 8 \cdot 2^{33} \end{cases} \quad \text{подходит } 2 \cdot 2^{33} - 2^8 + 60$$

$$x=9: \begin{cases} y \geq 2^9 + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1) \cdot 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2^9 + 6 \cdot 2^{33} \\ y < 58 + 9 \cdot 2^{33} \end{cases} \quad \text{подходит } 3 \cdot 2^{33} - 2^9 + 58$$

...

$$x=37: \begin{cases} y \geq 2^{37} + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1) \cdot 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2^{37} + 6 \cdot 2^{33} \\ y < 2 + 37 \cdot 2^{33} \end{cases} \quad \text{подходит } 31 \cdot 2^{33} - 2^{37} + 2$$

нужно сложить кол-во подходящих значений y , тогда получим кол-во пар целых чисел (x, y) , ур-к е-ие пер-в

$$(2^{33} - 2^7 + 62) + (2 \cdot 2^{33} - 2^8 + 60) + \dots + (31 \cdot 2^{33} - 2^{37} + 2) =$$

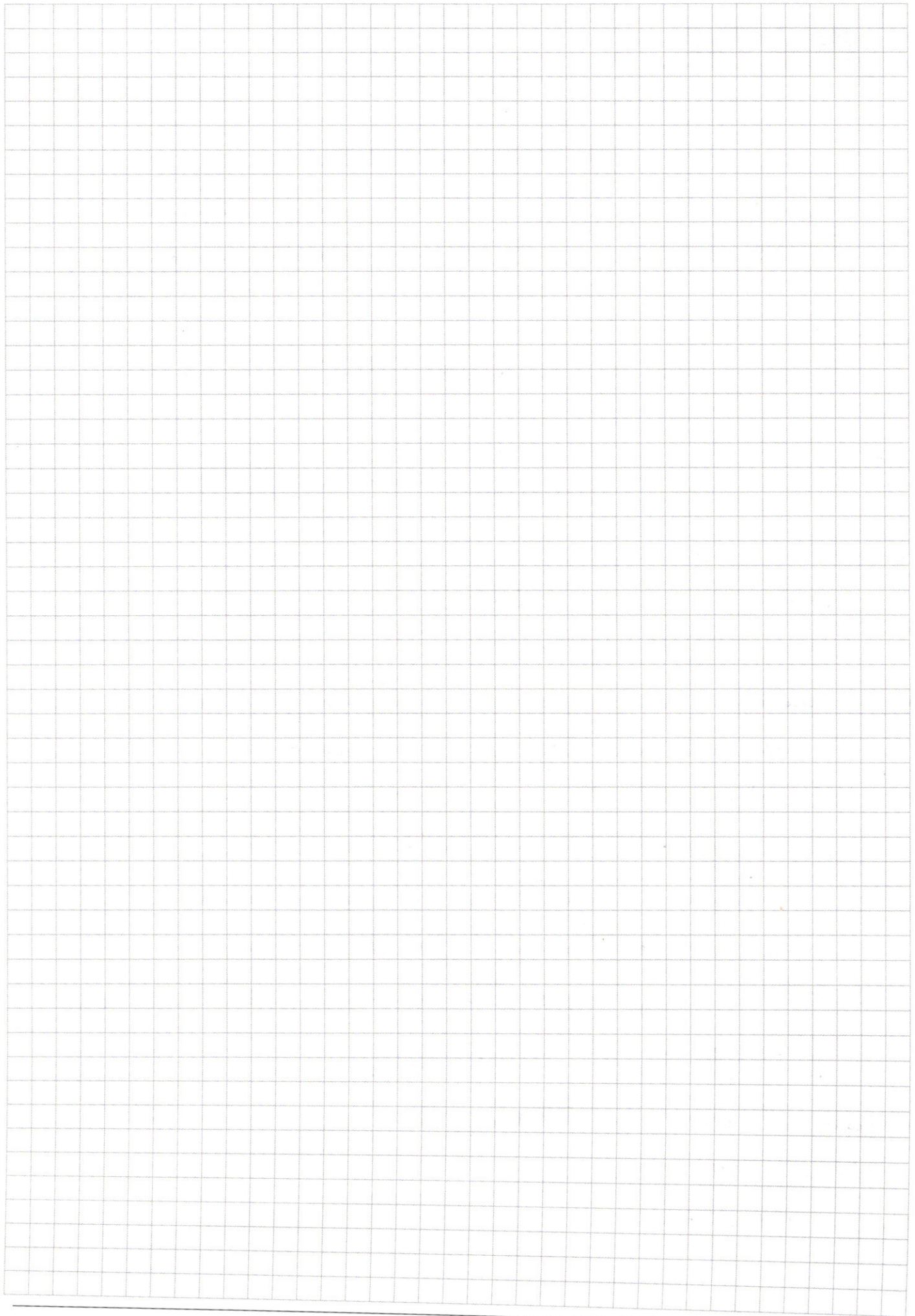
$$= \underbrace{2^{33}(1+2+\dots+31)}_{\text{арифм. прогрессия}} - \underbrace{(2^7+2^8+\dots+2^{37})}_{\text{геом. прогрессия}} + \underbrace{(62+60+\dots+2)}_{\text{арифм. прогрессия}}$$

$a_1=1, a_n=31, n=31$ $S = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n =$ $= \frac{1+31}{2} \cdot 31 = 16 \cdot 31 = 496$	$b_1=2^7, q=2, n=31$ $S = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{2^7(2^{31}-1)}{2-1} =$ $= 2^{38} - 2^7 = 2^{38} - 128$	$a_1=62, a_n=2, n=31$ $S = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{62+2}{2} \cdot 31 = 32 \cdot 31 =$ $= 992$
---	---	---

получаем $2^{33} \cdot 496 - (2^{38} - 128) + 992 = 496 \cdot 2^{33} - 32 \cdot 2^{33} + 128 + 992 =$

$$= 464 \cdot 2^{33} + 1120$$

Ответ: $464 \cdot 2^{33} + 1120$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 1) \ 9261 \mid 3 \\ 3087 \mid 3 \\ 1029 \mid 3 \\ 343 \mid 7 \\ 49 \mid 7 \\ 7 \mid 7 \\ 1 \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

1) 3 тройки, 3 семерки

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 2}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 1}{2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4}{2!} = 560$$

$$\frac{8 \cdot 7}{2!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4^2}{8} =$$

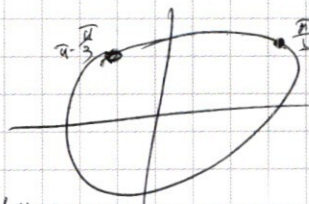
$$2) \cos 9x - \cos 5x = \cos(7x + 2x) - \cos(7x - 2x) = \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x -$$

$$-(\cos 7x \cos 2x + \sin 7x \sin 2x) = -2 \sin 2x \sin 7x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = \cos 2x - \sin 2x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0, \sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x$$



$$3) \ (xy)^{-2 \ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x} \Rightarrow x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x} \mid y^{-4 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - 3 \ln x}$$

$$\ln x^{-2 \ln x} = \ln y^{\ln y - 3 \ln x}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - x(2x - y) - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$4(2x - y) - x(2x - y) - 2xy + y^2 = 0$$

$$(2x - y)(4 - x - y) = 0$$

$$\ln x \cdot (-2 \ln x) = \ln y (\ln y - 3 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$a = 2b$$

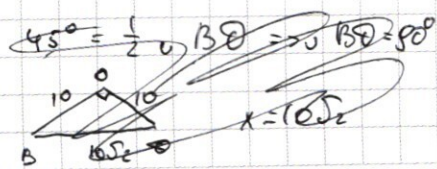
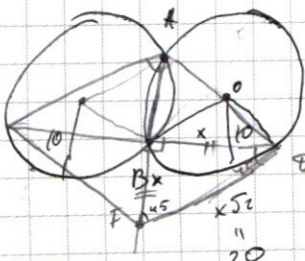
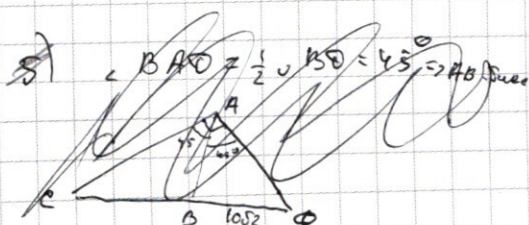
$$a = b$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times 27 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \in [8; 9]$$

$$\angle F = ? \Rightarrow \angle B = ?$$



$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$76 + 2^{33}x - 2x \geq 2^x + 16 \cdot 2^{33}$$

$$x=1: 74 + 2^{33} > 2 + 12 \cdot 2^{32}$$

$$x=2: 72 + 2^{34} > 4 + 3 \cdot 2^{33}$$

$$x=3: 70 + 2^{35} > 8 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$x=4: 68 + 2^{36} > 16 + 3 \cdot 2^{35}$$

$$x=12: 76 + 12 \cdot 2^{32} - 24 > 2^{12}$$

$$x=13:$$

$$76 + 13 \cdot 2^{32} > 2^{13} + 12 \cdot 2^{32}$$

$$2^{34}(4-3) > \dots \quad 76 + 2^{32} > 2^{13}$$

$$x=31:$$

$$76 + 31 \cdot 2^{32} - 62 > 2^{31} + 12 \cdot 2^{32}$$

$$14 + 19 \cdot 2^{32} > 2^{31}$$

$$x=32: 76 + 32 \cdot 2^{32} - 64 > 2^{32} + 12 \cdot 2^{32}$$

$$x=36: 76 - 72 + 36 \cdot 2^{32} > 2^{36} + 12 \cdot 2^{32} \Rightarrow 4 + 36 \cdot 2^{32} > 28 \cdot 2^{32} \quad \checkmark$$

$$x=37: 76 - 74 + 37 \cdot 2^{32} > 2^{37} + 12 \cdot 2^{32} \Rightarrow 2 + 37 \cdot 2^{32} > 44 \cdot 2^{32} \quad \times$$

$\checkmark x \in [13; 36]$ 24 числа

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$x=13: \begin{cases} y \geq 2^{13} + 3 \cdot 2^{34} = 2^{13} + 6 \cdot 2^{33} \\ y < 76 + 26(2^{32} - 1) = 50 + 13 \cdot 2^{33} \end{cases}$$

$$50 + 13 \cdot 2^{33} - 2^{13} - 6 \cdot 2^{33} = 7 \cdot 2^{33} + 50 - 2^{13}$$

$$x=14: \begin{cases} y \geq 2^{14} + 3 \cdot 2^{34} = 2^{14} + 6 \cdot 2^{33} \\ y < 76 + 28(2^{32} - 1) = 48 + 14 \cdot 2^{33} \end{cases}$$

$$8 \cdot 2^{33} + 48 - 2^{14}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ x16 \\ \hline 186 \\ 31 \\ \hline 496 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \wedge 31 \\ \hline 32 \\ 86 \\ \hline 892 \end{array}$$

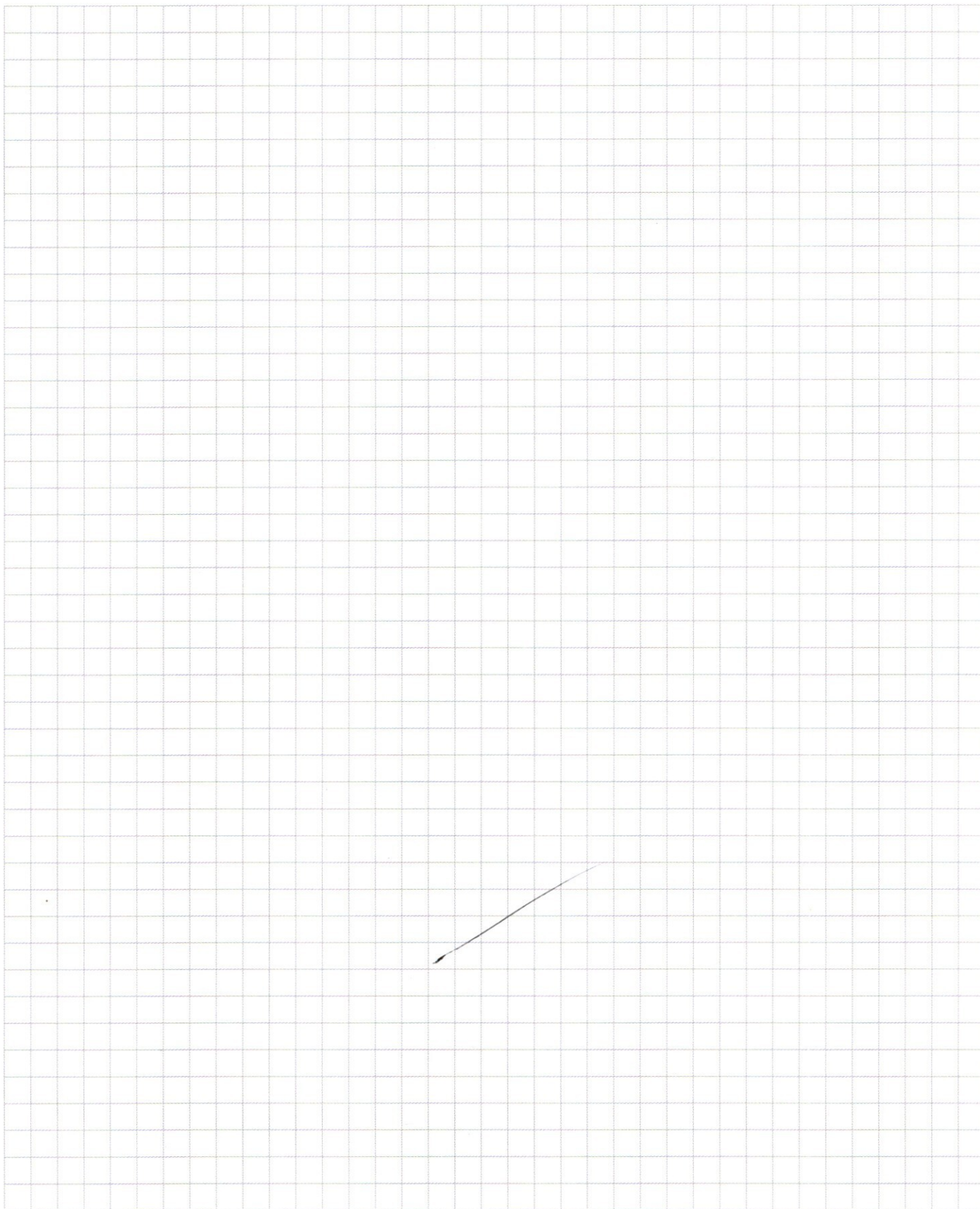
$$x=15: \begin{cases} y \geq 2^{15} + 3 \cdot 2^{34} = 2^{15} + 6 \cdot 2^{33} \\ y < 76 + 30(2^{32} - 1) \end{cases}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

