МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. восьмизначные числа, пр-ие цифр которых $= 3375$

Для начала разложим на множители число 3375

$3375 : 25 = 135$

$3375 = 25\cdot 135 = 25\cdot 5\cdot 27 = 5^3\cdot 3^3$, т.к. ~~5 8~~ $5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot1\cdot1$

мы выбираем цифры => кажд. цифр ≤ 9 => $\left(\begin{array}{l}5^2 = 25 > 9 \text{ — нельзя} \\ 3^3 = 27 > 9\end{array}\right)$

мы можем составить число из: трех пятерок, (обязательно)

3трех троек или 1 тройки и девятки, остальное — единицы.

тогда для 1-й случа (три пятерки, три тройки и две единицы)

число вар-ов: $\cancel{\frac{8!}{3!\cdot 3!}}$ (с повтор) ---------- $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}$

---- (число расстановок с повтором) $= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 560$

или еще другой способ:

на восьми позициях мы можем расставить сначала едены.

это $C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$ способов. при каждой расс едены у нас остается 6 поз: 3 для пятерок, 3 для троек, и это способы расстано: $C_3^6 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$

тогда всего сп: $C_8^2\cdot C_3^6 = 28\cdot 20 = 560$ способов

Второй случай: три пятерки, одна девятка, одна тройка, три едени

тогда $P = \underbrace{\frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 3!}}_{\text{— делим за повторения}} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7\cdot 20 = 560\cdot 2 = 1120$ сп

или опять же: расставим едены: $C_8^3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$ способов

далее остается 5 позиций, из них три пята: $C_5^3 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ спо

и ост 1 тр и 1 дев: 2 сп

=> всего $10\cdot 2\cdot 56 = 1120$ сп

тогда всего у нас $1120 + 560 = 1680$ сп

Ответ: 1680 способов

2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

Вспомним формулу:

$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$ $\qquad$ $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$

тогда

$\cos 11x - \cos 3x = 2 \sin 7x \cdot \sin 4x$ $\qquad$ $\cancel{\sin x - \sin y = 2}$

$\sin 3x - \sin 11x = 2 \cdot \sin \frac{-8x}{2} \cdot \cos \frac{14x}{2}$

подст

$2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x \quad \Big| : 2$

$\sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x = \cancel{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 14x}$

$\sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$\sin 4x \cancel{(\sin 7x - \cos 7x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{(\cos 7x - \sin 7x)} (\cos 7x + \sin 7x)$

$\underbrace{\text{I-е решение: } \sin 7x = \cos 7x}$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x + \sin 7x)$$

$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x$; $\quad \sin 4x = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 7x$

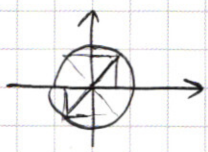
$\underbrace{\sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)}$ – II-е реш

Мы получили ~~систему~~ реш

$$\left[\begin{array}{ll} \sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) & (1) \\ \sin 7x = \cos 7x & (2) \end{array}\right.$$

из (1) $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{4} + 7x + 2\pi k \ (k \in Z) \\ 4x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + 2\pi n \ (n \in Z) \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k & k \in Z \\ x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n & n \in Z \end{array}\right.$

из (2) $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi p \quad p \in Z \\ 7x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi q \quad q \in Z \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{28} + 2\pi p & p \in Z \\ x = -\frac{3\pi}{28} + 2\pi q & q \in Z \end{array}\right.$



Ответ: $\left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k & k \in Z \\ x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} & n \in Z \\ x = \frac{\pi}{28} + 2\pi p & p \in Z \\ x = -\frac{3\pi}{28} + 2\pi q & q \in Z \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3
$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1):

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$$

Проведем замену:

Пусть $\lg x = a$, тогда $x = 10^a$, ~~тогда~~ $\lg y = b$, тогда $10^b = y$, $\lg xy = \lg x + \lg y$

тогда: $\left(\frac{(10^b)^5}{10^a}\right)^a = (10^b)^{2(a+b)} \Rightarrow 10^{(5b-a)a} = 10^{2b(a+b)}$

$\Rightarrow 5ab - a^2 = 2ab + 2b^2$ $\quad a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$; $(a-2b)(a-b) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \Rightarrow \lg x = 2\lg y \Rightarrow x = y^2 \\ a = b \Rightarrow \lg x = \lg y \Rightarrow x = y \end{array}\right.$$

Не забудем про ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$

Теперь ~~под~~ рассмотр (2):

$(x^2 - 4x) - (3y^2 - 12y) = 2xy$ $\quad (x^2 - 4x) - 3(y^2 - 4y) = 2xy$

~~$(x^2 - 4x) + (x^2 + 2xy + y^2) - x^2 - 4y^2 + 12y = 0$~~ $\quad (x-2)^2 - 4 - 3(y-2)^2 + 12 = 2xy$

~~$(x-2)^2 + (x-y)^2 = x^2 + 2y -$~~ $\quad (x-2)^2 - 3(y-2)^2 = 2xy - 8$

Подставим результат (1) во (2):

1) $x = y^2$

$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$

$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$

$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$

$y_1 = 0$ - посторонний корень (ОДЗ)

подход корень $y = 3$:

$y(y-3)(y^2 + y - 4) = 0$

3е реш

2) $x = y$

$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$

$-4y^2 + 8y = 0$

$4y(2-y) = 0$

$y_1 = 0$ - посторонний (по ОДЗ) $\quad y_2 = 2$ подход.

I-е решен: $x = 2$, $y = 2$

II-е реш: $y = 3$, $x = 9$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$y(y-3)(y^2+y-4)=0$ решаем ур-ие $y^2+y-4=0$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$y_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ - посторон. $y_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ - подход.

$\Rightarrow$ мы нашли три решения:

$(x_1=2;\ y_1=2)$ $(x_2=9;\ y_2=3)$ $\left(x_3=\frac{18-2\sqrt{17}}{4}\ \ y_3=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

Проверяем: $\left(\frac{2^5}{2}\right)^{\lg 2}=2^{2\lg 4}$ $2^{4\lg 2}=2^{4\lg 2}$ ✓✓ (1)

(2): $4-\overset{16}{8}-\overset{28}{8}-12+24=28-28=0$ ✓ $\Rightarrow$ первое решение удовлетворяет.

$x=9$ $y=3$: $\left(\frac{3^5}{9}\right)^{\lg 9}=3^{2\lg 27}$ $3^{3\lg 9}=3^{2\lg 27}$ $3^{6\lg 3}=3^{6\lg 3}$ ✓✓

$81-54-36-27+36=0$ ✓✓ $\Rightarrow$ второе решен удовлетворяет

3) $x=\frac{18-2\sqrt{17}}{4}$ $y=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ $\frac{18-2\sqrt{17}}{4}=\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow$ (1): $\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^5}{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2}\right)^{\lg\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2}=\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^{2\lg\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^3}$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^{6\lg\frac{\sqrt{17}-1}{2}}=\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^{6\lg\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ ✓✓

(2) $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^4-2\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^3-7\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2+12\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)=0$

$\frac{\sqrt{17}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}-3\right)\underbrace{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}-\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}_{=0}\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}-\frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right)=0 \Rightarrow$ ✓✓✓

$\Rightarrow$ Ответ: $(2;2)$ $(9;3)$ $\left(\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2;\ \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \quad (1) \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \quad (2) \end{cases} \qquad N_x(a)=2 \qquad a-?$$

Из ур-ий видно, что Ур-ие (2) представляет собой 4 окружн (или их фрагменты) с центром в точ $(3;4)$ $(-3;4)$ $(3;-4)$ $(-3;-4)$ и с радиусом $\sqrt{a}$. т.е. графи (2) подвиж. теперь рассм (1) раскроем модули и построим его. (~~неотрицательно~~ квадрат +) т.к. a - сумма квадрат $\Rightarrow$ $a \geq 0$ - ОДЗ

$|y-3-x|+|y-3+x|=6$

$\begin{cases} y-3-x>0 \\ y-3+x>0 \end{cases}$

$y-3+y-3\cancel{-x}\cancel{+x}=6$

$2y=12$

$y=6$ - прямая, $\parallel$ оси OX

~~одну мыл при $x>0$ и $-x>0$~~

~~$\Rightarrow$ невозможно $\Rightarrow$ нет такого~~

$y=6$ при $\begin{cases} y-3-x>0 \\ y-3+x>0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3>x \\ 3>-x \end{cases} \Rightarrow |x|<3$

$x\in(-3;3)$ $y=6$

$|y-3-x|+|y-3+x|=6$

$\begin{cases} y-3-x<0 \\ y-3+x<0 \end{cases}$

$-y+3\cancel{+x}-y+3\cancel{-x}=6$

$-2y=0$

$y=0$

$\begin{cases} -3-x<0 \\ -3+x<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>-3 \\ x<3 \end{cases}$

$x\in(-3;3)$
$y=0$

$|y-3-x|+|y-3+x|=6$

$\begin{cases} y-3-x<0 \\ y-3+x>0 \end{cases}$

$\cancel{-y}+3+x\cancel{+y}-3+x=6$

$x=3$

$\begin{cases} y-3-3<0 \\ y-3+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} y<6 \\ y>0 \end{cases}$

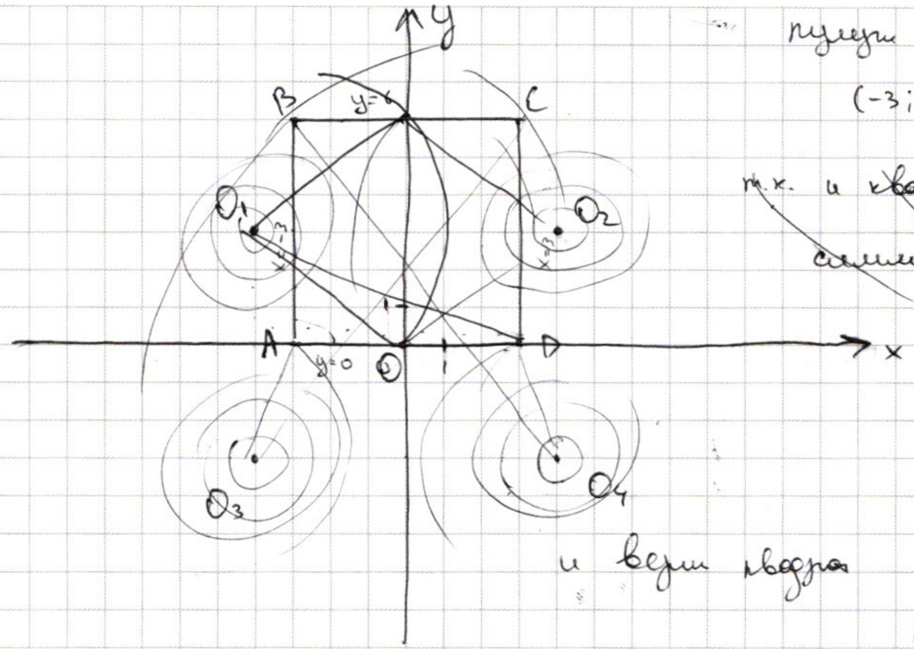
$|y-3-x|+|y-3+x|=6$

$\begin{cases} y-3-x>0 \\ y-3+x<0 \end{cases}$

$\cancel{y}\cancel{-3}-x\cancel{-y}\cancel{+3}-x=6$

$x=-3$ $\begin{cases} y>0 \\ y<6 \end{cases}$

Построим $\longrightarrow$



пусть квадрат с верш в точках $(-3;6)$ $(3;6)$ $(-3;0)$ $(3;0)$

~~т.к. и квадрат и центры окруж симметричны~~

обозначим центр окру $O_1(-4;3)$ $O_3(-4;-3)$

$O_2(4;3)$ $O_4(4;-3)$

и верш квадрата $A(-3;0)$ $B(-3;6)$

$C(3;6)$ $D(3;0$

если окр с центром O_1 касается стороны AB, то и окр с цент O_2 так же касается сторон CD (т.к. ~~O_1 и O~~ центры симметр относ. OY, сторон квадрата тоже) $\Rightarrow$ первое решение – когда касаются, когда

$R = \rho(O_1; AB) = 1 \Rightarrow R^2 = 1^2 = a \Rightarrow a = 1$

$\rho(O_1; AB)$ ~~$\neq$ по формуле $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$~~ $= |x_{AB} - x_{O_1}| = |-3-(-4)| = 1$

Если же радиус будет меньше, то решений не будет совсем.

тогда из ОДЗ: $a \geq 0$; при $a \in (0;1)$ – нет решений, при $a = 1$ – 2 решения

~~при $a > 1$ окр с центром O_1 пересекает сторону AB в двух точках, но и окр с цен в т. O_2 так же пересекает в двух точ $\Rightarrow$ 4 реше – не подход. Но так будет не всегда. Найдем a, при котор O_1 и O_2 не будут касаться граф (1). Это будет в крайнем случае, при котором $R > |O_1D|$, т.к. D и C – самые дальние точки от цент O_1. Найдем ее: $O_1D = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$. при $R = \sqrt{58}$ окру с цент O_1 и O_2 касаются граф в 4х точках (A и B – кас окр с ц O_2, C и D – с ц. O_1) при радиусе $R > \sqrt{58}$ O_1 и перв 2 окр не будут каса граф, зато нижние окр будут пересекать его, причем в 4х точках. так будет вплоть до единств случая когда верш. из $R = |O_4B|$, т.к. B дальше всех от O_4 $\Rightarrow$ решений будет 2~~

$\Rightarrow R = |O_4B| = \sqrt{(4+3)^2+(3+6)^2} = \sqrt{49+81} = \sqrt{130} \Rightarrow a = 130$ ~~– 2 решения.~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продол) мы нашли первое реш: $a = 1$.

т.к. окр. с центром O_3 и окр с центром O_4 существуют лишь при $y < 0$, а квадрат $ABCD$ только при $y > 0$ => окр с центром O_3 и O_4 никогда не пересекут квадрат $ABCD$.

Рассм нали других решений. Если радиус $R < 1$, то окр O_1 с цент в точ O_1 не пересечет AB, но и O_2 тоже => решений нет.

если $R > 1$ но $R < O_1C$, то решений 4 (окр с центр O_1 будет пересекать квадрат $ABCD$ в двух точк, но и O_2 тож не пересекает в двух точк) Ед. искл нас в этом диапаз реш — при котором эти точки пересеч окр с ц O_1 и O_2 совпадают. т.к. $ABCD$ симм отн OY => данное реш лежит на OY, тогда это точ $(0;6)$ и $(0;0)$ — это реш возмож при $R = O_1O = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ => $a = R^2 = 25$

при других R решений будет либо 4, либо 0 (если $R > O_1C$)

тогда ответ: $a = 1$ и $a = 25$

~~Решение:~~

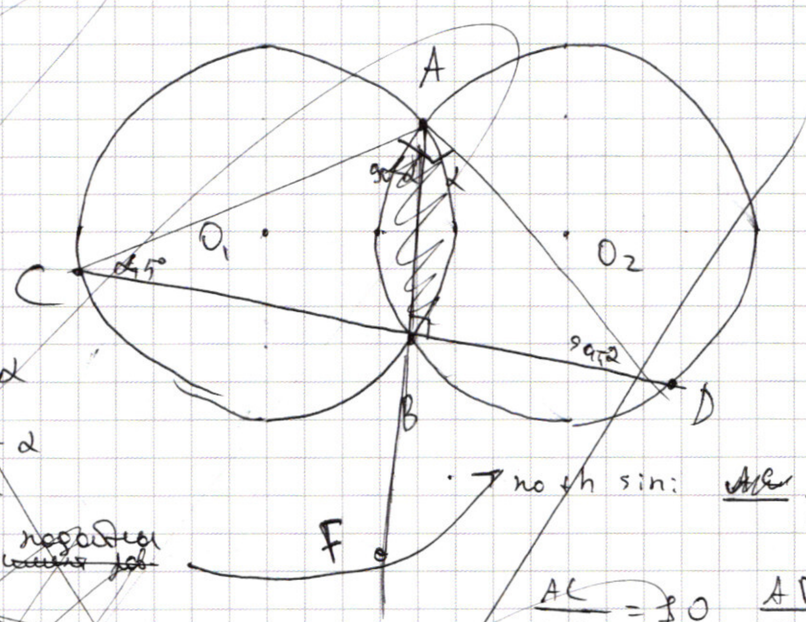
ω_1 и ω_2

$O_1 (R=5)$ $O_2 (R=5)$

$\angle CAD = 90^\circ$

$AB \perp CD$

~~$CB = BD$~~



1) обозначим $\angle ACD = \alpha$

тогда $\angle CAB = 90 - \alpha$

$\angle BAD = \alpha$

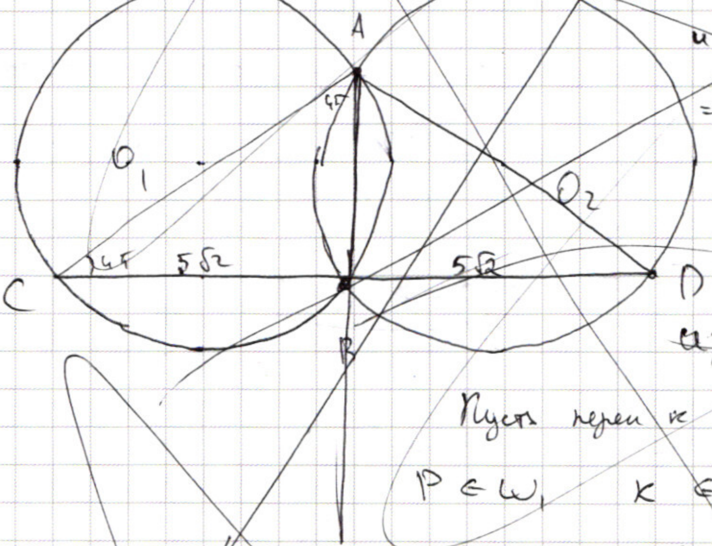
$\Rightarrow \triangle CAB$ и ADB подобны

по т. sin: $\frac{AB}{\sin\alpha} = 10$

$\frac{AC}{\sin 90} = 10$ $\frac{AD}{\sin 90} = 10$

$\Rightarrow AC = AD \Rightarrow \triangle ACD$ - р/б $\Rightarrow \angle C = \angle D = 45^\circ$

$CB = BD$ - перерисуем



т.к. $\triangle ABC$ - пр-й ($\angle B = 90^\circ$)

и т. A, B, C - лежат на окр-и

$\Rightarrow \angle AO_1C = 180^\circ$ (центр)

$\Rightarrow AC = 2R = 10$

$\Rightarrow AB = 5\sqrt{2} = CB = BD$

Извините, условие не дочитал

Пусть перп к CD - это PB,

$P \in \omega_1$ $K \in PB$ $K = PB \cap \omega_2$

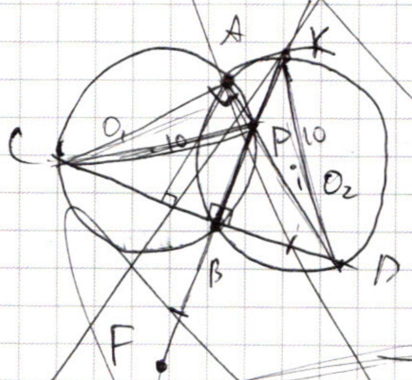
$DD = 2R = 10$ (т.к. $\triangle KBD$ - прямоуг. вписан в ω_2)

анолог $CP = 10$

$PK \cdot PB = AP \cdot PD$ (хорды)

$(KP + BP)^2 + (BD)^2 = 100$

$PB^2 + CB^2 = 100$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

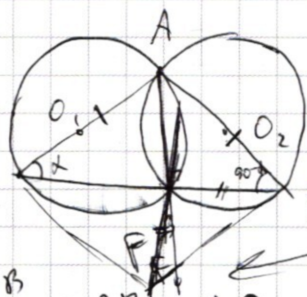
№6 ω_1 и ω_2

O_1 и O_2

$\angle CAD = 90°$

$CB = 6$

$\angle CAD = 90°$ => пусть $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle ADC = 90 - \alpha$, тогда по th sin.



$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R_1 = 10$ но и $\frac{AB}{\sin 90-\alpha} = 2R_2 = 10$

=> $\sin\alpha = \sin(90-\alpha)$ => $\alpha = 45°$ => $\triangle ACD$ − р/б

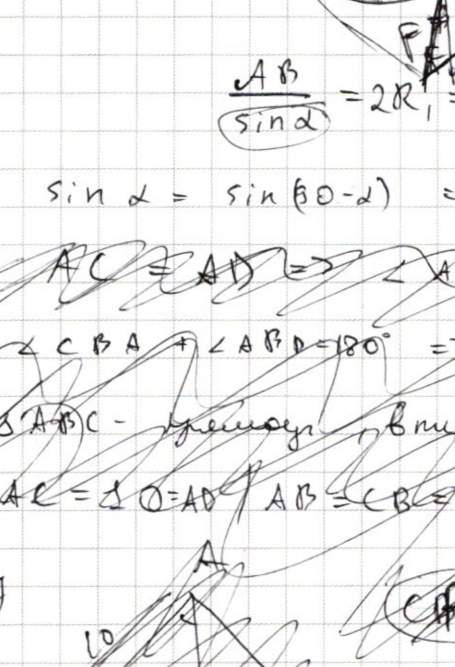
~~=> $AC = AD$ => $\angle ABC = \angle ABD$ (т.к. равные хорды)~~

~~но $\angle CBA + \angle ABD = 180°$ => $AB \perp CD$~~

~~=> $\triangle ABC$ − прямоуг. впис. в ω_1 => AC − диаметр~~

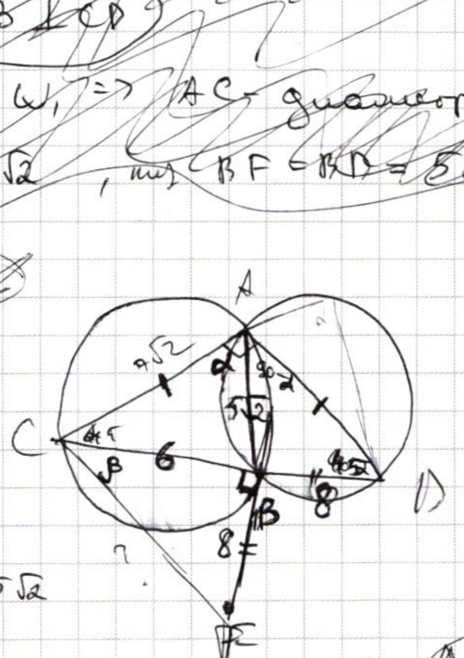
~~=> $AC = 10 = AD$, $AB = CB = BD = 5\sqrt{2}$, тогда $BF = BD = 5\sqrt{2}$~~

~~тогда $CF = 10$~~



по th sin

$AB = 10 \cdot \sin\alpha = 5\sqrt{2}$



$BD = BF$ (по условию)

р/б $AC = AD$

пусть $\angle CAB = \alpha$ тогда по th cos:
$$\begin{cases} CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\alpha \\ BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

=> $CB^2 - BD^2 = -2(AC \cdot AB)(\cos\alpha - \sin\alpha)$ по th sin $\sin\alpha = \frac{CB}{10} = 0{,}6$ th sin

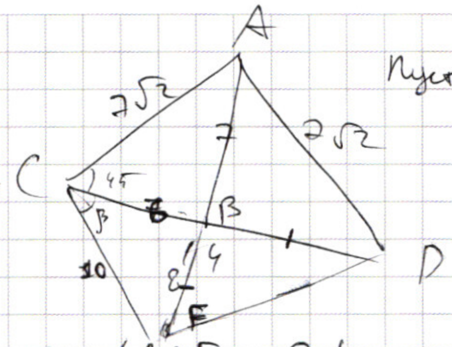
=> $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 0{,}8$ => $BD = 2R \cdot \underbrace{\sin(90-\alpha)}_{=\cos(\alpha)} = 8$ th sin $= 0{,}8 \cdot 2 \cdot 5 = 8$

=> $CF = \sqrt{64 + 36} = 10$ по th Пифаг. Ответ: 10

б) $CD = 14 \qquad AC = AD$

(т.к. $\triangle ACD$ – р/б + $\angle$ по $45°$)

$\Rightarrow AC = AD = 7\sqrt{2}$



Пусть $\angle BCF = \beta$

$AC = CD \cdot \sin 45 = 14 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$

т.к. ~~6 и 8~~ $CB = 6 \quad BF = 8$

$\Rightarrow$ ~~si~~ $\sin\angle BCF = 0{,}8 \qquad \cos\angle BCF = 0{,}6$

$\Rightarrow \sin ACF = \sin(45 + \angle BCF) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}8 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1{,}4$

$= 0{,}7 \cdot \sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{ACF} = AC \cdot AF \cdot \sin\angle ACF \cdot \frac{1}{2} = 7\cancel{\sqrt{2}} \cdot 10 \cdot 0{,}7\cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} =$

$= 49$

Ответ: 49

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} & (1) \\ y \leq 70 + (2^{64}-1)x & (2) \end{cases}$$

приведем к более прямому виду:

$y \leq 70 + (2^{64}-1)x$

$y \leq (70-x) + x\cdot 2^{64}$

(1): $y > 2^x + 3\cdot 2^{65}$

$y > 2^x + 6\cdot 2^{64}$

получаем:

$$\begin{cases} y > 2^x + 6\cdot 2^{64} \\ y \leq (70-x) + x\cdot 2^{64} \end{cases}$$

т.к. $2^x + 6 2^{64} > 0 \Rightarrow y > 0$

$\Rightarrow$ равно: $2^x + 6\cdot 2^{64} < (70-x) + x\cdot 2^{64} \quad |:2^{64}$

~~$2^x + x - 70 < (x-6)\cdot 2^{64}$~~

$$2^{x-64} + 6 < \frac{70-x}{2^{64}} + x$$

$$x - 2^{x-64} > 6 - \frac{70-x}{2^{64}}$$

$$x - 6 > 2^{x-64} - \frac{70-x}{2^{64}}$$

$$x - 6 > \frac{2^x - 70 + x}{2^{64}}$$

при $x = 6$ решений нет

т.к. $\begin{cases} y > 64 + 6\cdot 2^{64} \\ y \leq 64 + 6\cdot 2^{64} \end{cases}$

не выполнение

при больших x

$$\begin{cases} y > 2^x + 6\cdot 2^{64} \\ y \leq (70-x) + 6\cdot 2^{64} + (x-6)\, 2^{64} \end{cases}$$

$\Rightarrow (x-6)\cdot 2^{64} + (70-x) > 2^x \Rightarrow x \in [7; 70)$

$x = 70$: $64\cdot 2^{64} > 2^{70}$

$2^{70} > 2^{70}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$y > 2^x + 6\cdot 2^{64}$

$y \le (70-x) + 6\cdot 2^{64} + (x-6)\cdot 2^{64}$

тогда

$(70-x) + \cancel{6\cdot 2^{64}} + (x-6)\cdot 2^{64} > 2^x + \cancel{6\cdot 2^{64}}$

при $x<0$ дан нер-во невозм, т.к. $70 + (2^{64}-1)x < 0$

но $y>0$ и $y<\dots$

$\Rightarrow$ рассм $x\,(0;6)$:

$(70-x) + (x-6)\cdot 2^{64} - 2^x > 0$ ~~(подставим по очереди)~~

т.к. $x<6 \Rightarrow x-6<0$

$\Rightarrow$ подходит. при $x=6$ $\Rightarrow$ выр $<0 \Rightarrow$ не подход.

$70-6 + 0\cdot 2^{64} > 2^6$

$64 > 64$ − нет решен при $x=6$

далее, но при $x\in(6;70)$ − решения есть, т.к.

$(x-6)\cdot 2^{64} \nearrow$. $x=69$:

$63\cdot 2^{64} + 1 > 2^{69}$

$2^{69} + 31\cdot 2^{64} + 1 > 2^{69}$ − ✓

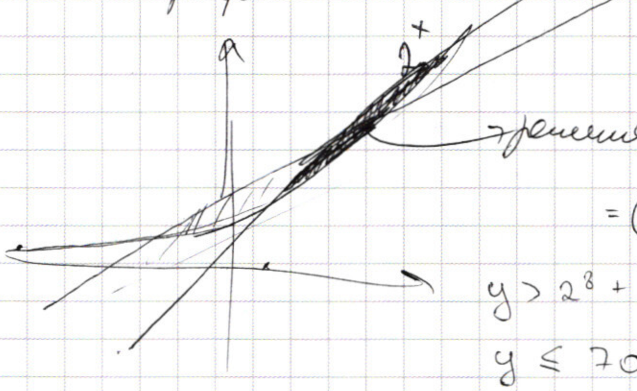
но при $x=70$:

$0 + 2^{70} > 2^{70}$ − против $\Rightarrow$ $x\in(6;70)$

при бОльших x реш нет. $x=7$: $y > 2^7 + 3\cdot 2^{65}$

$y \le 70 + (2^{64}-1)7$

графики:



кол-во y-ов:

решения. $70 + 7\cdot 2^{64} - 1 - 2^7 - 6\cdot 2^{64} =$

$= 2^{64} + 37 \Rightarrow$ при $2^{64} + 36$ (без послед)

$y > 2^8 + \cancel{3\cdot 2}\,6\cdot 2^{64}$

$y \le 70 + (2^{64}-1)8$

кол-во реш для кажд x: $k = (70-x) + (x-6)\cdot 2^{64} - 2^x$

$x=8$: $k = 62 + 2\cdot 2^{64} - 2^8 = 2^{64} + 2^{64} - 2$

$x=9$ $k = 61 + 3\cdot 2^{64} - 2^9 = 2^{64} + 2\cdot 2^{64} - 256 + 61$

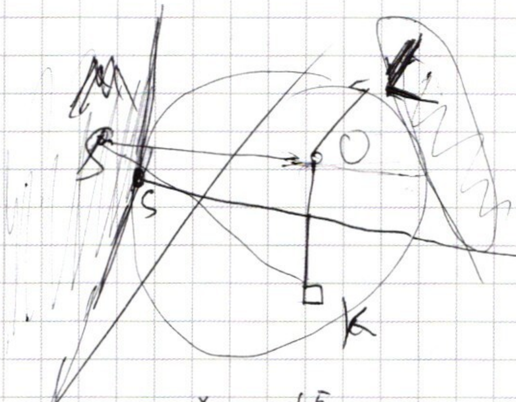
последовательн.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle KSO - ?$

$y > 2^x + 6\cdot 2^{64}$

$y \leq (70-x) + x\cdot 2^{64}$

$\Rightarrow x > 6$

целые

$x = 6$

$2^6 + 6\cdot 2^{64}$

64

y

$64 + 6\cdot 2^{64}$

$y > 2^x + 3\cdot 2^{65} =$

$y \leq 70 + (2^{64}-1)x$

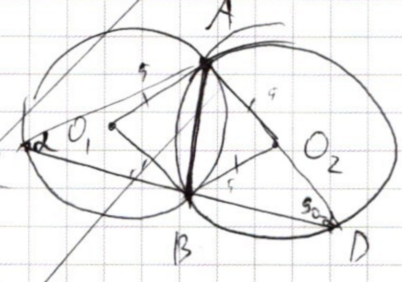
$70 + x2^{64} - x$

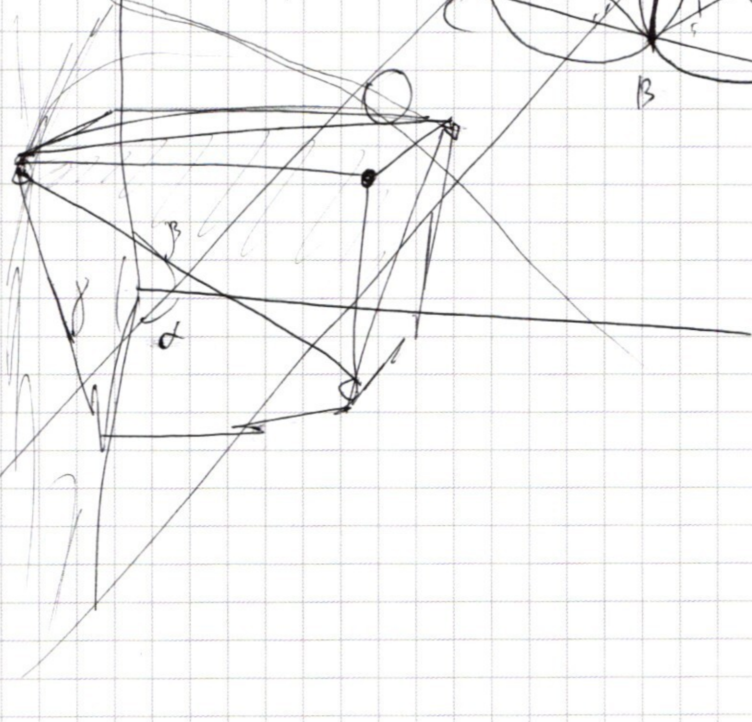
$2^x + 3\cdot 2^{65} = 2(2^{x-1} + 3\cdot 2^{64})$

$(70-x)$

$2^x < x(2^{64}-1) + (70 - 6\cdot 2^{64})$

$k = 70 - x + 2^{64}x$





$x \in [7;69] \quad x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

$k_y(x) = 70 + (2^{64}-1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} - 1$

$k_y(x)$ - кол-во решений для y от ~~ток~~ x

$k_y(x) = 70 \cancel{+6 \cdot 2^{64}} + (x-6) \cdot 2^{64} - 2^x \cancel{- 6 \cdot 2^{64}} - 1 - x$

$k_y(x) = 70 + (x-6) \cdot 2^{64} - 2^x - 1 - x$

$k_y(x) = (69 - x) + (x-6) \cdot 2^{64} - 2^x$

$k_y(x+1) = (69-x) - 1 + (x-6) \cdot 2^{64} + 2^{64} - 2^x - 2^x =$

$= k_y(x) - 1 + 2^{64} - 2^x$ - шаг

$k(7) = 2^{64} + 36$ решений

$k(8) = 2^{64} + 36 - 1 + 2^{64} - 2^8$

. . . .

$k(69) = 2^{64} + 36 + (-1 + 2^{64}) \cdot 35 \cdot 69 - 2^{6} \ldots +$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = \cancel{\cos}\ 2\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$\alpha+\beta = x \qquad \alpha-\beta = y$

$\alpha = \frac{x+y}{2} \qquad \beta = \frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cdot\cos y$

$x+y=\alpha \quad x-y=\beta$

$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$

~~sin α − sin β =~~

$4x = \frac{\pi}{4} + 7x \qquad -3x = \frac{\pi}{4} \qquad x = -\frac{\pi}{12}$

$4x = \pi - \frac{\pi}{4} - 7x \qquad 11x = \frac{3\pi}{4} \qquad x = \frac{3}{44}\pi$

$y^6 = y^{2\cdot 3}$

$\sqrt{} = y^3$

$\cancel{\frac{y^{5\lg x}}{10}} =$

$\log_2 8 = 3 \qquad x^{\log_{10} x}$

$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x + \cancel{\lg y}} \cdot y^{2\lg y} \qquad \cancel{y^5} \qquad 10 = 10$

~~$\log_5 x = \log_5 y$~~

$\log_2 8 = 3 \qquad \cancel{y^{\lg x}} \qquad \lg x$

$8^{\log_2 8} = 8^3$

$\log_2 \cancel{\lg}\ 8^{\log_2 8} = \log_2 8^3 = 3\cdot 3$

$\left(\frac{(10^b)^5}{10^a}\right)^a = (10^b)^{2a\cdot b}$

$\lg x = a \quad \lg y = b$

$\left(\frac{10^{5b}}{10^a}\right)^a = 10^{2b(a+b)}$

$10^{a(5b-a)} = 10^{2b(a+b)}$

$5ab - a^2 = 2ab + 2b^2$

$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$

$(a-b)(a-2b)$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$\lg x = a \qquad 10^a = x \qquad \lg y = b \qquad 10^b = y$

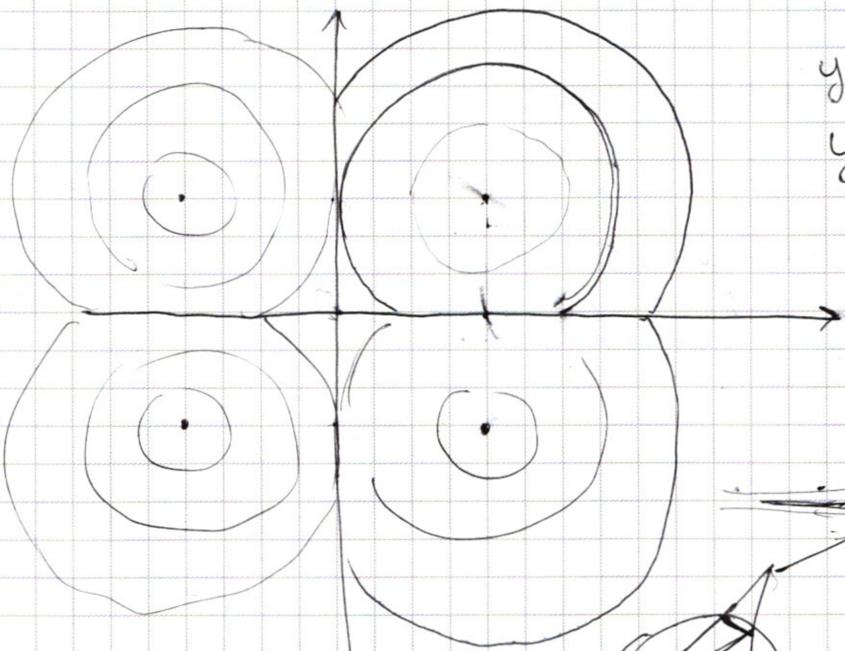
	1	-2	-7	12
3	1	1	-4	0

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

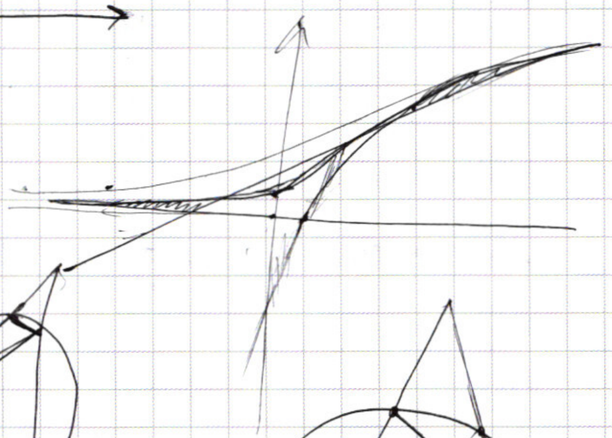
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$



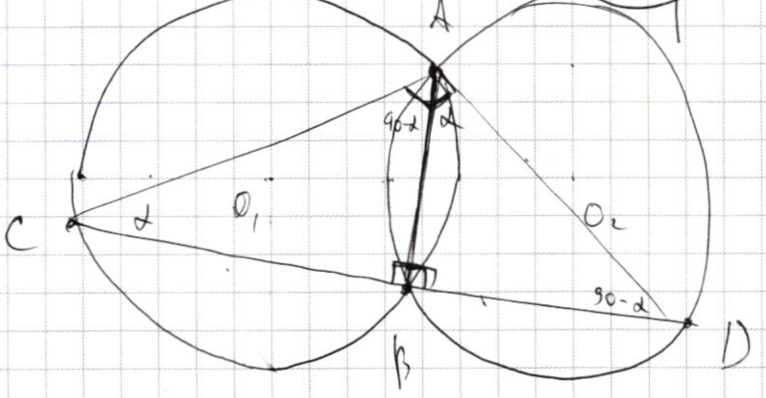
$y > 2^x + 3\cdot 2^{65}$ $\quad (x;y)$

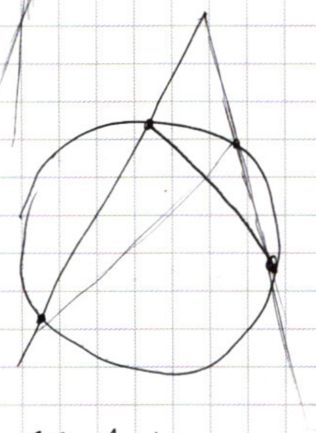
$y \le 70 + (2^{64}-1)x$



$y > 2^x + 3\cdot 2^{65}$

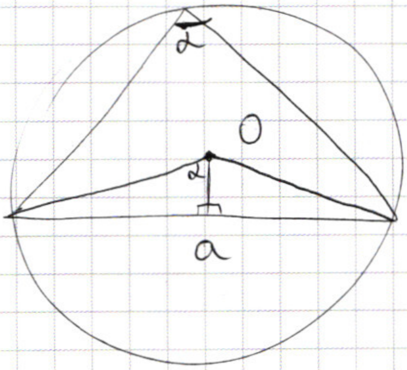
$y > 3\cdot 2^{65}$



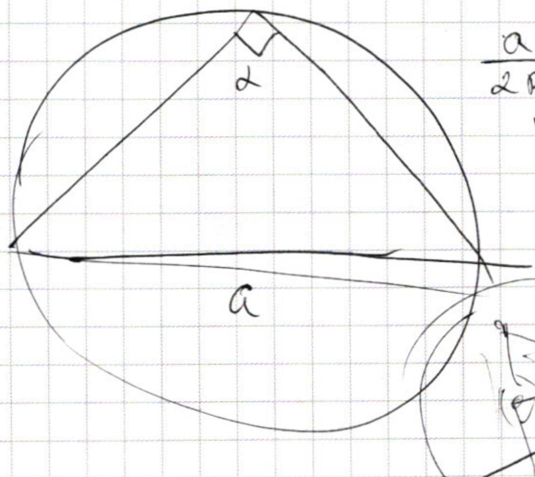


$\angle CAD = 90°$

$\sin\alpha = \frac{a}{\cancel{a}}$



$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$$



$\frac{a}{2R} = \sin\alpha$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$