

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

кол-во  $\overline{a_1 a_2 \dots a_8}$  :  $a_1 a_2 \dots a_8 = 3375$ Заметим, что  $3375 = 5^3 \cdot 3^3$ Иско, что  $0 < a_i \leq 9$  ( $a_i \neq 0$  иначе произв. = 0)

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i = 5 \\ a_i = 3 \\ a_i = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  в нашем числе либо три 5, три 3 и 2 единицы, либо три 5, одна 9, одна 3 и ~~3~~ три 1.

1) три 5, три 3 и ~~2~~ две 1:

кол-во таких восьмизначных чисел равно

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 56 = 560$$

(выбираем три места для 5, три для 3 и оставшиеся два места для 1)

2) три 5 одна 9 одна 3 и ~~3~~ три 1:

кол-во таких восьмизначных чисел равно

$$C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \cdot 56 = 1120 \quad (\text{аналогично})$$

$\Rightarrow$  всего кол-во таких чисел =  $1120 + 560 = 1680$  Ответ: 1680



№2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x \quad (1)$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

Воспользуемся формулой разности косинусов и синусов:

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{8x}{2}$$

$$\sin 11x - \sin 3x = 2 \sin \frac{8x}{2} \cos \frac{14x}{2}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \quad (1) = -2 \sin \frac{8x}{2} \left( \sin \frac{14x}{2} + \cos \frac{14x}{2} \right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\Rightarrow -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & (2) \\ -\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x & (3) \end{cases}$$

$$(2) \quad \sin 7x + \cos 7x = 0 \Rightarrow \sin 7x = -\cos 7x \quad \left| : \cos 7x \right. \begin{cases} \cos 7x = 0 \\ \text{не подходит} \\ \text{т.к. } \sin 7x = \pm 1 \text{ и} \\ \text{их сумма } \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 7x = -1$$

$$\Rightarrow 7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}}$$

$$(3) \quad \sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2} \sin 4x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x = \sin 4x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x = \sin 4x$$

$$\overset{\text{"}}{\cos \frac{\pi}{4}} \quad \overset{\text{"}}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

$$\sin \left( 7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 4x$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 11x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi m = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11} \end{cases}$$

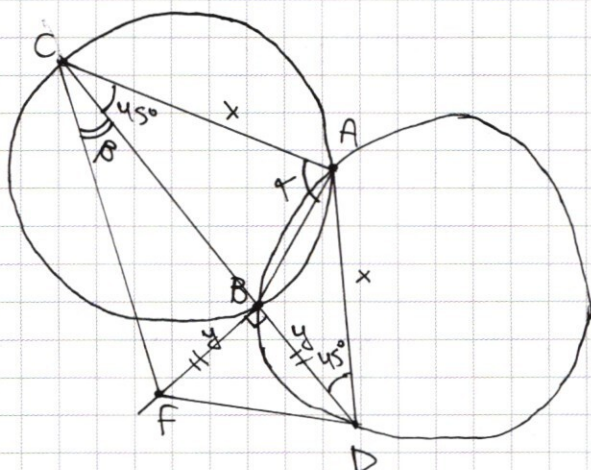
Ответ:  $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$ ,  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$ ,

$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11}$ , где  $n, m, k \in \mathbb{Z}$

~ 6.

$R_1 = R_2 = 5R$ ,  $BF = BD$ ;  $\angle CAD = 90^\circ$

а)  $CF$  - ?



$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AB}{\sin \angle BDA} = 2R = 10$$

$$\Rightarrow \sin \angle ACB = \sin \angle BDA$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle BDA = 45^\circ \text{ (м.к.}$$

эти углы острые)

$$\Rightarrow AB = 2R \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Пусть  $AC = AD = x$  и  $BF = BD = y$

$$BC = CD - BD = \sqrt{AC^2 + AD^2} - BD = \sqrt{2x^2} - y = x\sqrt{2} - y$$

$$\Rightarrow CF^2 = FB^2 + CB^2 = y^2 + (x\sqrt{2} - y)^2 = 2y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy$$

$$\Rightarrow CF^2 = 2(y^2 + x^2 - \sqrt{2}xy)$$



по по Th. cos для  $\triangle ABD$ :

$$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45^\circ = 50$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \frac{\sqrt{2}}{2} = 50$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = 50$$

$$\Rightarrow CF^2 = 2 \cdot 50 = 100 \Rightarrow CF = 10$$

Ответ: 10

8)  $BC = 6$ ,  $S_{\triangle ACF} = ?$

Пусть  $\angle DCF = \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{CB}{CF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{5}$   
(т.к.  $\beta$  — острый)

Найдем  $AC$ : пусть  $\angle CAB = \angle \Rightarrow \frac{BC}{\sin \angle} = 2R$

$$\Rightarrow \sin \angle = \frac{BC}{2R} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Воспользуемся Th. косинусов для  $\triangle ABC$ :

$$x^2 + BC^2 - 2x \cdot BC \cos 45^\circ = AB^2$$

$$x^2 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x = 50$$

$$x^2 - 6\sqrt{2}x - 14 = 0$$

$$D = 72 + 56 = 128 = 16 \cdot 8 = 64 \cdot 2$$

$$x = \frac{6\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}}{2} = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AC = 7\sqrt{2}$$

$$\text{Найдем } \sin(45^\circ + \beta) = \sin 45^\circ \cos \beta + \sin \beta \cos 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} =$$

$$= \frac{49 \cdot 2}{2} = 49$$

Ответ: 49



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy \quad (1)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad x^2 - x(2y+4) - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$$

$$= 16y^2 - 32y + 16 = (4y - 4)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+4 \pm (4y-4)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2y+4 + 4y-4}{2} = \frac{6y}{2} = 3y \quad (1) \\ x_2 = \frac{2y+4 - 4y+4}{2} = \frac{8-2y}{2} = 4-y \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x = 3y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y^5}{3y}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$\frac{y^4 \lg 3y}{3 \lg 3y} = y^2 (\lg 3 + \lg y^2) = y^2 \lg 3 \cdot y^4 \lg y$$

$$\Rightarrow y^4 \lg 3y - 2 \lg 3y - 4 \lg y = 3 \lg 3y$$



$$y^{2\lg 3y - 4\lg y} = 3^{\lg 3y}$$

$$y^2 (\lg 3y - 2\lg y) = 3^{\lg 3y}$$

~~$$y^{2\lg 3y^3} = 3^{\lg 3y}$$~~

~~$$y^{2\lg \frac{3}{4}y} = 3^{\lg 3y}$$~~

✗

✗

$$(1) \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$$

ОДЗ:  $x > 0, y > 0$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\Rightarrow y^{3\lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\Rightarrow 1) x = 3y \Rightarrow y^{3\lg 3y} = (3y)^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\Rightarrow \cancel{y^{3\lg y}} (y^{\lg 3} \cdot y^{\lg y})^3 = y^{2\lg y} \cdot 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \cdot y^{\lg 3} \cdot y^{\lg y}$$

$$\Rightarrow y^{3\lg 3 + 3\lg y - 2\lg y - \lg 3 - \lg y} = 3^{\lg 3y}$$

$$\Rightarrow y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3y} = (3y)^{\lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3}$$

$$\Rightarrow y^{2\lg 3 - \lg 3} = 3^{\lg 3}$$

$$\Rightarrow y^{\lg 3} = 3^{\lg 3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=3 \\ x=9 \end{matrix}}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) \quad x = 4 - y$$

$$\Rightarrow y^{3 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg(4-y) - 2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y \lg \frac{(4-y)^3}{y^2} = (4-y) \lg(4-y)$$

Пусть  $4-y = a \Rightarrow y = 4-a$

$$y \frac{3 \lg(4-y) - 2 \lg y}{\lg(4-y)} = 4-y$$

$$y^3 - \lg(y^2 - 4 + y) = 4-y$$

$$y \lg y^2 - 4 + y = y \lg y^2$$

$$y^3 - \frac{2 \lg y}{\lg(4-y)} y^2 = 4-y \quad (*)$$

$$y^{\log_{4-y} y^2} = y^{\frac{1}{\log_y(4-y)}} = y^{\frac{1}{\frac{\log_y 4}{\log_y y}}} = y^{\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$= y^{\frac{2}{\log_y(4-y)}} = \frac{y^2}{\log_y(4-y)} = \frac{y^2}{\log_y 4 - \log_y y} = \frac{y^2}{\frac{1}{2} - 1} = -2y^2$$

$$\Rightarrow (*) = -2y^2 = 4-y$$



1) ~~2)  $x = y - 4$~~  2)  $x = 4 - y > 0 \Rightarrow y < 4$

$$\frac{y^3 \lg(4-y)}{(4-y) \lg(4-y)} = y^2 \lg(4-y) \cdot y \lg y^2$$

$$\frac{y^3 \lg(4-y)}{y^{\lg y} (4-y) \lg(4-y)} = y \lg y^2$$

$$\frac{y^3 \lg(4-y)}{y^{\lg y} \frac{\lg(4-y) \cdot \lg(4-y)}{\lg y}} = y^2 \lg y$$

$$\Rightarrow y^3 \lg(4-y) - \frac{\lg^2(4-y)}{\lg y} - 2 \lg y = 1$$

$$\begin{cases} y=1 \Rightarrow x=3 \\ 3 \lg(4-y) - \frac{\lg^2(4-y)}{\lg y} - 2 \lg y = 0 \quad (\#) \end{cases}$$

$$(\#): \frac{3 \lg(4-y) \lg y - \lg^2(4-y) - 2 \lg^2 y}{\lg y} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \lg y \neq 0 \\ (\text{т.к. } y \neq 1) \end{array} \right.$$

$$3 \lg(4-y) \cdot \lg y - \lg^2(4-y) - 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg(4-y) \cdot \frac{\lg y^3}{4-y} - \lg^2 y^2 = 0$$

$$\lg(4-y) = a; \quad \lg y = b$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3ab - a^2 - 2b^2 = 0$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a = \frac{3b \pm b}{2} = \begin{cases} 2b & 1) \\ b & 2) \end{cases}$$

$$1) \lg(u-y) = 2 \lg y \Rightarrow u-y = y^2$$

$$\Rightarrow y^2 + y - u = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < \sqrt{u} \Rightarrow -1 + \sqrt{17} < \sqrt{8} \Rightarrow \sqrt{17} < \sqrt{9}$$

$\Rightarrow$  ~~не~~ подходит

$$2) \lg(u-y) = \lg y \Rightarrow u-y = y \Rightarrow u = 2y$$

$\Rightarrow y = 2$  подходит.

$\Rightarrow$  все решения:  $(9; 3), (3; 1);$

$$\left( u - \frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right) \text{ и } (2; 2)$$

Ответ:  $(9; 3), (3; 1), \left( u - \frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right), (2; 2)$



$$x = 4 - y$$

$$\frac{y^3 \lg(4-y)}{(4-y) \lg(4-y)} = \cancel{y^2 \lg(4-y)} \cdot y^2 \lg y$$

$$\frac{(4-y)^3 \lg y}{(4-y) \lg(4-y)} = y \lg y^2$$

$$(4-y) \lg(4-y) = y^{\lg_y(4-y) \cdot \lg(4-y)}$$

$$\begin{aligned} 3ab - a^2 - 2b^2 &= 0 \\ a^2 - 3ab + 2b^2 &= 0 \\ D &= 9b^2 - \\ \lg(4-y) (3\lg y - \lg(4-y)) &= \\ = \lg(4-y) \lg \frac{y^3}{4-y} \end{aligned}$$

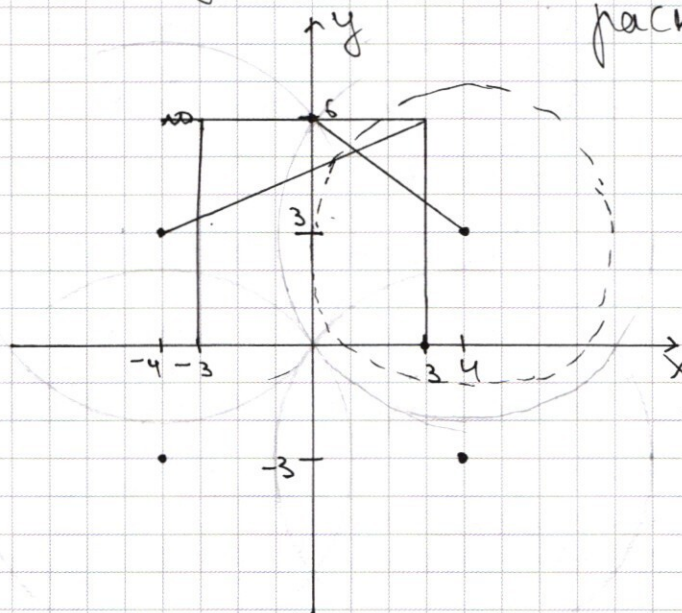


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ ((x-4)^2 + (y-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) первое это квадрат с ц. 0;3 и длиной стороны 6 (в этом легко убедиться)



раскрыв модуль

1)  $y \geq x+3$   $y \geq 3-x$

$y = 6$

2)  $y \geq x+3$   $y \leq 3-x$

$x = -3$

3)  $y \leq x+3$   $y \geq 3-x$

$x = 3$

4)  $y \leq x+3$   $y \leq 3-x$

$y = 0$

(2) это четыре части окружности с центрами  $(4; 3)$ ;  $(4; -3)$ ;  $(-4; 3)$ ;  $(-4; -3)$

$\Rightarrow$  понятно, что при с радиусами  $r = \sqrt{a}$  ( $a = r^2$ )

1) понятно, что при  $\sqrt{a} < 1$  ( $a < 1$ ) решений нет

2) при  $\sqrt{a} = 1$  ( $a = 1$ ) два решения (т.к. окр-ти с ц.  $(4; 3)$  и  $(-4; 3)$  будут касаться (1), а ост. окр-ти не будут



3) пока ~~окр-ти будут~~  $R \leftarrow 1 < \sqrt{a} \leq$  расст. <sup>середина стороны</sup> от т.  $(4; 3)$  до ~~вершины~~ квадрата  $(0; 0)$  и  $(-4; 0)$  (ясно что эти расст. равны)

то решений будет  $\geq 4$  (т.к. окр-ти  $(4; 3)$  и  $(-4; 3)$  будут пересекать квадрат хотя бы в двух т. каждая)  
~~т.к. это расстояние равно:~~  $\sqrt{4^2 + 3^2} =$

$$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \text{при } 1 < \sqrt{a} < 5$$

~~не подходит  $\Rightarrow 1 < a < 25$  не подходит~~

$$\sqrt{16 + 9} = 5 \Rightarrow 1 < \sqrt{a} < 5 \text{ не подходит}$$

$\Rightarrow 1 < a < 25$  не подходит.

4) при  $a = 25$  ( $R = 5$ ) будет два решения (окр-ти с ц.  $(4; 3)$  и  $(-4; 3)$  будут пер. квадрат в двух совпадающих <sup>определении</sup> точках  $(0; 0)$  и  $(0; 4)$  и окр-ти  $(4; -3)$  и  $(-4; -3)$  будут пер. на своей области ~~знаменит~~ квадрат в одной совпадающей точке  $(0; 0)$ )

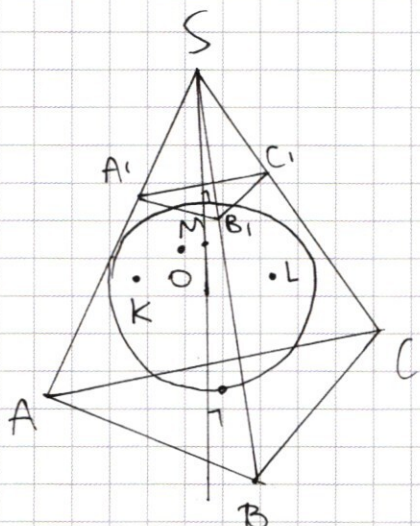
5) при  $\sqrt{a} > 5$  решений будет 0 (т.к. все окр-ти будут пересекать квадрат уже не на своих областях <sup>определения</sup>)

$\Rightarrow$  Ответ:  $a = 1$  и  $a = 25$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$\angle KSO = ?$ ;  $S_{\text{сеч. уша м-ю KLM}}$

$S_{A_1B_1C_1} = 1$ ;  $S_{ABC} = 4$

сфера вписана в тетра.  
 $ABCS \Rightarrow R_{\text{сф.}} = \frac{3 \sqrt{V_{ABCS}}}{S_{\text{пов.}}}$

№7.  $(x, y) \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{64} \cdot x - x$$

Будем решать  $2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64}x - x$

$$2^x + x - 70 < 2^{64}(x - 6)$$

$x > 6$  не подходит т.к.  $2^{64}(x - 6)$  растет

быстрее чем  $2^x + x - 70$   $x > 6$

$70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} > 1$  (чтобы м/у ними  
нашлось целое  
значение  $y$ )

$$70 + 2^{64}(x - 6) - x - 2^x - 1 > 0$$

$$69 + 2^{64}(x - 6) - x - 2^x > 0$$

$$2^{64}(x - 6 - 2^{x-64}) > x - 69$$







## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$5 \cdot 5 = 25$$

$$5 \cdot 3 = 15$$

$$a_1 a_2 \dots a_8 : a_1 \dots a_8 = 3375$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

⇒ должно быть три 5 и три 3  
либо 3 пять 5, одна 9 и одна 3

$$\begin{array}{r} 3375 \div 5 = 675 \\ 675 \div 5 = 135 \\ 135 \div 5 = 27 \\ 27 \div 3 = 9 \\ 9 \div 3 = 3 \\ 3 \div 3 = 1 \end{array}$$

1) три 5 и три 3 ⇒ все 1

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 56 = 560$$

○○○○○○○○

2) три 5 одна 9 и одна 3 3 29.

$$C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{8} = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^2 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{8} = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$C_8^2 \cdot C_5^2 \cdot C_4^1 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{8} = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680

$$C_8^3$$

aa b a b b o o

aa o a o o



N 2.

$$1) \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin 30 = \frac{1}{2} = 2 \sin 15 \cos 15 \quad \cos 60 - \cos 30 = -2 \sin 45 \cdot \sin 15 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 15 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$$

$$\sin 15 = x \quad x(\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{2}$$

$$\sin 15 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(2+\beta) = \cos 2 \cos \beta - \sin 2 \sin \beta$$

$$\sin -2 = -\sin 2$$

$$\cos(2-\beta) = \cos 2 \cos \beta + \sin 2 \sin \beta$$

$$\cos(2+\beta) + \cos(2-\beta) = 2 \cos 2 \cos \beta$$

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{16} = 0$$

$$\cos(2-\beta) - \cos(2+\beta) = 2 \sin 2 \sin \beta$$

$$\begin{cases} 2-\beta = x \Rightarrow 2\beta = x+y \Rightarrow \beta = \frac{x+y}{2} \\ 2+\beta = y \Rightarrow 2\beta = y-x \Rightarrow \beta = \frac{y-x}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{8x}{2}$$

$$2 \sin 30$$

$$\cos 30 - \cos 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$-2 \sin 45 \cdot \sin -30 =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \sin 40$$

$$\sin(2+\beta) = \sin 2 \cos \beta + \sin \beta \cos 2$$

$$\sin(2-\beta) = \sin 2 \cos \beta - \sin \beta \cos 2$$

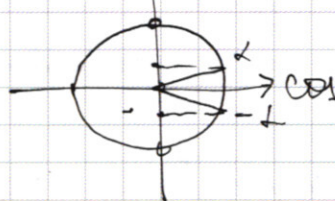
$$\sin(2+\beta) - \sin(2-\beta) = 2 \sin \beta \cos 2$$

$$\sin y - \sin x = 2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\sin 11x - \sin 3x = 2 \sin \frac{8x}{2} \cos \frac{14x}{2}$$

$$1) -2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{8x}{2} - 2 \sin \frac{8x}{2} \cos \frac{14x}{2} = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = (y^{\lg x} \cdot y^{\lg y})^2$$

$$x^{\lg x} = a$$

$$y^{\lg y} = b \Rightarrow y = b^{\frac{1}{\lg y}} = b^{\frac{\lg x}{\lg y}}$$

$$y^{\lg x} = (b^{\frac{\lg x}{\lg y}})^{\lg x} = b^{\frac{\lg x}{\lg y}} = b^{\lg(x-y)}$$

$$y^{\lg x} = y^{\lg y} \cdot \lg(x-y)$$

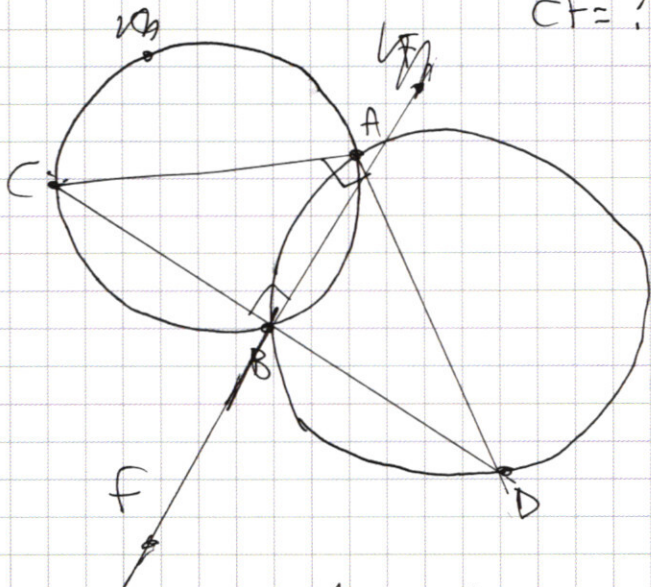
$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x = \frac{2y + 4 \pm (4y - 4)}{2}$$

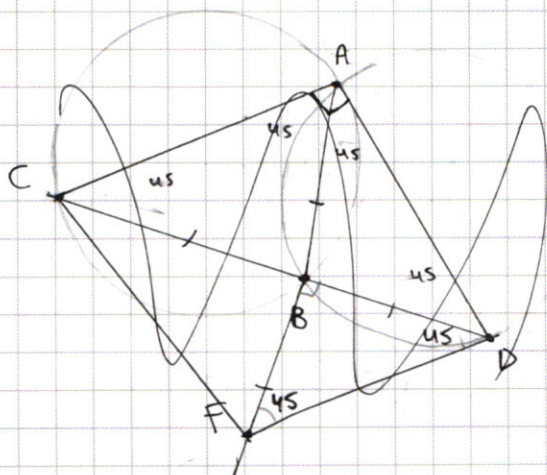
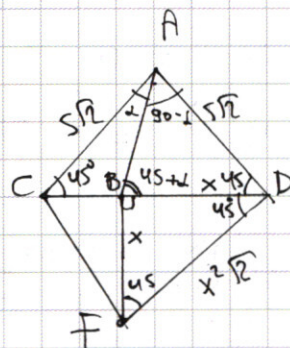
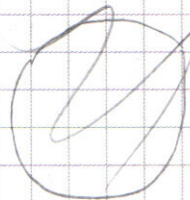
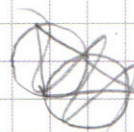
$$x_1 = \frac{2y + 4 + 4y - 4}{2} = 3y$$

$$x_2 = \frac{2y + 4 - 4y + 4}{2} = \frac{8 - 2y}{2} = 4 - y$$



$$CF = ?$$


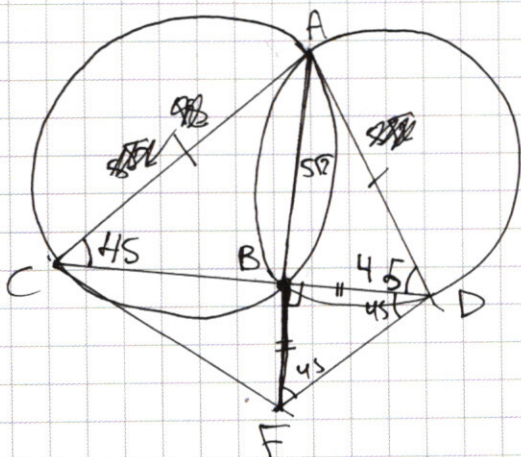
Omben:  ~~$C \neq 10$~~



$$\frac{CB2}{\sqrt{2}} = 10$$

$$CB = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} = BF$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + CB^2} = CB \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10$$



$$\frac{AC}{\sqrt{2}} = 10 \Rightarrow AC = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$CD = 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x_1 = 3y \\ x_2 = 4 - y \\ y^{3 \lg x} = (y^{\lg y})^2 \cdot x^{\lg x} \end{cases} \quad \begin{matrix} y \neq 0 & y \neq 4 \\ y > 0 \end{matrix} \Rightarrow y \in \begin{matrix} 4 - y > 0 \\ y < 4 \\ (0; 4) \end{matrix}$$

$$1) \quad y^{3 \lg 3y} = (y^{\lg y})^2 \cdot (3y)^{\lg 3y}$$

$$(y^{\lg 3} \cdot y^{\lg y})^3 = (y^{\lg y})^2 \cdot 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \cdot y^{\lg 3} \cdot y^{\lg y}$$

$$y^{3 \lg 3} \cdot y^{3 \lg y} = y^{2 \lg y} \cdot 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \cdot y^{\lg 3} \cdot y^{\lg y}$$

$$3 \lg 3 + 3 \lg y - 2 \lg y - \lg 3 - \lg y = 3 \lg 3 + \lg y$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3y} = (3y)^{\lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3}$$

$$y^{2 \lg 3 - \lg 3} = 3^{\lg 3}$$

$$y^{\lg 3} = 3^{\lg 3} \Rightarrow \boxed{y = 3}$$



$$2) \begin{cases} x = 4 - y \\ y^{3 \lg x} = (y^{\lg 4})^2 \cdot x^{\lg x} \end{cases}$$

$$\cancel{y^{3 \lg 4}} \quad y^{\frac{3 \lg 4}{\lg y}} = (y^{\lg 4})^2 \cdot (4 - y)^{\lg \frac{4}{y}}$$

$$y^{3 \lg 4 \cdot \log_y 10} = 10^{3 \lg 4} = 4^3 = 64$$

$$(y^{\lg 4})^2 \cdot (4 - y)^{\lg \frac{4}{y}} = 64$$

~~$\lg(4-y)$~~

$$(y^{\lg 4})^{\frac{2}{\lg \frac{4}{y}}} \cdot (4 - y) = 64^{\frac{1}{\lg \frac{4}{y}}}$$

$$\cancel{y^{\lg 4 \cdot 2 \cdot \log_y 10}}$$

$$\cancel{y^{\frac{2 \lg 4}{\lg y}}}$$

$$y^{\frac{2 \lg 4}{\lg 4 - \lg y}} =$$

~~at~~

~~$\approx$~~

$$\cancel{y^{\frac{2 \lg 4}{\log_y 4 \cdot \log_y 10}}}$$

$$y^{\frac{2 \lg 4}{\lg 4 - \frac{1}{\log_y 10}}} =$$

$$y^{\frac{2 \lg 4 \cdot \log_y 10}{\lg 4 \cdot \log_y 10}}$$

$$y^{\frac{3 \lg 4}{\lg y} - 2 \lg y} = 4 - y$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(1) \sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$(2) -\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x = \cos(4x+3x) - \sin(4x+3x) = \\ = \cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x - \sin 4x \cos 3x - \cos 4x \sin 3x = \\ = \cos 3x (\cos 4x - \sin 4x) - \sin 3x (\cos 4x + \sin 4x)$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x + \sin 7x = \cos 7x$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 7x$$

$$2+1=3$$

$$\sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2} \sin 4x$$

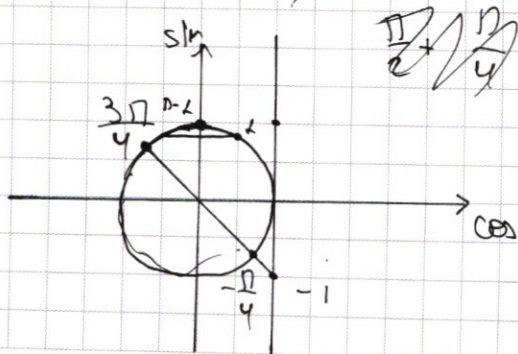
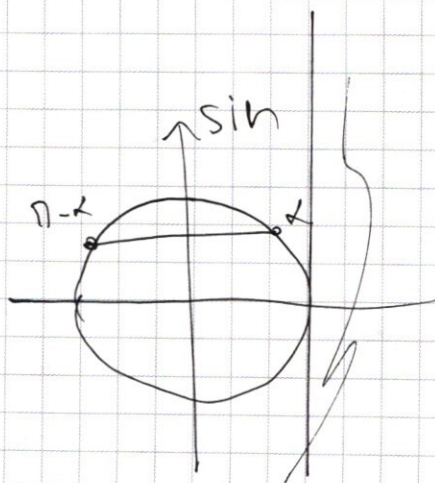
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x = \sin 4x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x = \sin 4x$$

$$\sin 7x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 7x \sin \frac{\pi}{4} = \sin 4x$$

$$\sin \left( 7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 4x$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi k \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi k \end{cases}$$





№3.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 3y(y-4)$$

$$(x-2)^2 - 2xy - 3y^2 + 12y - 4 =$$

$$x(x-2y-4)$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$\text{или } x \neq 0, x > 0, y > 0$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = (y^{\lg x + \lg y})^2 = (y^{\lg x} \cdot y^{\lg y})^2 = y^{2 \lg x y}$$

$$x^{\lg x} = x^{\frac{1}{\lg x} \lg x} = x$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x} = (y^{\lg y})^2 \cdot x^{\lg x}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - x(2y+4) - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y-4)^2$$

$$y^{\lg y} = a$$

$$y = (10^{\lg y})^{\lg y} = 10^{\lg^2 y}$$

$$y^{\frac{1}{\lg y}} = a$$

$$y^{\frac{1}{\lg y}} = a$$

$$y = a^{\lg y} = 10^{\lg y a}$$

$$y^{\frac{1}{\lg y}} = 10$$

$$y^{\lg y} = 0$$

$$\lg 5 = 1$$

$$\Rightarrow 10^1 = 5$$

$$5^4 = (10^1)^4 = 10^4$$

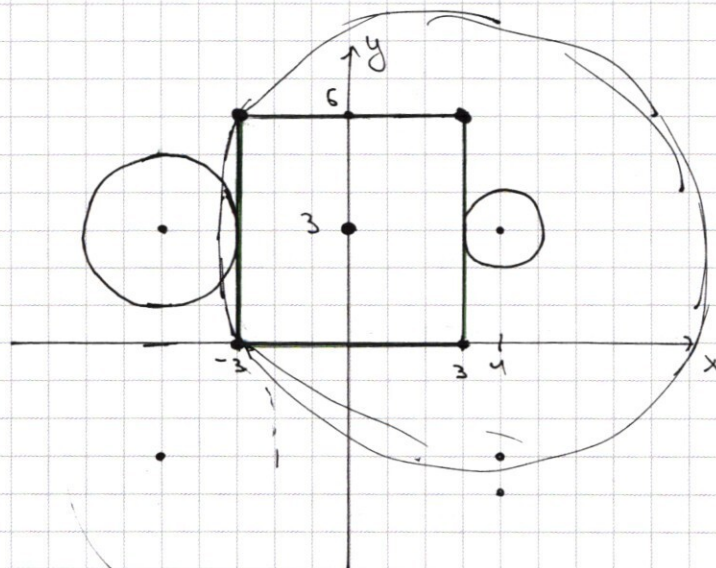


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

NS.  $y-3-x$   $-y+3-x$   $-y+3+x$   $-y+3-x$  все а:  
два реш.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$x, y$   
 $-x-4$   $x-4$   $y-3$   $y-3$   
 $x+4$   $y-3$



$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

1)  $2y = 6 \Rightarrow 2y - 6 = 6$   
 $2y = 12 \Rightarrow y = 6$

$$x \leq 3$$

$$x \geq 3 - y = -3$$

2)  $y-3-x - y+3-x = 6$   
 $-2x = 6 \Rightarrow x = -3$

$$y \geq 0$$

$$y \leq 6 \Rightarrow y = 3$$

1)  $a < 1 \Rightarrow 0$  реш.

2)  $a = 1 \Rightarrow 1$  реш.

3)  $2 > a > 1 \Rightarrow 2$  реш.

3)  $-y+3+x + y-3+x = 6$   
 $2x = 6 \Rightarrow x = 3$

$$y \geq 0$$

4)  $-y+3-x - y+3-x = 6$   
 $-2y+6 = 6 \Rightarrow y = 0$   
 $x \geq -3$   
 $x \leq 3$

$$H = 9 + 1 = 10$$

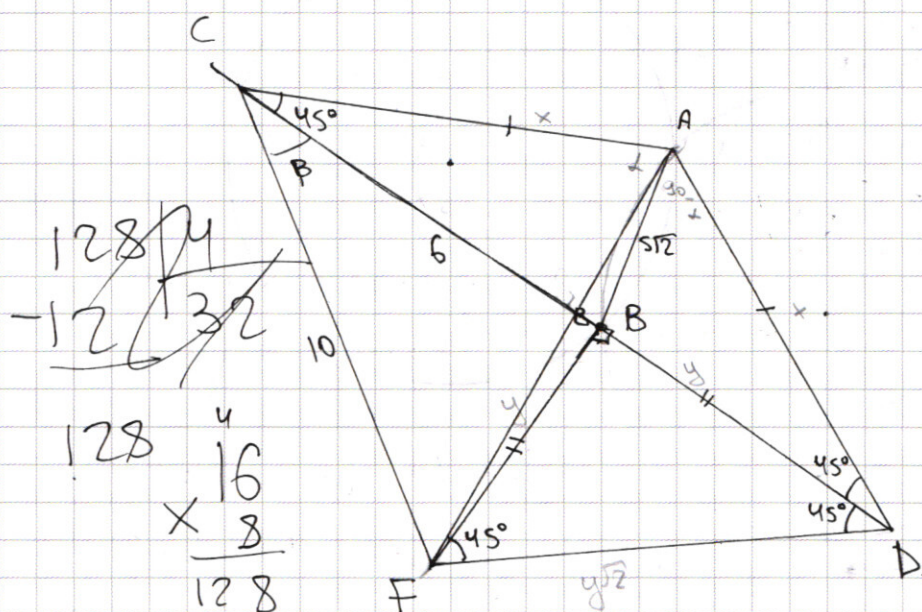
$$a = 4 + 2 = 6$$



$$\sin(135^\circ - \angle) =$$

=

$$2 + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + 2^{64}$$



$$\triangle CAB \sim \triangle FDB$$

$$\frac{CA}{FB} = \frac{CD}{FD}$$

$$CF^2 = y^2 + 2x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}xy = 2(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)$$

$$a) \quad x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50$$

$$\Rightarrow CF^2 = 2 \cdot 50 = 100 \Rightarrow \boxed{CF = 10}$$

$$2^{7+7-70}$$

$$b) \quad BC = 6; \quad S_{\triangle ACF} = ?$$

$$\Rightarrow x\sqrt{2} - y = 6$$

$$y > 2 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + 2^{64} - 7$$

$$\frac{6}{\sin \angle} = 10 \Rightarrow \sin \angle = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$2^{7+7-70} < 2^{64}$$

$$\cos \beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{Ag}$$