

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Разложим 3375 на простые множители

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Заметим, что если мы перешожем любые 3 из них,
то получится более чем однозначное число

При перешожении 2 из них однозначное число
даёт только пара 3,3

Общее число таких возмозможных чисел n_0
слагается из чисел с цифрами 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5
и с цифрами 1, 1, 1, 3, 5, 5, 5, 9 — n_2

Других ситуаций не может быть, так как
однозначные числа

$$n_1 = C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 2^4}{2} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 28 \cdot 20$$

выбираем места для единиц
расставим 3 числа (5-и займут оставшиеся места)
варианты 3,9 и 9,3

$$n_2 = C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot 2 = 28 \cdot 20 \cdot 2$$

выбираем места для 3,9
расставим 1 число (5 займут ост. места)

$$n_0 = n_1 + n_2 = 3 \cdot 28 \cdot 20 = 1680$$

Ответ: 1680

Задача №2

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) = -2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin 3x - \sin 11x = -2 \cos 7x \sin 4x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 7x = -1 \\ -\sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 7x = -1 \\ -\sin 4x = \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 7x = -1 \Rightarrow x = \frac{-\frac{\pi}{4} + \pi k_3}{2} \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right) = \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k_1 \\ \frac{\pi}{2} + 4x = 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2 \\ \frac{\pi}{2} + 4x = -(7x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi k_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k_1 \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} \pi k_2 \\ x = -\frac{3}{44} \pi + \frac{2}{11} \pi k_3 \end{cases}$$

Объем

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right) = \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right) - \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-2 \sin \frac{11x + \frac{3\pi}{4}}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{11x + \frac{3\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{11x + \frac{3\pi}{4}}{2} = \pi k_1 \\ \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = \pi k_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{44} \pi + \frac{2\pi k_1}{11} \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} \pi k_2 \end{cases}$$

Объем

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{44} \pi + \frac{2}{11} \pi k_1 \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} \pi k_2 \\ x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k_3 \end{cases}$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\sin B = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{3}{5}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + B\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos B + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{\text{ACE}} = \frac{10\sqrt{98}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{49} = 49$$

Ответ: $CF = 10$

$$S_{\text{ACE}} = 49$$

Заметим, что если L будет летать по дуге стороны (AB) , то рассуждения ~~внутри~~ в рисунке достаточно ~~заметить~~ отметить поперек называемые точки C и D и провести ~~эти же~~ рассуждения с соотв. заменой

~~Для второго пункта не следует вводить (*) для решения~~

Для L соотн. A

$CA = \text{диаметр} = 10$

$DA = \text{диаметр}$ $AB = \frac{2R}{\sqrt{2}}$ ($\angle CBA = 90^\circ$)

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CA^2 - AB^2 + AD^2 - AB^2} = \sqrt{100 + 100 - 2 \cdot \frac{100}{2}} = 10$$

Учитывая размеры CB и BD описанные выше для второго пункта невозможно

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 13

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x^2}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y} & (1) \\ y > 0 \quad x > 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\begin{aligned} (x - 3y)^2 - 4(x - 3y) + 4xy - 12y^2 &= (x - 3y)(x - 3y - 4) + 4y(x - 3y) = \\ &= (x - 3y)(x - 3y - 4 + 4y) = (x - 3y)(x + y - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$(1) \quad y^5 \lg x = x^{\lg x} \cdot y^{2(\lg x + \lg y)} \Rightarrow y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot \lg x \cdot \lg y^x \quad (*)$$

~~если~~
если $x \neq 1$

$$3 \lg x = 2 \lg y + \frac{\lg x^2}{\lg y}$$

$$\begin{aligned} \lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y &= 0 \\ (\lg x - 2 \lg y)(\lg x - \lg y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 3y \\ x = y^2 \\ x = 4 - y \\ x = x \\ y = 3y \\ y = x \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0; x = 0 \quad 003 \\ y = 3; x = 9 \quad 003 \\ y = \frac{4 - \sqrt{5}}{2}; x = 4 + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad 17 \\ y = 0; x = 0; \quad 043 \\ x = 2; y = 2 \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{4 - \sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right); (9; 3); (2; 2) \right\}$

Задача 15

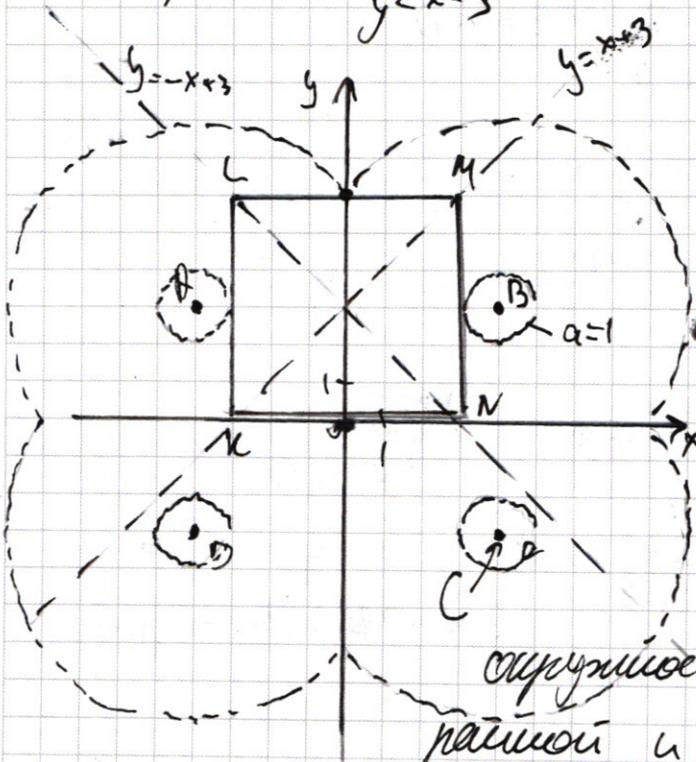
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-a)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(i) при $y \geq x+3$
 $y \geq x-3$ $y-3-x + y-3+x = 6$
 $y = 6$

при $y < x+3$
 $y \geq x-3$ $x+3-y + y-3+x = 6$
 $x = 3$

при $y \geq x+3$
 $y < x-3$ $y-3-x + 3-y-x = 6$
 $x = -3$

при $y < x+3$
 $y < x-3$ $3+x-y + 3-y-x = 6$
 $y = 0$



точка A, B, C, D. $a = R^2$
 центры окружностей
 система имеет 2 реш. \Rightarrow

\Rightarrow 2 точки пересечения
 радиус KLMN и ~~радиус~~
 всех окружностей
 (с радиусом)

Будем мысленно расширять
 площадь ~~ка~~
 окружностей, ~~тогда~~ точки пер. с
 радиусом и образуя окружн осей
 коорд.

Первый раз ок-ты касаются радиус при $a=1$
 и это даёт 2 реш. Дальше до $R = \sqrt{10}$ ($a=10$)
 окр-ти A и B будут иметь по 2 т. пер. с KLMN (не подх.)
 при $R = \sqrt{10}$ A - 2 т. пер. B - 2 т. пер. C, D - по 1 т. пер. но касательные
 C $R = \sqrt{10}$ до $R = 5$ ($a=25$) окр-ти A, B, C, D будут иметь
 по 1 т. пер. с KLMN - не подх. А при $a=25$ окр-ти
 A, B и C, D пер-ся на радиусе \Rightarrow 2 решения. Дальше
 решений нет Ответ: $a \in \{1; 25\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$1125 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\frac{450}{23} = 20$$

$$11139555$$

$$\frac{225}{6} = 37.5$$

$$2 \cdot 28 = 56$$

$$\frac{225}{1125} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{450}{3375} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

$$\frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

$$\cos 11x - \sin 11x$$

$$\sin 3x - \sin 11x$$

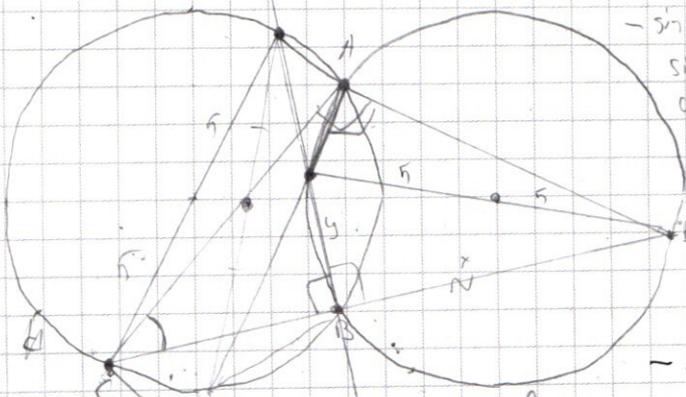


$$\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) = -2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin 3x - \sin 11x = -2 \cos 7x \sin 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -2 \cos 4x = 2 (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-\sin 4x = \cos(7x + \frac{\pi}{2})$$



$$\sin(4x) = \cos(90^\circ - 4x)$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 4x + 2\pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$11x = -\frac{\pi - 2\pi k}{4} + 2\pi k_3$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{4} + 4x + 7x + \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + 4x + 7x + \frac{\pi}{4} = 0$$

$$y - 3 - x > 0 \Rightarrow y > x + 3$$

$$x = 10$$

$$y = x$$

$$y = 3x$$

$$y = 5x$$

$$y = 3x$$

$$y = 5x$$

$$x = 10$$

$$y = x$$

$$y = 3x$$

$$y = 5x$$

$$x = y$$

$$y = x$$

$$y = 3x$$

$$y = 5x$$

$$y = x$$

$$y = 3x$$

$$y = 5x$$

$$y = x$$

$$\sin \frac{11x + 3\pi}{4} = 0$$

$$\frac{11x + 3\pi}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$11x + 3\pi = 4\pi + 8\pi k$$

$$11x = \pi + 8\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{11} + \frac{8\pi k}{11}$$

$$\frac{11x + 3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$11x + 3\pi = 2\pi + 4\pi k$$

$$11x = -\pi + 4\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{11} + \frac{4\pi k}{11}$$

$$x = -\frac{\pi}{11} + \frac{4\pi k}{11}$$

$$y = x$$

$$y = 3x$$

$$y = 5x$$

$$y = x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 16

$y^2 + y - 4$
 $\frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 4}}{2}$

Пусть $\omega_2 \cap (AC) = K$
 $\angle KAD = 90^\circ$
 \Downarrow
 KD - диаметр
 \Downarrow
 $\angle KBD = 90^\circ$
 \Downarrow
 $(KB) = (BF)$

$7 \cdot 1,42$
 $\frac{16,94}{7}$
 200
 280

$h = a \sin \alpha$
 $S = h \cdot \frac{b}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \sin \alpha$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x = y^{\lg y^x}$$

$$y^{3 \lg x} = y^{\frac{1}{\lg y^x} - \frac{1}{\lg x \cdot 10^x}}$$

$$\log_x y = \log_x c \cdot \log_c y$$

$$3 \lg x = 2 \lg y \cdot \lg x \cdot \log_{x^2} y$$

$$\lg x = 0$$

$$3 = 2 \lg y \cdot \log_{x^2} y$$

2h

$$\frac{3}{2} = \lg 3x - \lg_{x^2} 3x$$

$$\frac{3}{2} = \lg 3x - \log_{x^2} 10 \cdot \lg 3x$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg x} - 2 \lg y = x^{\lg x}$$

$$3 \lg x - 2 \lg y = \lg x \cdot \log_{y^2} x$$

$$\frac{\lg x}{\lg y} = \dots = 24$$

$$\frac{\log_{16} 256}{\log_{16} 16} = \log_{16} 256$$

$$10^a \quad 10^{2a}$$

$$10^{\lg x} = x$$

$$3y = 5^2$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$\frac{8 - \sqrt{5} + 1}{2}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4(+4)}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4(+4)}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

