

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

1) не используем 9^4 :

в числе могут быть только 3; 5 и 1,

т.к. разложение 3375 ~~единственно~~ единственно

$$N_1 = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2! \cdot 2!} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

2) используем 9^4 :в числе может быть 5×9^4 , 1×3^4 и 3×5^4 , а также 3×1^4

$$N_2 = \frac{8!}{1!1!3!3!} = 2 \cdot \frac{8!}{2!(3!3!)} = 2N_1 = 1120$$

$$N_1 + N_2 = 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680.

$$1) x = 3y:$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right) \lg 3y = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\frac{y^{5 \lg 3y}}{10 \lg^2 3y} = y^{2 \lg 3 + 4 \lg y}$$

$$y^{5 \lg 3y - 2 \lg 3 - 4 \lg y} = (3y)^{\lg 3y}$$

$$y^{5 \lg 3 + 5 \lg y - 2 \lg 3 - 4 \lg y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y}$$

$$y^{3 \lg 3 + \lg y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3 + \lg y}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$10^{2 \lg 3 \lg y} = 10^{\lg 3 \lg 3y}$$

~~$$3^{2 \lg y \lg 3} = 3^{\lg 3y}$$~~

$$2 \lg 3 \lg y = \lg 3 \lg 3y$$

$$2 \lg y = \lg 3 + \lg y$$

~~$$2 \lg y \lg 3 = \lg 3y$$~~

$$\lg y = \lg 3$$

~~$$2 \lg y \lg 3 = \lg 3 + \lg y \quad y=3, x=9$$~~

~~$$\lg 3 - \lg 3 \lg y + \lg y - \lg 3 \lg y = 0$$~~

~~$$\lg 3(1 - \lg y) =$$~~

~~$$\lg y(2 \lg 3 - 1) = \lg 3$$~~

~~$$\lg y = \frac{\lg 3}{2 \lg 3 - 1} = \frac{\lg 3}{\lg 9 - \lg 3} = 1 \quad y=10, x=30$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ (\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= \sqrt{2} \cos 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= \cos 4x \\ -\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= \cos^2 7x - \sin^2 7x \\ -\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= (\cos 7x + \sin 7x) \\ &\quad (\cos 7x - \sin 7x) \end{aligned}$$

$$1) \sin 7x + \cos 7x = 0 \quad | : \cos 7x \neq 0$$

$$\tan 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) -\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right)$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 7x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x \right)$$

$$-\sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2} \right) = 0$$

$$\frac{(3y)^{4 \lg 3y}}{10^{3 \lg 3y}} = \frac{(3y^2)^{\lg 3y^2}}{3^{\lg 3y^2} \lg 3y^2}$$

$$\frac{10^{4 \lg^2 3y}}{10^{3 \lg 3y}} = \frac{10^{\lg^2 3y^2}}{3^{\lg 3y^2}}$$

$$\frac{10^{4 \lg^2 3y}}{10^{\lg^2 3y^2}} = \frac{243^{\lg 3y}}{3^{\lg 3y^2}} = \frac{3^{4 \lg 3y}}{3^{\lg 3y^2}}$$

$$10^{4 \lg^2 3y - \lg^2 3y^2} = 3^{4 \lg 3y - \lg 3y^2}$$

$$\cancel{10} 10^{\dots} = 10^{\lg 3(\dots)}$$

$$4 \lg^2 3y - \lg^2 3y^2 = \lg 3(4 \lg 3y - \lg 3y^2)$$

$$4(\lg 3 + \lg y)^2 - (\lg 3 + 2 \lg y)^2 =$$

$$= \lg 3(4 \lg 3 + 4 \lg y - \lg 3 - 2 \lg y)$$

$$4(\lg 3 + \lg y)^2 - (\lg 3 + 2 \lg y)^2 =$$

$$= \lg 3(3 \lg 3 + 2 \lg y)$$

$$\cancel{4 \lg^2 3} + 8 \lg 3 \lg y + \cancel{4 \lg^2 y} - \cancel{\lg^2 3} - 4 \lg 3 \lg y -$$

$$- \cancel{4 \lg^2 y} = \cancel{3 \lg^2 3} + 2 \lg 3 \lg y$$

$$4 \lg 3 \lg y = 2 \lg 3 \lg y$$

$$\lg 3 \lg y = 0, y = 1 \Rightarrow x = 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.
ABC, HNP — сеч.

$$\Delta ABC \sim \Delta HNP \quad (т.к. плоскости II), k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Пусть T_1 и T_2 — точки касания ABC и HNP со сферой H

$$SABC \sim SHNP$$

Пусть $ST_1 = x$. Тогда

$$OT_1 = OT_2 = \frac{1}{2}x$$

$$\angle SKO = 90^\circ \quad (\text{в силу касания})$$

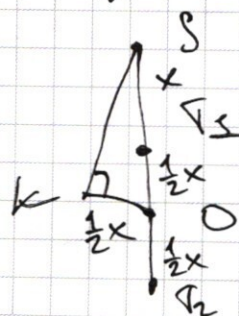
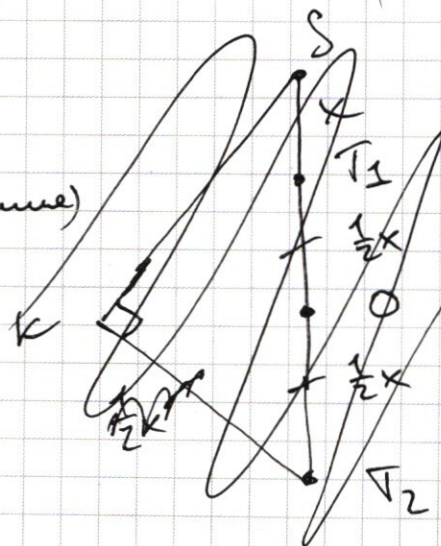
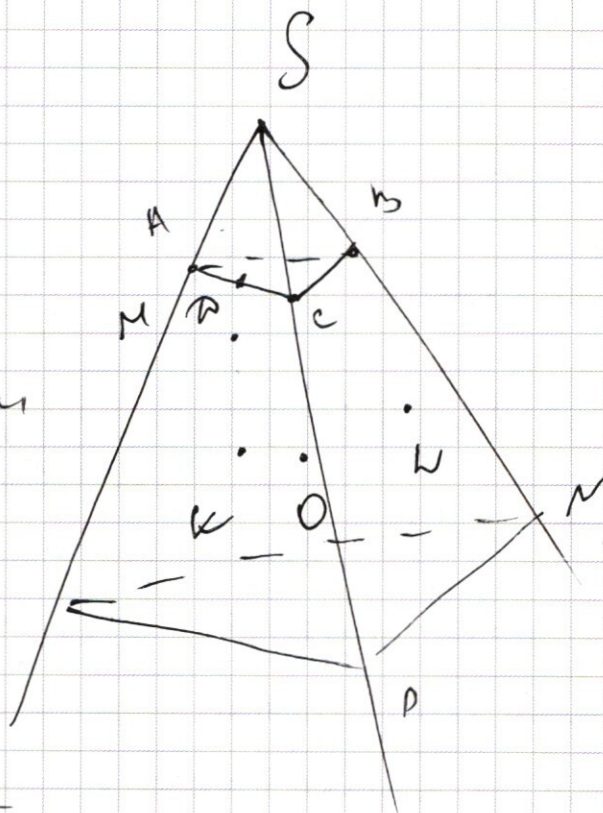
$$\text{в } \triangle SKO \text{ } SO =$$

$$= x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x,$$

$$KO = T_1O = R = \frac{1}{2}x$$

$$\sin \angle KSO = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{3}{2}x} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3} = \angle MSO = \angle LSO$$



$$KS = \sqrt{\left(\frac{3}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}x =$$

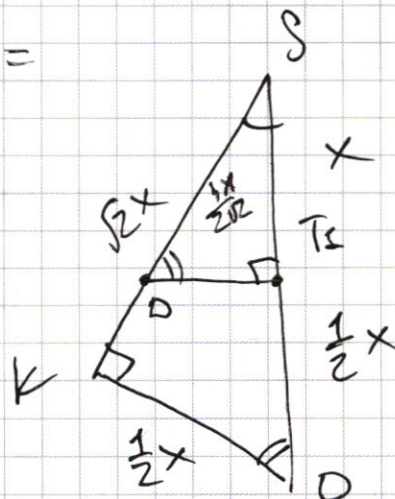
$$= \sqrt{2}x$$

Пусть $D = KS \cap (ABC)$

$$T_1 D \perp SD, \triangle SAT_1 \sim \triangle SOK,$$

$$k = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$SD = \frac{1}{k} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{3x}{2\sqrt{2}}$$



$(KHM) \perp SD$: (пусть KSD , hSD и mSD — высоты, опущенные из точек K, H и M на SD)

$\triangle KSD = \triangle HSD = \triangle MSD$ (пусть с одинаковым $\angle$ тогда, если опустить $\perp$ и катетом, равном SD)
из K, H и M перпендикуляры на SD , они совпадают в одной точке, значит $(KHM) \perp SD$

Пусть α — сечение угла ~~(KHM)~~ плоскостью (KHM) . $\alpha = \triangle EFG \sim \triangle ABC \sim \triangle HNP$ ($\alpha \parallel (ABC)$, (HNP))

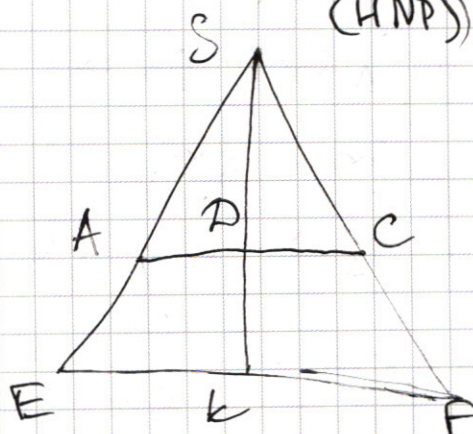
$$\triangle ABC \sim \triangle EFG \sim \triangle HNP$$

$$\triangle EFG \sim \triangle ABC, k =$$

$$= \frac{SK}{SD} = \frac{x\sqrt{2}}{\frac{3x}{2\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$S_{EFG} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 S_{ABC} = \frac{16}{9}$$



Ответ: $\arcsin \frac{1}{3};$
 $\frac{16}{9}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \frac{\pi}{4} - 3x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} - 3x = 2\pi n$$

$$-3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}n$$

$$2) \frac{\pi}{4} - 11x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} - 11x = \pi + 2\pi m$$

$$-11x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi}{11}m$$

$$\text{Ответ: } 1) -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7}k$$

$$2) \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi}{11}k$$

$$2) \left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(y(4-y))}$$

$$\frac{y^{5 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2 \lg y + 2 \lg(4-y)}$$

$$y^{5 \lg(4-y)} = 10^{\lg^2(4-y)} \cdot y^{2 \cdot \lg(y(4-y))}$$

$$10^{5 \lg y \cdot \lg(4-y)} = 10^{\lg^2(4-y)} \cdot 10^{2 \lg y \cdot \lg(y(4-y))}$$

$$5 \lg y \cdot \lg(4-y) = \lg^2(4-y) + 2 \lg y \cdot \lg(y(4-y))$$

$$\lg y = p \quad \lg(4-y) = q$$

$$5pq = q^2 + 2p(p+q)$$

$$5pq = q^2 + 2p^2 + 2pq$$

$$q^2 - 3pq + 2p^2 = 0$$

$$\begin{cases} q = p \\ q = 2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(y) = \lg(4-y) \\ \lg(4-y) = \lg y^2 \end{cases}$$

$$1) y = 4-y \Leftrightarrow y = 2, x = 2$$

$$2) 4-y = y^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 4 = 0 \quad D = 17$$



$$y = -1 \pm \sqrt{17}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{17}$$

$$xy > 0 \Rightarrow \text{реш: } (-1+\sqrt{17}; 5+\sqrt{17})$$

$(9; 3)$
 ~~$(5; 1)$~~
 $(2; 2)$
 ~~$(-1+\sqrt{17}; 5-\sqrt{17})$~~
 $(5+\sqrt{17}; -1+\sqrt{17})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} > 0$$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 0, x \geq 0$$

Значит, можно рассматривать только
 $y \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{N}_0$

$$\text{Если } 2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x,$$

решений нет.

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} > 70 + (2^{64} - 1)x$$

Очевидно, что x только ограничен сверху.

$$x=0: 1 + 3 \cdot 2^{65} > 70 - \text{верно}$$

$$x=1: 2 + 3 \cdot 2^{65} > 70 + 2^{64} - 1 - \text{верно}$$

$$x=2: 4 + 3 \cdot 2^{65} > 70 + 2^{65} - 2 - \text{верно}$$

$$x=3: 8 + 3 \cdot 2^{65} > 70 + 2^{66} - 4 - \text{верно}$$

$$2 + 3 \cdot 2^{65} > 70 + 2^{65} - 2 - \text{верно}$$

$$2 + 3 \cdot 2^{65} > 70 + 2 \cdot 2^{65} - 4 - \text{верно}$$

$$x=6: 2 + 3 \cdot 2^{65} > 70 + 3 \cdot 2^{65} - 6 - \text{верно}$$

$$x=5: 2 + 3 \cdot 2^{65} > 70 + (4+1)(2^{64} - 1) = 70$$

~~$x = 0, 1, 2, 3$~~ Если $2^x + 3 \cdot 2^{65} \geq 70 + (2^{64} - 1)x$,
 ~~$x = 0, 1, 2, 3$~~ решение нет.

Значит, $2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$

$x = 0: 1 + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64} - 1$ - неверно

$x = 1: 2 + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64} - 2$ - неверно

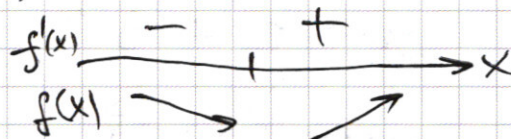
$x = 2: 4 + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64} - 4$ - неверно

$x = 3: 8 + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2+1)(2^{64}-1) =$
 $= 70 + 2^{65} - 2 + 2^{64} - 1$ - неверно

$x = 4: 16 + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{66} - 4$ - верно

$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65} - 70 - (2^{64} - 1)x$

$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{64} + 1$



$x \geq 4$

~~$x = 70$~~ $70: 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^6 + 6)(2^{64} - 1) =$
 $= 70 + 2^{70} - 2^6 + 3 \cdot 2^{65} - 6$
 $2^{70} + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{70} - 64 + 3 \cdot 2^{65} - 6$

Получаем, что $x \geq 4$ и $x \leq 69$

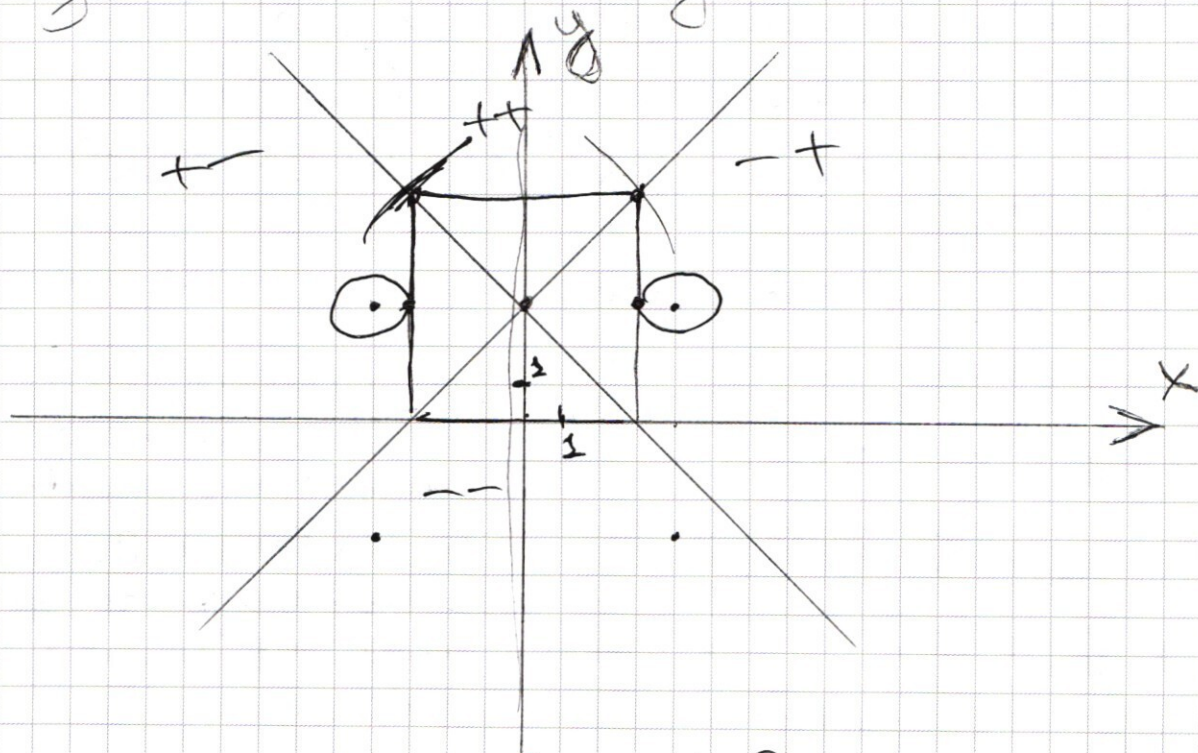
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \end{cases}$$

$$y-3-x=0 \Leftrightarrow y=x+3$$

$$y-3+x=0 \Leftrightarrow y=-x+3$$



$$x=y=0: \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ "++": } y-3-x+y-3+x &= 6 \\ 2y &= 12 \quad y=6 \end{aligned}$$

$$2) \text{ " - " : } -y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$y = 0$$

$$3) \text{ " + " : } y - 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$x = -3$$

$$4) \text{ " - + " : } -y + 3 + x + y - 3 + x = 6$$

$$x = 3$$

Первое уравнение четверки задаёт квадрат
второе уравнение задаёт 4 окр., симм.
отн. начала координат с центрами:

$$O_1(4; 3) \quad O_2(-4; 3) \quad O_3(4; -3) \quad O_4(-4; -3)$$

1) $R = 1$: окр с центрами O_1 и O_2 касаются
квадрата — 2 реш

2) $R = \sqrt{10}$: 4 реш

3) $R = 5$: ~~4 реш~~

4) $R = \sqrt{3^2 + 7^2}$ — 4 реш

5) $R = \sqrt{9^2 + 7^2}$ — 2 реш

В силу симметрии,
если какое-то окр Π
квадрат то симметричная
отн. Оу также Π .
поэтому считаем ~~только~~ ^а
когда окр. имеет 1 общ.
точку с кв.

$$R = 1 \text{ или } R = \sqrt{130}$$

Ответ: ~~$R \in \{1; \sqrt{130}\}$~~
 $a \in \{1; 130\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$3375 = 5 \cdot 675 = 25 \cdot 135 = 125 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$$

□ □ □ □ □ □ □ □

Нужно расставить 3⁴, 3⁴ и 2⁴ в 8 слотов. Нулей быть не может, т.к. произведение обнуляется; других цифр быть не может, т.к. разложение 3375 единственно.

$$\text{количество способов } N = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2!2!} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

Ответ: 560.

2.

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2 \sin 7x \sin 4x - (\sin 11x + \sin 3x) &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 7x \cos 4x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2 \sin 7x (\sin 4x + \cos 4x) &= \sqrt{2} (1 - 2 \sin^2 7x) \\ \sin 7x &= t \end{aligned}$$

3.

$$\left(\frac{y^5}{x} \right) \lg x = y^2 \lg xy \quad (1)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - x \cdot 2(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{D}{4} = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y =$$

$$= y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 =$$

$$= 4(y-1)^2 = (2(y-1))^2$$

$$x = y+2 \pm (2y-2) = \begin{cases} 3y \\ 4-y \end{cases}$$

1) ~~$\left(\frac{y^5}{3y} \right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$~~
 ~~$\left(\frac{y^4}{3} \right) \lg 3y = \left(\frac{y^4}{3} \right) \lg 3y$~~
 ~~$\frac{y^4}{3} = \frac{y^4}{3} \Leftrightarrow y=0$~~
 ~~$\left(\frac{y^4}{3} \right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$~~
 ~~$\left(\frac{8y^4}{243} \right) \lg 3y = \left(\frac{3y^2}{3} \right) \lg 3y^2$~~
 ~~$a \lg a = 10 \lg a$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y}{4-y}\right)^5 \lg(4-y) = y^2 \lg(y(4-y))$$

$$y^5 \lg(4-y) - 2 \lg(y(4-y)) = (4-y)^5 \lg(4-y)$$

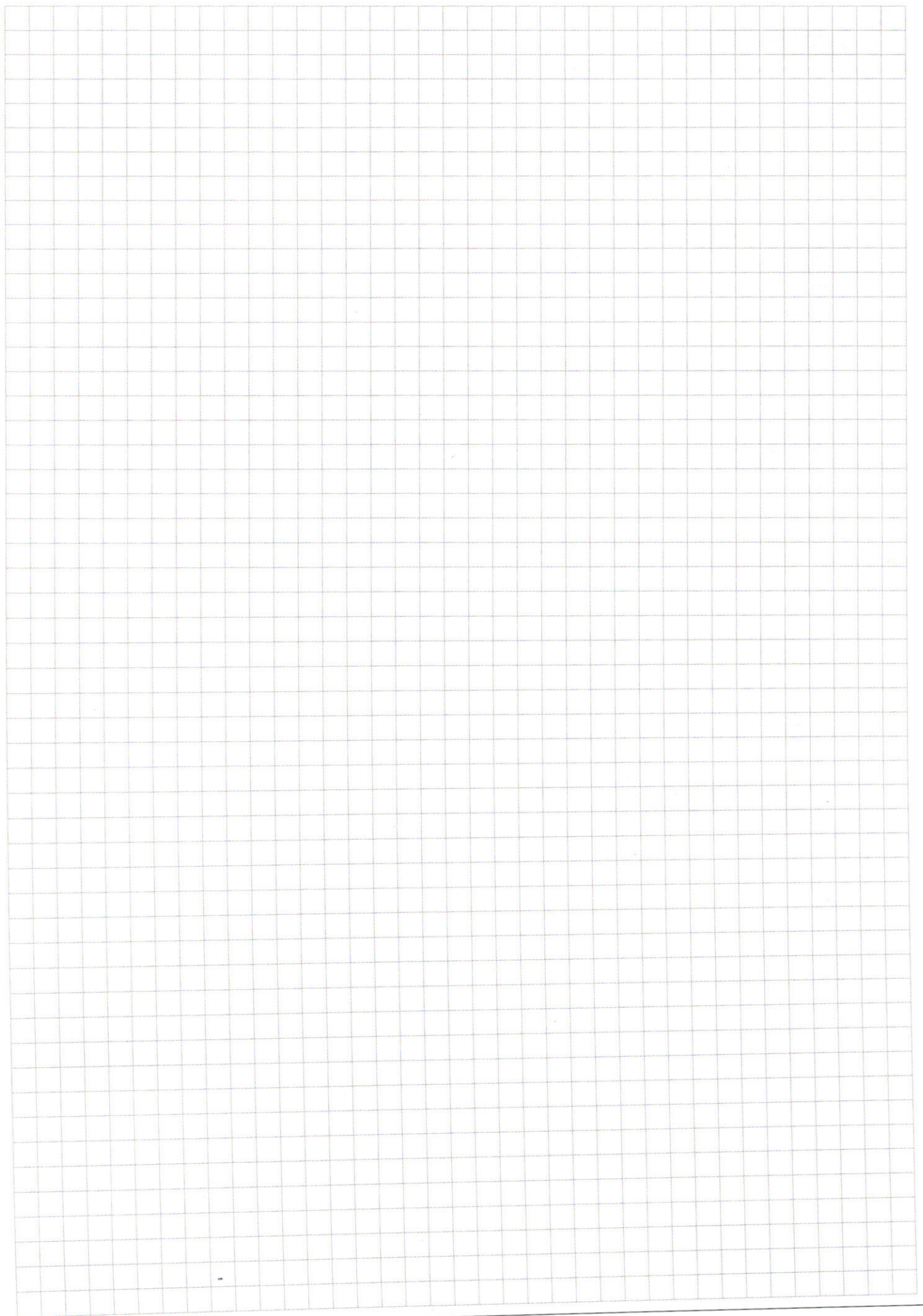
$$y^5 \lg(4-y) - 2 \lg y - 2 \lg(4-y) = 10^{\lg^2(4-y)}$$

$$10^{\lg y (3 \lg(4-y) - 2 \lg y)} = 10^{\lg^2(4-y)}$$

$$\lg y = p \quad \lg(4-y) = q$$

$$p(3q - 2p) = q^2$$

$$q^2 - 3pq + 2p^2 = 0$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)