

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

- ✓ 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow$ в исходном числе есть
три цифры 5; три цифры 3 или цифры 3 и 9

1) три цифры 3

число = 55533311

кол-во комбинаций = $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} =$

= кол-во перестановок всех цифр

Пол-во перестановок цифр в группе / набор
одинаковых цифр)
или написать 2 первых числа, новое число

не получится.

2) цифры 3 и 9

число = 55533111

~~число = 55539111~~

кол-во комб = $\frac{8!}{3! \cdot 3!}$

$A = \text{число комб} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} + \frac{3}{2} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$

$A = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 56 \cdot 3 \cdot 10 = 1680$

Ответ: 1680

стр. 2 на другом
листе

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - \sin 11x\right) - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 3x\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 22x}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 6x}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 14x$$

$$2 \sin\left(-\frac{8x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 14x}{2}\right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 7x + \sin 7x) = \cos 14x$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin \frac{-8x}{2} \sin 7x - 2 \sin \frac{8x}{2} \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x \sin 7x - \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x = \cos 14x - \sin 14x$$

$$\sin 7x (\sin 7x - \sqrt{2} \sin 4x) = \cos 7x (\sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x)$$

$$\sin 7x (\sin^2 7x - 2 \sin^2 4x) = \cos 7x (\sin^2 7x + 2 \sin^2 4x + \sqrt{2} \sin 4x \sin 7x)$$

$$\sin 7x (\sin^2 7x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 4x) = \cos 7x (\sin^2 7x + \sqrt{2} \sin 4x \sin 7x)$$

$$\sin 7x (\sqrt{2} \sin 7x \sin 4x - 2 \sin^2 4x) = \cos 7x \cdot 2 \sin^2 4x$$

$$\sin 7x (\sin 7x - \sqrt{2} \sin 4x) = \cos 7x \cdot \sqrt{2} \sin 4x$$

$$A (\sin 7x - \sqrt{2} \sin 4x) = A \cdot \sin 7x$$

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 7x} = \frac{\sin^2 7x - 2 \sin^2 4x}{\sin^2 7x} = \cos^2 7x - \frac{2 \sin^2 4x}{\sin^2 7x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $x, y > 0$ / и.к. средств. $\lg x$ и $\lg y$

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg x} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x + \lg y}$$

$$y^{3\lg x} = x^{\lg x} y^{2\lg y}$$

$$3\lg x \lg y = \lg x \lg x + \lg y \cdot 2\lg y$$

$$\lg x = a; \lg y = b$$

$$3ab = a^2 + 2b^2; a^2 - 3ab + 2b^2 = 0; a = b \text{ или } a = 2b$$

1) $a = b$

$$\lg x = \lg y; x = y$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$8x - 4x^2 = 0$$

$$x = 0; 2; y = 0; 2$$

не логр

подр $(2; 2)$ подходит

2) $a = 2b$

$$\lg x = 2\lg y; x = y^2$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$y = 0$ - не логр

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y = 3 \quad (27 - 18 - 21 + 12 = 0)$$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 & y - 3 \\ \hline -y^3 + 3y^2 & \\ \hline y^2 - 7y + 12 & \\ -y^2 + 3y & \\ \hline -4y + 12 & \\ -4y + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

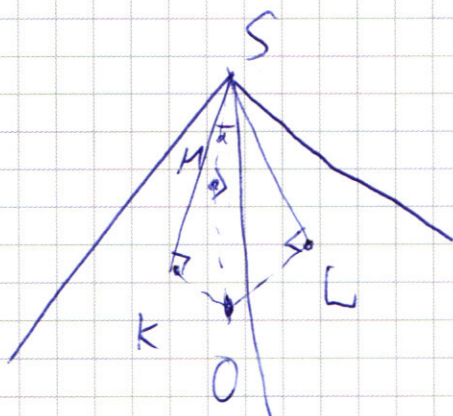
$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ - не логр. (KO)}$$

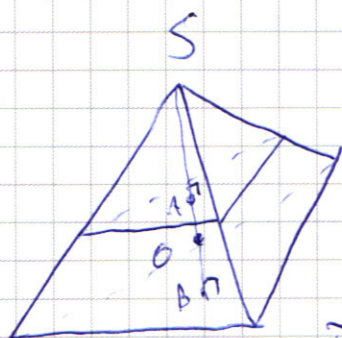
$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ - логр. } x = \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}} \quad / \quad \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}}; \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 7}{2}}$$

Ответ: $(2; 2) ; \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} ; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)$



НЧ
 $\angle SOK = \angle SOL = \angle SOM$ / отсюда и
 равные катеты / $\Rightarrow \angle KSO = \angle LSO =$
 $= \angle MSO = \alpha$

Рассм. пирамиды, образованные углами S и
 плоскостями сечения



АВ - м. кас сферы с плоскостью
 сечения

SAB - одна грань, плоскости
 основания пирамиды $\perp SAB$

Получимся 2 подобные пирамиды
 (срезаем параллельно из т. S с коэф. $\frac{SB}{SA}$;
 плоскость π перейдет в $B \Rightarrow$ пирамида маленькая
 перейдет в большую)

$$SO = \frac{OK}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}; \quad OA = OB = R$$

$$\left(\frac{SB}{SA} \right)^2 = \frac{SB}{SA} = \frac{4}{1} \quad \left(\text{площади основания подобны, как квадраты} \right.$$

высот)

$$\left(\frac{\frac{1}{\sin \alpha} + 1}{\frac{1}{\sin \alpha} - 1} \right)^2 = 4; \quad \frac{\frac{1}{\sin \alpha} + 1}{\frac{1}{\sin \alpha} - 1} = 2; \quad \frac{1}{\sin \alpha} + 1 = \frac{2}{\frac{1}{\sin \alpha} - 1} - 2; \quad \frac{1}{\sin \alpha} = 3; \quad \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

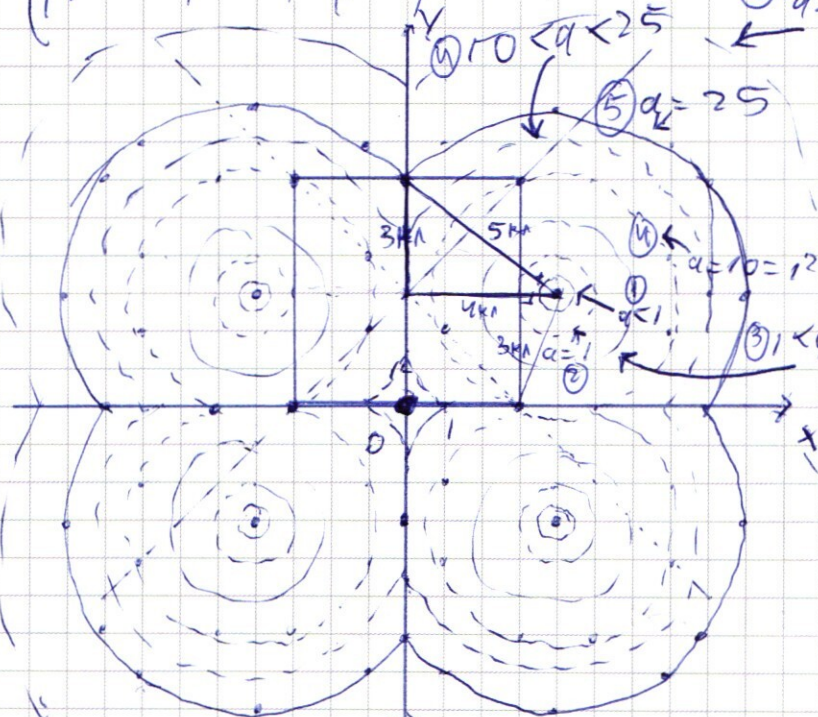
$$\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases} \leftarrow \begin{aligned} &y = x+3, y = -x+3 \text{ — прям.} \\ &\textcircled{6} a > 25 \text{ — не реш.} \end{aligned}$$



$$(x+3-3+x) = 6$$

$$x = \pm 3$$

$$2) y = -x+3$$

$$(-x+3-3-x) = 0$$

$$x = \pm 3$$

Получается

график кривого
уравнения — квадрат

график второго члена «кр» с центрами $(\pm 4, \pm 3)$

Поскольку, столько решений, в зависимости от a

① $a < 1$ — не реш

② $a = 1$ — 2 реш. $(-3, 3)$ и $(3, 3)$

③ $a \in (1, 10]$ — 4 реш

④ $a \in (10, 25]$ — 4 реш

⑤ $a = 25$ — 2 реш $(0, 0)$ и $(0, 6)$

⑥ $a > 25$ — не реш

Ответ: $a = 1; 25$

N7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 \cdot (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$70 \cdot (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$Z = 70 \cdot (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} > 0;$$

$$Z' = 2^{64} - 1 - \ln 2 \cdot 2^x = 0$$

$$x_0 = \log_2 \frac{2^{64} - 1}{\ln 2} \approx 64 - \text{сферич.}$$

Максимум (если есть)

$$Z(0) < 0$$

$$Z(+\infty) < 0$$

$$Z(60) = 70 \cdot (2^{64} - 1) \cdot 60 - 2^{60} - 3 \cdot 2^{65}$$

$$= 70 \cdot 30 \cdot 2^{65} - 60 \cdot 2^{60} - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 70 \cdot 27 \cdot 2^{65} - 2^{60} > 0$$

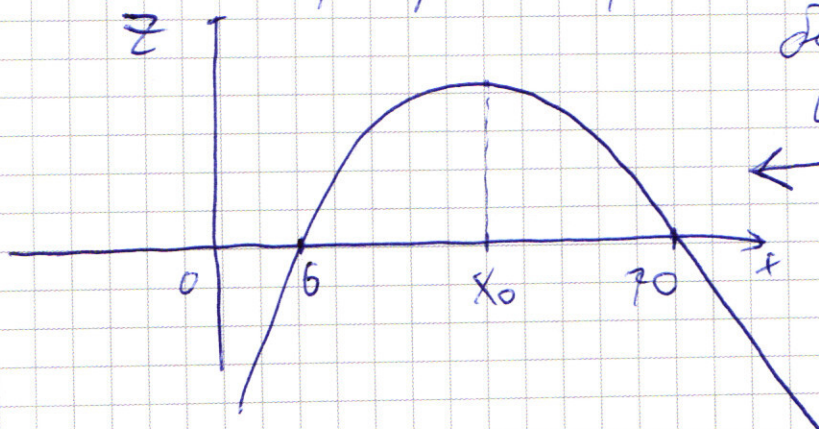
на промежутке от 0 до $+\infty$ есть максимум (в т. ч. x_0)

$$Z = 0; \quad 70 \cdot (2^{64} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 - x = 2^x + (6 - x) \cdot 2^{64}$$

$x = 6; 70$ / ~~сферич. ради~~ это все реш, т. к. их не

больше двух, т. к. график имеет вид



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$z = \underbrace{(70 + (2^{64} - 1)x)}_{\geq y} - \underbrace{(2^x + 3 \cdot 2^{65})}_{< y} - \text{количество возможных } y \text{ при данном } x \text{ (если } z \geq 1)$$

$$z \geq 1 \text{ при } x \in [7; 69]$$

$$\text{Погда кол-во пар } (x, y) = A = \sum_{x=7}^{69} z(x)$$

$$A = \sum_{x=7}^{69} ((70 + (2^{64} - 1)x) - 2^x - 3 \cdot 2^{65})$$

$$A = \sum_{x=7}^{69} ((70 - 3 \cdot 2^{65}) + (2^{64} - 1)x - 2^x)$$

$$A = \sum_{x=7}^{69} ((2^{64} - 1)x - 2^x) + ((70 - 3 \cdot 2^{65}) / (69 - 7 + 1)) =$$

$$A = (2^{64} - 1) \sum_{x=7}^{69} x - \sum_{x=7}^{69} 2^x + 63 \cdot (70 - 3 \cdot 2^{65})$$

$$\sum_{x=7}^{69} x = \frac{69 \times 7}{2} \cdot (69 - 7 + 1) = \frac{76}{2} \cdot 63 = 63 \cdot 38$$

$$\sum_{x=7}^{69} 2^x = 2^7 + 2^8 + \dots + 2^{69} = 2^7 (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{62}) =$$

$$= 2^7 \cdot \frac{2^{63} - 1}{2 - 1} = 2^7 \cdot (2^{63} - 1) = 2^{70} - 2^7$$

$$A = (2^{64} - 1) \cdot 63 \cdot 38 - 2^{70} + 2^7 + 63 \cdot 70 - 63 \cdot 3 \cdot 2^{65}$$

$$A = 2^{64} \cdot 63 \cdot 38 - 2^{70} + 128 + 63 \cdot 70 - 63 \cdot 6 \cdot 2^{64} - 63 \cdot 38$$

$$A = 2^{64} (63 \cdot 38 - 63 \cdot 6 - 64) + 128 + 63 \cdot 70 - 63 \cdot 38$$

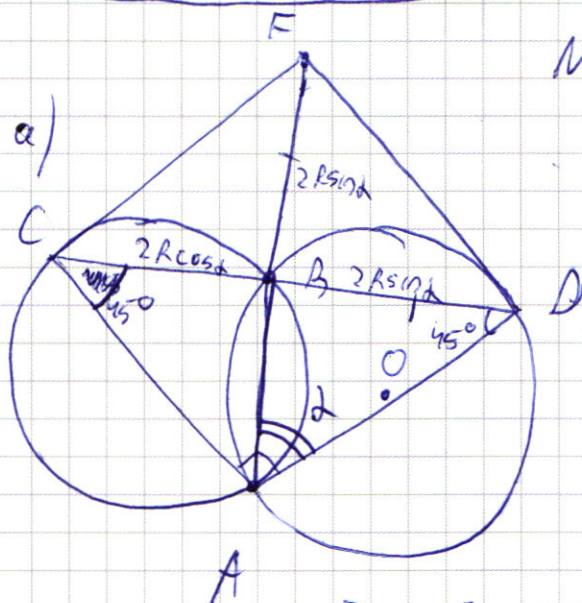
$$A = 2^{64} (63 \cdot 32 - 64) + 128 + 4410 - 63 \cdot 38$$

$$A = 2^{60} (61) + 128 + 63 \cdot 32$$

$$A = 61 \cdot 2^{69} + 67 \cdot 32 =$$

$$= 61 \cdot 2^{69} + 2144$$

$$\text{Answer: } 61 \cdot 2^{69} + 2144$$



N 6

Окружности равны $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ADC = \angle ACD$ (отражаются на дугу AB)

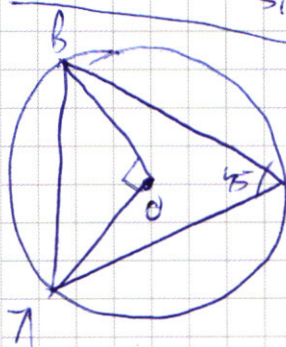
$$\angle ADC = \angle ACD = 180 - \angle CAD =$$

$$= 180 - 90 = 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ADC = \angle ACD = 45^\circ$$

$$\Delta ABD: \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin 45^\circ}$$

Проведем AB; $\angle BAD = \alpha$ ($\alpha \in (0; 90)$)



O - центр окр ABD

$$\angle AOB = 2\angle ADB \text{ (центр)} = 90^\circ$$

$$OA = OB = R \text{ (о-центр)}$$

$$AB = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$$

$$BD = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \alpha = 2R \sin \alpha = BF$$

$$\text{аналогично в } \Delta ABC: CB = 2R \cos \alpha \text{ (так } \angle BAC = 90 - \alpha)$$

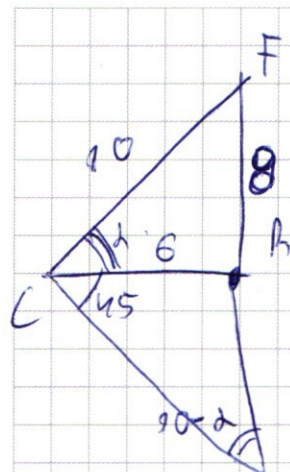
$$\Delta CBF: \angle CBF = 90^\circ \Rightarrow CF^2 = BF^2 + BC^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha =$$

$$= 4R^2; \boxed{CF = 2R}; \boxed{CF = 10}$$

$$\text{Answer: } 10 = CF$$

$$\delta) BC = 6 = 2R \cos \alpha = 10 \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{3}{5}; \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\text{М. син } \alpha \text{ в } \triangle ABC: \frac{AC}{\sin(45 + 90 - \alpha)} = \frac{AB}{\sin 45}$$

$$AC = AB \sqrt{2} \cdot \frac{\cos(45 - \alpha)}{\sin 45}$$

$$AC = 2R \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \right) = R\sqrt{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) = 9\sqrt{2}$$

$$\sin \angle FCB = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \angle FCB = \alpha$$

A

$$\begin{aligned} S_{\triangle ACF} &= \frac{1}{2} \cdot CF \cdot CA \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9\sqrt{2} \cdot \sin(45 + \alpha) = \\ &= 35\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha \right) = 35(\sin \alpha + \cos \alpha) = 35 \cdot \frac{7}{5} = 49 \end{aligned}$$

Ответ: $S_{\triangle ACF} = 49$

N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\cos 11x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 3x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 11x \sin \frac{\pi}{4} + \sin 3x \sin \frac{\pi}{4} = \cos 4x$$

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\text{пусть } y = x + \frac{\pi}{4}; \quad x = y - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(11y - \frac{11\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3y - \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(4y - \frac{4\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(11y - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(3y - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(4y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(11y + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(3y\right) = \cos\left(4y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\sin 11y - \sin 3y = -\sin 4y}$$

$$2 \sin 7y \cos 4y = -2 \sin 7y \cos 7y$$

$$\sin 7y (\cos 4y + \cos 7y) = 0$$

$$\sin 7y \cdot 2 \cos \frac{11y}{2} \cos \frac{3y}{2} = 0$$

$$\sin 7y = 0; \quad y = \frac{\pi t}{7}; \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{11y}{2} = 0; \quad y = \frac{\pi}{11} + \frac{2\pi k}{11}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{3y}{2} = 0; \quad y = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = y - \frac{\pi}{4}$$

Ответ:

$$x = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi t}{7}; & t \in \mathbb{Z} \\ -\frac{7\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}; & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 =$$

$$= \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{состав}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \text{ и } 2} = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

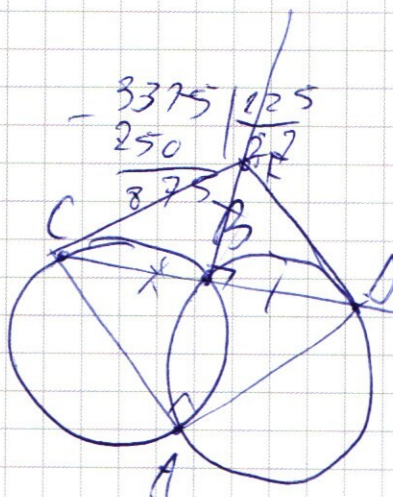
$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 25} \\ \underline{25} \\ 87 \\ \underline{75} \\ 125 \end{array}$$

$$555 \cdot 3911 \quad 555 \cdot 3231$$

$$4! \cdot 8! \cdot 2! = 3! \cdot 9! \cdot 3!$$

$$9 \cdot 50$$

$$\cos 11x - \sin 11x$$



$$2 \sin(-4x) \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x = 2 \cos 9x$$

$$= 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

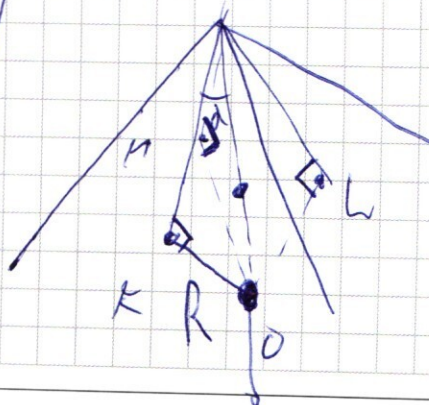
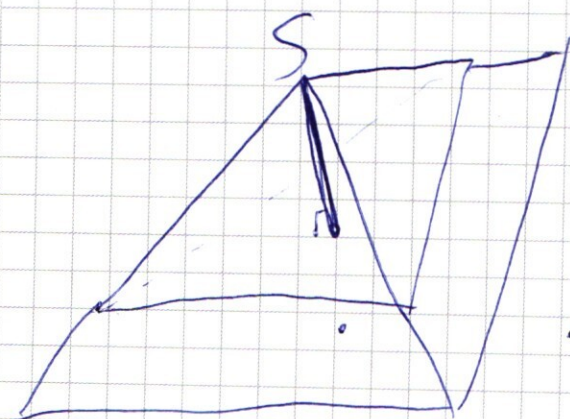
$$= 2 \sin 4x \sin 90$$

$$y = \frac{1}{\sin \alpha} \approx 1$$

$$\frac{y}{\sin \alpha} - y = \frac{1}{\sin \alpha} \approx 1$$

$$\frac{3}{\sin \alpha} = 5$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$



$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y}{x} \right)^{5/9} &= y^{2/9} x \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \\ x^2 - 2xy - y^2 & \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} x > 0 & \quad (x \sin 30^\circ - x \cos 50^\circ) / x \sin 50^\circ = \\ xy > 0 & \quad = (x \sin 50^\circ + x \cos 50^\circ) / x \sin 50^\circ = \\ & \quad = -\sqrt{2} \sin 45^\circ \cos 45^\circ - \sqrt{2} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \\ & \quad = -\sqrt{2} \sin 90^\circ = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$= 1 - x \sin 20^\circ$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 8x - 10y^2 + 24y = 0$$

$$(x - 2y)^2 + (x - 16)^2 + 256 + 24y - 10y^2$$

$$\frac{y^{5/9} x}{x^{1/9}} = y^{2/9} x$$

$$y^{5/9} x = x^{1/9} \cdot y^{2/9} x = y^{2/9} x$$

$$y^{3/9} x = x^{1/9} \cdot y^{2/9} y$$

$$3/9 x \cdot 1/9 y = 1/9 x \cdot 1/9 x + 2/9 y \cdot 1/9 y$$

$$1/9 x - 1/9 y = 0$$

$$3x = 2y + 20$$

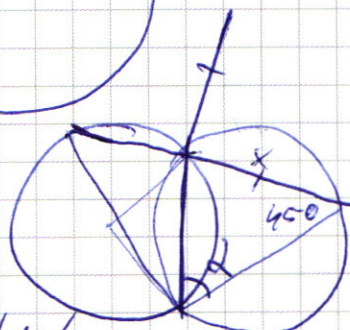
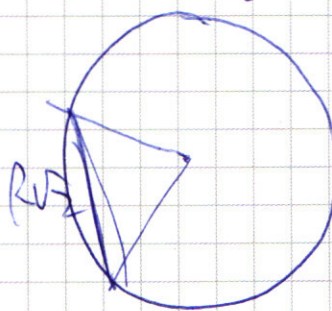
$$9x - 3y + 20 = 0$$

$$9 = 6$$

$$9 = 20$$

$$\pm 8 - 8 \mp 14 \pm 2$$

$$\pm 27 - 18 \mp 21 \pm 2$$



$$\frac{R \sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$27 - 18 - 21 \pm 2 = 39 - 27 = 0$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ - 18 \\ \hline 9 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} - a$$

$$a = \frac{\pi}{2} - a_0$$

$$\cos a_0 - \sin b = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - a_0 - b}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} + b - a_0}{2}$$

$$\sin 60 - \sin 30 = 2 \sin 15 \cos 45 \quad 2 + \sqrt{3}$$

$$\sin 90 - \sin 30 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\cos \sin 15} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\sin 90 - \sin 30 = 2 \cdot \sin 30 \cos 60 =$$

$$\sin 90 + \sin 30 = 2 \sin 60 \cos 30 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}} = \sin 15$$

$$\cos a - \cos b = \sin(90 - a) - \sin(90 - b) =$$

$$= 2 \sin \frac{b-a}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

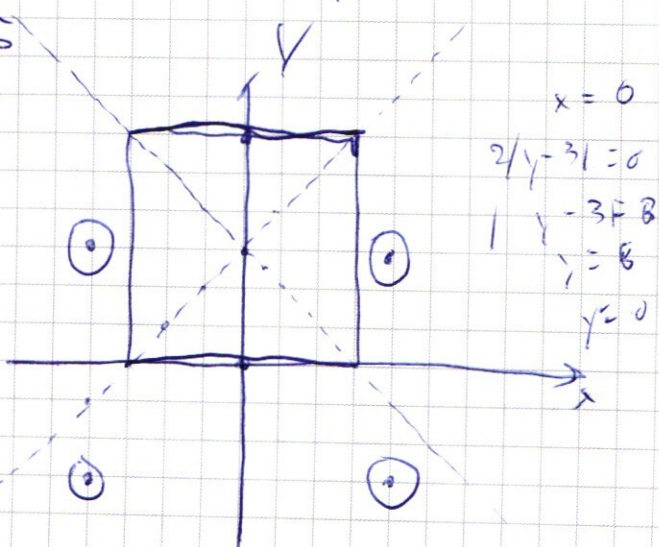
$$y = -x + 3$$

$$y = x + 3$$

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ |x| + |y - 3 + x| = 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x+4)^2} + (y-3)^2 = 9$$

NS



$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot 2$$

$$(2^{64} - 1)x + 70 \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$(2^{64} - 1)x + 70 > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$(2^{64} - 1)x + 70 > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64} \cdot 100 \approx$$

$$2^{100}$$

$$y = (2^{64} - 1)x - 2^x + 70 - 3 \cdot 2^{65} > 0$$

$$y' = (2^{64} - 1) - \ln 2 \cdot 2^x = 0$$

$$2^x + 2^{64}(6-x) = 70 - x$$

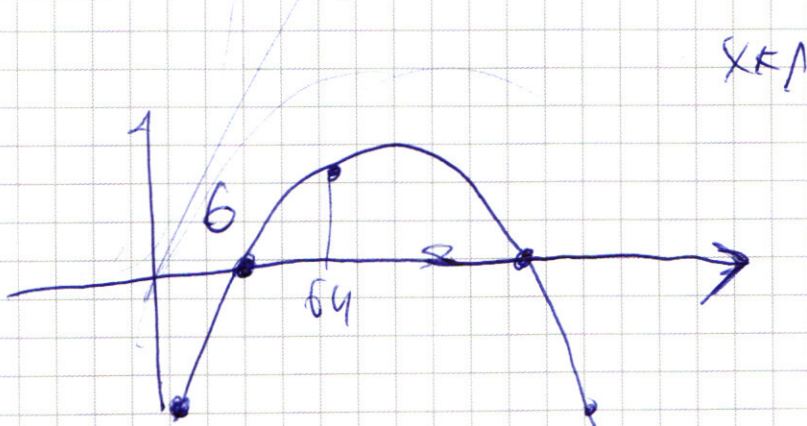
$$x = 70$$

$$x = 6$$

$$(2^{64} - 1) = \ln 2 \cdot 2^x$$

$$x = \log_2 \frac{2^{64} - 1}{\ln 2} \approx \log_2 2^{64} - 1 - \log_2 \ln 2 \approx 64$$

$x =$



$x \in \mathbb{R}$

$$y = 2^x$$

$$x = 64$$

$$(2^{64} - 1) \cdot 64 - 2^{64} + 70 - 3 \cdot 2^{65}$$

$$= 63 \cdot 2^{64} - 3 \cdot 2^{65} + 70$$

$$(2^{64} - 1) \cdot 60$$

$$x = 6$$

$$(2^{64} - 1) \cdot 6 - 2^6 + 70 - 3 \cdot 2^{65}$$

$$= -2^6 \cdot 6 + 70 = 0$$

$$x = 65$$

$$(2^{64} - 1) \cdot 65 - 2^{65} + 70$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin \frac{7x}{2} \sin 7x - 2 \sin \frac{7x}{2} \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$- \sqrt{2} \sin 7x (\sin 7x + \cos 7x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x =$$

$$\sin 7x (\sin 7x - \sqrt{2} \sin 14x) = \cos^2 7x / (\cos^2 7x + \sqrt{2} \sin 14x)$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$e^i = a \quad \text{or} \quad e^{ix} = a$$

$$\cos 11x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos 3x \cos \frac{\pi}{4} -$$

$$- \sin 11x \sin \frac{\pi}{4} - \sin 3x \sin \frac{\pi}{4} = \cos 11x$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) =$$

$$= \cos 14x$$

$$\frac{a^7 - a^{-7}}{2i} \left(\frac{a^7 - a^{-7}}{2i} - \sqrt{2} \right) =$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) =$$

$$= \cos 14x$$

$$- \sqrt{2} \frac{a^4 - a^{-4}}{2i} \left(\frac{a^7 - a^{-7}}{2i} + \frac{a^7 + a^{-7}}{2} \right) = \frac{a^{14} - a^{-14}}{2} \cdot a^{14}$$

$$= \sqrt{2} \frac{a^{18} - a^{10}}{2i}$$

$$- 2 \sin 14x \sin(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$- \sqrt{2} \frac{a^{11} - a^3}{2i} \left(\frac{a^{14} - 1}{2i} + \frac{a^{14} - 1}{2} \right) = \frac{a^{28} - 1}{2}$$

$$- \sqrt{2} (a^{11} - a^3) (a^{14} - 1 + i a^{14} \cdot i) = - 2 a^{28} + 2$$

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

~~$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 3x + \frac{\pi}{4}$$~~

$$x + \frac{\pi}{4} = y; \quad x = y - \frac{\pi}{4}$$

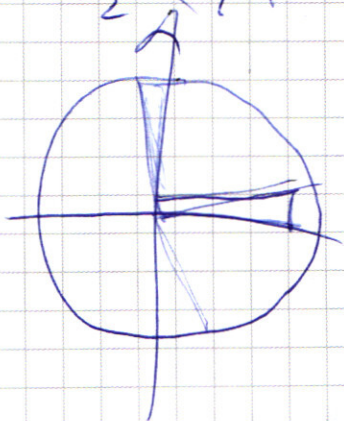
$$\cos\left(11y - \frac{11\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3y - \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(14y - 14 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(11y - \frac{10\pi}{4}\right) + \cos\left(3y - \frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(14y - \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(11y - \frac{5\pi}{2}\right) + \cos\left(3y - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(14y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{5\pi}{2} - 11y \quad \left(\frac{3\pi}{2} + 11y\right) \cos$$

$$-\sin 11y + \sin 3y = \sin 14y$$



$$\sin \frac{\pi}{2} - a + \sin \frac{\pi}{2} - b =$$

$$= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

