

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА'

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1 $69827 = 3^8 \Rightarrow$ цифры в 8-значном числе могут быть 1, 3, 9
перебором случаев и по кол-ву 3 в числе
(очевидно что произведение цифр $3^8 \Rightarrow$ только 1, 3, 9
больше 10 быть не может)
если 8 троек то такое число 1 ($3 \dots 3$)
если 6 троек одна 9 одна 1 то $8!$ вариантов
переставить хотя как-нибудь $6!$ вариантов переставить
тройки $\Rightarrow \frac{8!}{6!} = 56$ чисел
если 4 тройки 2 девятки 2 единицы то вер. $\frac{8!}{4!2!2!} =$
 $= 420$ чисел
если 2 тройки 3 девятки 3 единицы то вер. $\frac{8!}{3!3!2!} =$
 $= 560$
если 0 троек 4 девятки 4 ед. то вер. $\frac{8!}{4!4!} = 70$
Тогда всего вариантов $560 + 420 + 70 + 56 + 1 = N$ -
кол-во чисел

Ответ $N = 1207$

Задача 2 используя формулы суммы
в произведении полиномов

$$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(2\cos 5x + 2(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x)) \cdot (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$\downarrow$ гон. гр. $\parallel 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\text{нагн. на } \cos 2x \neq 0$

$$(2\cos 5x + 2\cos(2x + \frac{\pi}{4}))(\tan 2x + 1) = 0$$

$\nearrow \cos 2x = 0$
не абл. реш.

$$4 \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} (\tan 2x + 1) = 0$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi n \end{cases}$$

Задача 4 Рассмотрим плоскости S_2 и S_1 касающиеся d_2 - площади сечения и $\perp SO$ Тогда $\frac{S_1}{S_2} = k^2$

k - коэффициент подобия Δ одной из граней

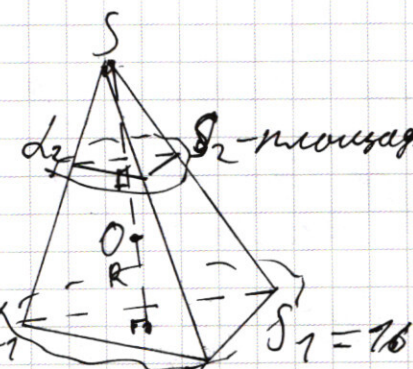
$$k = \frac{SO+R}{SO-R} = \frac{4}{3} \quad | +1$$

$$\frac{2SO}{SO-R} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{SO-R}{2SO} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{R}{2SO} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{R}{2SO} = \frac{1}{14} \quad \frac{R}{SO} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow SO = 7R$$

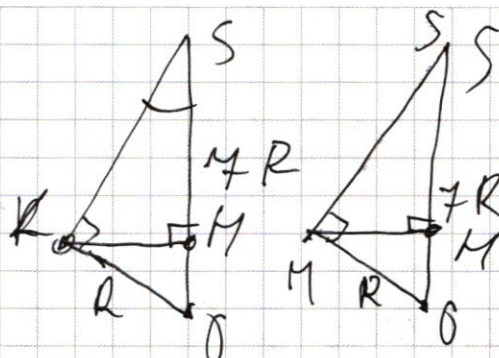


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим $\triangle SOK$

$$\angle SOK \sin \angle KSO = \frac{R}{7R}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$$



Заметим, что $\triangle MSO$ и $\triangle LSO$ будут равны $\triangle KSO$ по катету и гипотенузе, тогда $\perp$ из точек K, M падает на точку $N \in SO$

SN — расстояние до плоскости сечения $KMB \Rightarrow$

$$\frac{S_2}{S_{KBM}} = \left(\frac{SO - R}{SM}\right)^2 \quad \text{По теореме Пифагора} \quad SM^2 = SK^2 - KM^2 \quad SK^2 = 48R^2$$

$$KM = SK \cdot \sin \angle KSO = \sqrt{48} R \cdot \frac{1}{7} = \frac{\sqrt{48}}{7} R$$

$$SM^2 = 48R^2 - \frac{48}{49} R^2 = \frac{48^2}{49} R^2$$

S_{KBM} — площадь сечения $\triangle S$, сме $\triangle KLM$!

$$\frac{S_2}{S_{KBM}} = \frac{36 R^2}{\frac{48^2}{49} R^2} = \frac{49}{64} \quad S_{KBM} = \frac{64}{49} \cdot S_2 = \frac{576}{49}$$

Ответы $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$

$$S_{KBM} = \frac{576}{49}$$

Задача 5 Построим график того чп-я, разрывная модуль, наклеивая соответствующее условия на молярное выражение

Задача 6.

Пусть $\angle BAC = \alpha$ $\angle BAD = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

тогда $\angle O_1 B = 2\alpha$, $\angle O_2 D = 2\beta$

как они и центральные.

тогда $\angle O_1 C B = 90 - \alpha$

$\angle O_2 B D = 90 - \beta$

тогда $BC = 2R \cdot \cos(90 - \alpha)$

$BD = 2R \cdot \cos(90 - \beta)$

$BC = 2R \sin \alpha$ $BD = 2R \sin \beta$

тогда $BC^2 + BD^2 = 4R^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)$ а т.к.

$\alpha = 90 - \beta \Rightarrow BC^2 + BD^2 = 4R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4R^2$, а по теореме Пифагора $CF^2 = BC^2 + BF^2$

$BF = BD \Rightarrow CF^2 = 4R^2$ $CF = 2R = 34$

а) $BC = 16$ $\sin \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{8}{17}$

$\angle ACD = \angle ABD$ т.к. опираются на хорду AB окружностей со взаимными радиусами.

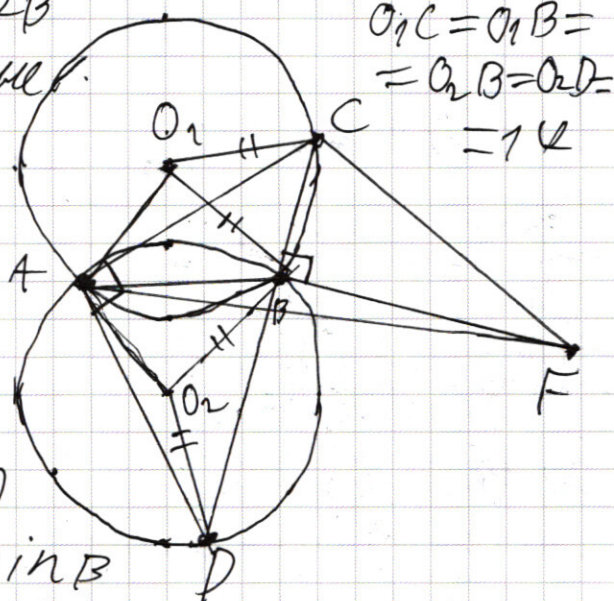
$\angle ACD \neq \angle ABD = 90^\circ =$ они по $45^\circ \Rightarrow \angle A O_1 B = 90^\circ -$

центральный $\angle A O_1 C = 90 + 2\alpha$ тогда $AC = 2R \sin(45 + \alpha)$
 $= 2 \cdot 17 \left(\frac{8}{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{17} \right) = 23\sqrt{2}$ $\cos \angle FCB = \frac{BC}{CF} = \frac{8}{17}$

тогда $\angle ACF = 45^\circ + \angle FCB$

$\Rightarrow \sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \angle FCB) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{17} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{17}$

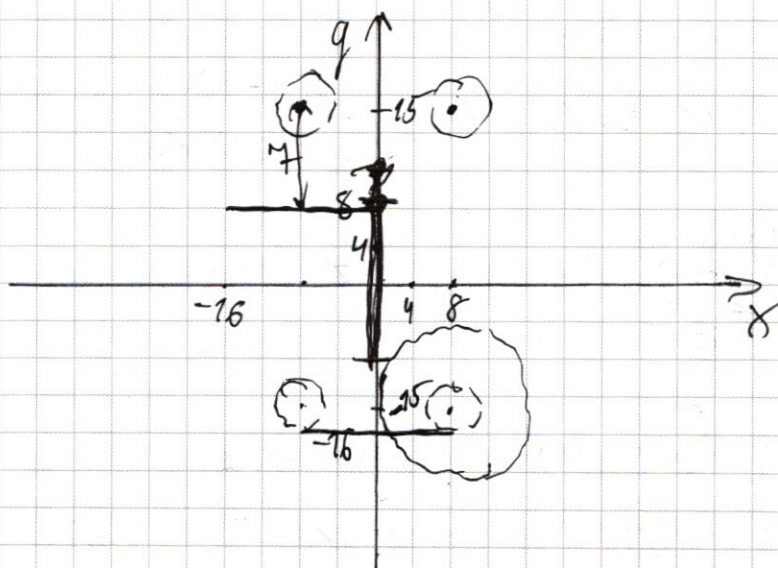
тогда площадь $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \sin \angle ACF \cdot AC \cdot CF$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{ll}
 + & x=0 \Rightarrow y \geq -8 \\
 + & y \leq 8 \\
 - & x=-16 \Rightarrow y \leq 8 \\
 - & y \geq -32 \\
 + & y = -8 \Rightarrow x \geq -36 \\
 - & x \leq 8 \\
 + & y = 8 \Rightarrow x \leq -36 \\
 - & x \geq 0 \\
 + & y = -8 \Rightarrow x \leq 0 \\
 - & x \geq 16
 \end{array}$$

Построим график



2-ая чр = 2 при
 $x > 0$ $y > 0$ - отрицательны
 и 3 симметричны
 ей относительно осей x и y .
 x и y под модулем
 с центром $8; 15$ и 16
 и 16 радиусом 4

Заметим при $a < 1$ нет решений
 при $a \geq 1$ и только 2 окружности начи-
 нают пересекать 2ой график $\Rightarrow$ 2 реш.
 при $a = 7$ левая верхняя окружность
 касается 1ого графика $\Rightarrow$ решения есть
 3 $\Rightarrow a < 7$ при $a > 7$ решений больше

Ответ $a \in [1; 7)$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{23}{17} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 = 2.520 = 1054$$

Ответ а) $CF=34$

$$S_{\Delta ACF} = 1054$$

Задача 3 $\int \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(y)} = x^2 \ln(xy^2)$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 - 12x + 4y = 0$$

$$\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(y)} = \ln(x^2 \ln(xy^2))$$

$\ln(-y) \Rightarrow y < 0$
 $\Rightarrow x > 0$

$$(y + 3x)(y - x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\ln(-y) \cdot (\ln(x^7) - \ln(y)) = (2 \ln x + 2 \ln y^2) \ln x$$

подставим $y = -3x$

$$\ln(-3x) (7 \ln(x) - \ln(-3x)) = (2 \ln x + 4 \ln(-3x)) \ln x$$

$\ln(-3)$ возникает противоречие т.к. есть x и $-x$ под логарифмом $\Rightarrow y = -3x$ не подходит

$$\ln(x-4) (7 \ln x - \ln(x-4)) = (2 \ln x + 4 \ln(x-4)) \ln x$$

$$\ln(3x) (7 \ln x - \ln(3x)) = (2 \ln x + 4 \ln(3x)) \ln x$$

$$14 \ln^2 x + 6 \ln 3 \ln x + \ln^2 3 = 6 \ln^2 x + 4 \ln 3 \ln x$$

(Продолжение на 8 листе)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\begin{array}{r} 64824 \overline{) 27} \\ \underline{54} \\ 108 \\ \underline{84} \\ 2400 \\ \underline{2100} \\ 300 \\ \underline{280} \\ 20 \end{array}$$

$$2401 \overline{) 7} \Rightarrow 64824 = 3^3 \cdot 7^4 \text{ Тогда}$$

произведение цифр числа делится на $3^3 \cdot 7^4$. Тогда число может состоять

из: ① $3 \times 3 \times 4 \times 7 \times 1 \times 1$ Тогда количество перестановок $\frac{8!}{3!4!} = 280$

② $1 \times 3 \times 4 \times 7 \times 1 \times 2 \times 1$ Тогда кол-во перестановок $\frac{8!}{4!2!} = 840$

Тогда всего вариантов $N = 280 + 840 = 1120$

Ответ $N = 1120$

Очевидно не может быть множителями 3×7
 $3^3 \cdot 7^2$ т.к. они больше 10 и цифрами
не являются.

$$5 \ln^2 x - 2 \ln x \ln 3 - \ln^2 3 = 0$$

$$\ln x = \frac{\ln 3 \pm \sqrt{\ln^2 3 + 5 \ln^2 3}}{5} \Rightarrow \ln x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5} \ln 3$$

$$x = 3^{\frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}} \quad y = -3 \cdot 3^{\frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}}$$

$$y - x > 0 \quad x < 4$$

подставим $y = x - 4$

$$\ln(4-x)(7 \ln x - \ln(4-x)) = (2 \ln x + 4 \ln(4-x)) \ln x$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln(4-x) + \ln^2(4-x) = 0$$

$$\ln x = \frac{3 \ln(4-x) \pm \sqrt{9 \ln^2(4-x) - 8 \ln^2(4-x)}}{2} \Rightarrow$$

$$\ln x = \begin{cases} \ln(4-x) \\ \frac{1}{2} \ln(4-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - x \Rightarrow x = 2 \\ x = \sqrt{4-x} \quad x^2 + x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{н.к. } x > 0$$

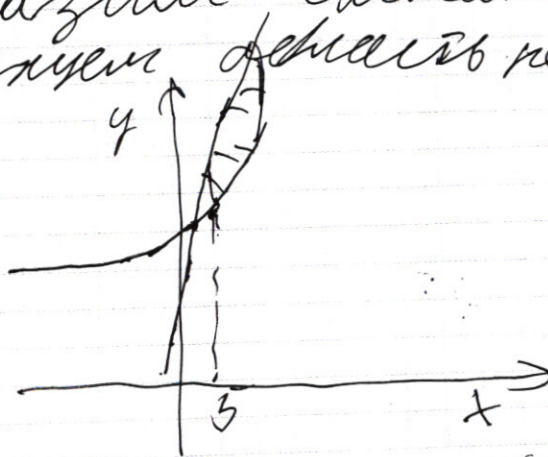
$$y = -2 \quad y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - 4$$

Ответы $\begin{cases} x = 3^{\frac{1+\sqrt{6}}{5}} \\ y = -3 \cdot 3^{\frac{1+\sqrt{6}}{5}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3^{\frac{1-\sqrt{6}}{5}} \\ y = -3 \cdot 3^{\frac{1-\sqrt{6}}{5}} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases}$$

все ответы удовлетворяют $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Задача 7 изобразим схематично график в заштрихованной области реш. неравенств



значения попарно поочередно вставить для y можно найти как $f(x) - g(x)$, где $f(x) = 93 + 3(3^{27} - 1)x$ $g(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

Заметим $f(x) = g(x) \Leftrightarrow y$

Допустим $f(5) - g(5) = 93 + 5 \cdot 3^{28} - 15 - 3^5 - 4 \cdot 3^{28} = 3^{28} - 125$
~~использовать~~ ~~добавить~~ 1 к это будет кан-
 дидатом ~~акции~~ ~~оригиналу~~ $x=5$ и y -целое

нужно считать все $f(x) - g(x) - 1$ пока $f(x) - g(x) > 0$ при этом эти корни $f(x) = g(x)$ ~~не являются~~ на полноранга точки когда найдем полонимельна $x=31$

$$f(31) - g(31) = 93 + 31 \cdot 3^{28} - 93 - 3^{31} - 9 \cdot 3^{28} = 0$$

$$n \sum_5^{30} 93 + n \cdot 3^{28} - 3n - 3^n - 4 \cdot 3^{28} = ?$$

$$= 25 \cdot 93 + 15 \cdot 30 - 3 \cdot 15 \cdot 30 - 25 \cdot 3 - 24 =$$

~~Решение верно. про~~

~~$= 92.24 \neq 900 + 153$~~

$$= 24 \cdot 93 + 15 \cdot 30 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 15 \cdot 30 - \frac{24 \cdot 3^{30} - 1}{3 - 1} - 24 \cdot 43^{28}$$

$$-24 = 92 \cdot 24 + 450 \cdot 3^{28} - 1350 - \frac{243 \cdot 3^{30}}{2} - 24 \cdot 4 \cdot 3^{28}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 & -\frac{x^4}{y} \quad y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y \quad \ln 3 \\
 & \ln 3 + \ln x \quad -3x(x-4) \quad \begin{array}{r} 64827 \overline{) 27} \\ 54 \quad \quad \quad 207 \\ \hline 108 \end{array} \\
 & \ln^2 x + \ln^2 3 + y(y-4) \quad 5 \quad 3.28 \\
 & y(y-4+x) - 3x(x-4+y) \\
 & (y-3x)(y-x-4) \\
 & \ln \left(-\frac{x^4}{y} \right) = \ln x^2 \ln(xy^2) \\
 & \ln(y) (\ln x^4 - \ln(y)) = 2 \ln(xy^2) \ln x \\
 & \ln(y) (\ln(x^4) - \ln y) = 2(\ln x + 2 \ln y) \ln x \\
 & \ln(3x) (7 \ln x - \ln 3x) = (2 \ln x + 4 \ln 3x) \ln x \\
 & (\ln 3 + \ln x) (7 \ln x - \ln 3 - \ln x) = (6 \ln x + 4 \ln 3) \ln x \\
 & \ln x \\
 & (\ln 3 + \ln x) \ln x - \ln 3 \\
 & \ln(y) (\ln x^4 - \ln(y)) \quad (y+3x)(y+4-x) \\
 & y(y+4) + 3x(4-x+y)
 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1+16}}{2}$$

$$x - 8 + 8 \leq 0$$

$$x \leq 0$$

$$x + 8 + 8 \geq 0$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{16} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \left(\frac{SO-R}{SO+R}\right)^2$$

$$30 \cdot 81 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{R}{250}$$

$$\frac{8}{74} - \frac{4}{74} = \frac{R}{250} \Rightarrow \frac{R}{50} = \frac{1}{4}$$

$$15 \cdot 81 = 15$$

$$\frac{5 \cdot 0}{2}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{SO-R}{SO+R} \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{250}{SO+R}$$

$$\sqrt{48}R = \sqrt{48R^2 - 48R^2} = \frac{48R}{49} = \frac{48}{7}R$$

$$BC(BC+BD) = OC^2 - 14^2$$

$$64$$

$$CF = \sqrt{BD^2 + BC^2}$$

$$BC^2 + BD^2 + 2BCBD = OC^2 + OD^2 - 2 \cdot 14^2$$

$$L + B = 90$$

$$F = 2L + 2B$$

$$\frac{289}{64} \cdot \frac{835}{25}$$

$$\frac{835 \cdot 7 \cdot 5}{82}$$

$$-16 + 8 + y \geq 0$$

$$-x - y - 8 - x + y - 8 = 16$$

$$25 \sin(90 + L) R - 2x = 316$$

$$2R \sin$$

$$x + y + 8 - x + y - 8 = 16 \quad 2y = 16$$

$$y = 8$$

$$ED = AD \cos \alpha$$

$$AD = CD \sin \alpha$$

$$AC = CD \cos \alpha$$

$$-16 + 8 + y \geq 0$$

$$-16 - y + 8 \leq 16$$

$$-16 - y + 8 \leq 16$$

$$-16 + 8 + y \geq 0$$

$$-x - y - 8 - x + y - 8 = 16$$

$$25 \sin(90 + L) R - 2x = 316$$

$$2R \sin$$

$$x + y + 8 - x + y - 8 = 16 \quad 2y = 16$$

$x+y$

+

$(x+y-8)(x-$

$$1+2+4+8=15$$

$$b_1 = 1$$

~~b_1~~

b

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 69827 \overline{) 127} \\ \underline{54} \\ 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 + \\ \underline{243} \quad \underline{13} \\ 87 \end{array}$$

$$27 \cdot 3 \cdot 81 = 3^3 \cdot 3^1 \cdot 3^4 = 3^8$$

$$8.7 = 56$$

27

~~3-3-3-3~~

9-3

$$6 \times 3$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$$

1

0.3 - 1

$$\sin x + \cos x = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$\sqrt{t} - \frac{\sqrt{t}}{4}$$

49 48-48

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

29

71

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{3}{x-9}$$

111

3

$$\frac{4}{9} \times$$

2277

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$$

$$\frac{8!}{2!3!3!} = \frac{40320}{6 \cdot 6} = 1120$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \hline 4! \cdot 4! \end{array} \quad 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2} \cos 4x$$

~~$$4 \cos^2 5x (1 + 2 \cos 4x) = 2 \cos^2 4x =$$~~

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$(2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(2\cos 5x + 2\cos(2x + \frac{\pi}{4}))$$

$$2 \cdot 2 \left(\sin \frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \left(\sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

