

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = A$.

из условия задачи

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

То $a_i (i=1,8)$ может принимать 3, 7 или 1, или 9.

1) Пусть $a_i (i=1,8) = 3, 7$ и 1 с таким образом нам нужно три 3, три 7, и две 1 чтобы получить 9261 из произведения чисел. То такие ~~будет~~ будет

$$\frac{8!}{3!3!2!} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 2} = 560 \text{ чисел.}$$

2) Если $a_i (i=1,8) = 3, 7, 9$ и 1 то чтобы получить 9261 нам нужно одна 9, одна 3, три 7, и три 1. то мы получим

$$\frac{8!}{1!1!3!3!} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 560 \cdot 2$$

$$\text{Всего } 560 + 560 \cdot 2 = 560 \cdot 3 = 1680$$

Ответ: 1680

Задача №2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} (\sin 7x - \sin (2x + \frac{\pi}{4}))) = 0$$

$$1) \cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k} \\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \sqrt{2} (\sin 7x - \sin (2x + \frac{\pi}{4})) = 0 \Leftrightarrow \sin 7x = \sin (2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 7x - \sin (2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin (\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cos (\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2.1) \sin (\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n}$$

$$2.2) \cos (\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \pi m$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m$
 $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n$

$$k, m, n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

Из $\ln x$ и $\ln \frac{y}{x^7} \Leftrightarrow x \neq 0; y \neq 0; x > 0 \Rightarrow y > 0$

$$x^{-2 \ln x} y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^7} = y^{\ln y - 7 \ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7 \ln x}}$$

$$x^{-2 \ln x} y^{3 \ln x} = y^{\ln y}$$

$$y^{3 \ln x - \ln y} = x^{2 \ln x} \Leftrightarrow \ln y^{3 \ln x - \ln y} = \ln x^{2 \ln x}$$

$$(3 \ln x - \ln y) \ln y = 2 \ln x \cdot \ln x$$

$$\begin{pmatrix} \ln x = a \\ \ln y = b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3(a-b)b = 2a^2 \\ 2a^2 - 3ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-b)(a-b) = 0 \end{cases}$$

Из этого $2a = b$ или $a = b$.

1) Если $a = b \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x = 0 \\ x = 0 \vee x = 2 \end{cases}$

$x \neq 0 \Rightarrow \boxed{x = 2 \leq y}$

2) Если $2a = b \Leftrightarrow 2 \ln x = \ln y \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln y$

$$\boxed{x^2 = y} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \\ x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0 \\ x(x-2)(x^2+x-4) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow x \neq 0, y \\ & x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \text{ или} \\ \downarrow \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$\downarrow$

$$y = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } (x:y) = (2:2); (2:4) \text{ и } \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)}$$

Давайте проверим что эти числа

будет решение

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2^2 \cdot 2^4)^{-\ln 2} &= 2^{\ln\left(\frac{2}{2^7}\right)} = 2^{\ln 2^{-6}} = 2^{-6 \ln 2} \quad \checkmark \\ 2^2 - 2^2 - 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4 \cdot 2 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

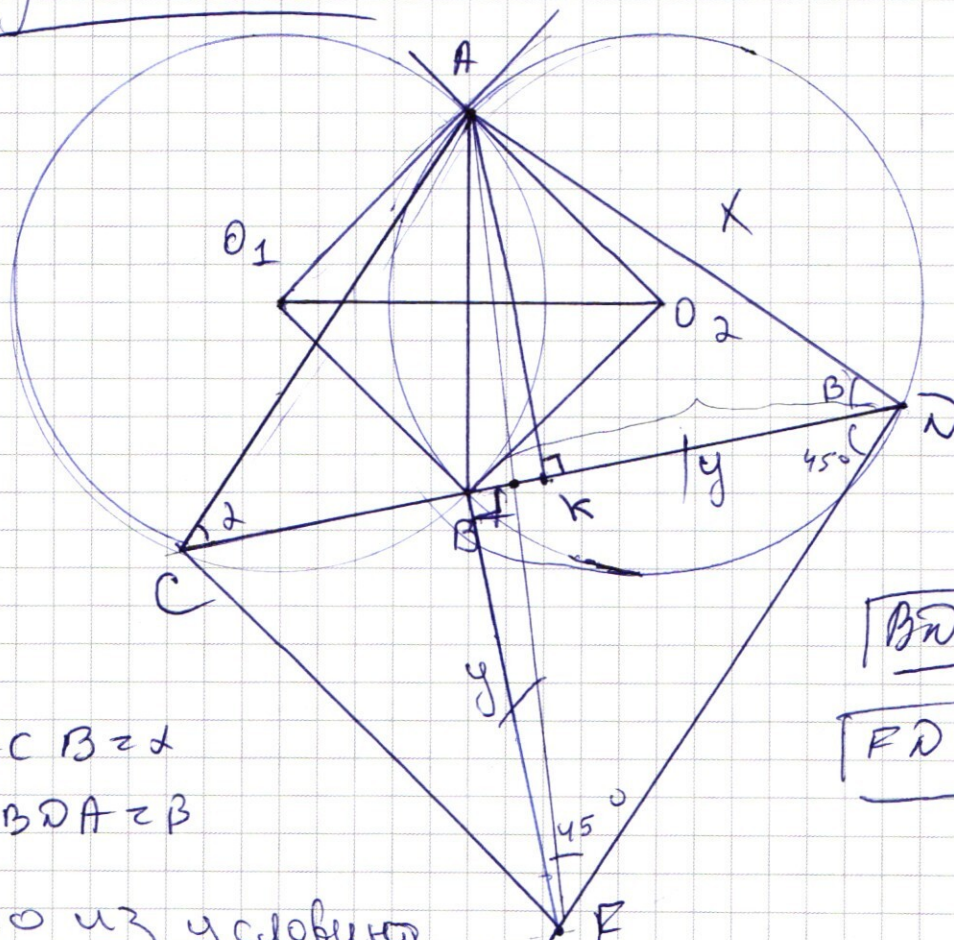
$$\begin{aligned} (2^2 \cdot 4^4)^{-\ln 2} &= 2^{\ln\left(\frac{2}{2^7}\right)} = 2^{-5 \ln 2} = 2^{-10 \ln 2} \quad \checkmark \\ 2^2 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4 \cdot 4 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{17}-1}{2} = x \\ \frac{9-\sqrt{17}}{2} = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2 \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)^4 \right)^{-\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^{-10 \ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)} = \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)^{-5 \ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)} \quad \checkmark \\ & \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)^2 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} \cdot \frac{9-\sqrt{17}}{2} - 2 \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2 + 8 \cdot \frac{\sqrt{17}-1}{2} - 4 \cdot \frac{9-\sqrt{17}}{2} = \\ & = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^4 - \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^3 - 2 \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2 + 8 \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right) - 4 \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2 = \\ & = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} - 2 \right) 0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание № 6



$$\boxed{B \cap B^c = \emptyset}$$

$$\boxed{FD = y\sqrt{2}} -$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \alpha \\ \angle BDA = \beta \end{array} \right\}$$

то из условия
задач $\boxed{2+3 \geq 90}$

$$\boxed{\alpha + \beta = 90}$$

$$\angle AOB = 2\angle ACB = 2\angle ADB$$

$$\angle AOB = 2\angle ADB = 2\beta = 120^\circ$$

47

($\Rightarrow$) $0_1 A \geq 0_1 B \geq 0 \Rightarrow \Delta 0_1 AB$ - равносудринний

$$O_2 A \approx O_2 B \approx 10 \Rightarrow \Delta O_2 AB - \text{равнобедренный}$$

$$\angle A O_1 O_2 = \angle B O_1 O_2 = \angle \frac{A O_1 B}{2} = \alpha \quad O_1 A = O_1 B$$

$$\angle A O_2 O_1 = \angle B O_2 O_1 = \angle A O_2 B = \beta$$

17
 $\Delta \text{H}_2\text{O}_2$ - равновесие

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \beta = 45^\circ} \quad \text{---}$$

из этого следует $\triangle ACD$ тоже равнобедренный
 $AC = AD$, $\angle CAD = 90^\circ \Leftrightarrow CD = AC\sqrt{2}$

Пусть $AC = AD = x \Rightarrow \begin{cases} CD = x\sqrt{2} \\ FD = y\sqrt{2} \end{cases}$

В $\triangle CDF \Rightarrow$ теорема косинусов

$$2x^2 + 2y^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot y\sqrt{2} \cdot \cos 45 = CF^2$$

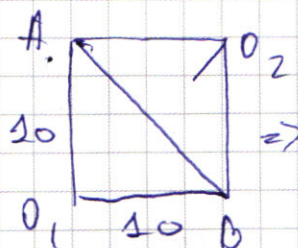
$$2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}xy = CF^2 = 2(x^2 + y^2 - xy\sqrt{2})$$

В $\triangle ABD \Rightarrow$ теорема косинусов

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos 45 = AB^2 = x^2 + y^2 - xy\sqrt{2}$$

$$\boxed{CF^2 = 2AB^2}$$

$AO_1 \perp BO_2$ - квадрат $\angle AO_1B = 2\alpha = 90^\circ$
 $\angle AO_2B = 2\beta = 90^\circ$ и.



$\Rightarrow$ (теорема Птолемея) $\Rightarrow AB^2 = 2 \cdot 10^2 \Leftrightarrow$

$$CF^2 = 2 \cdot 2 \cdot 10^2 = (20)^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{CF = 20}$$

б) В $\triangle BCF$ (теорема Птолемея) $\Rightarrow CF^2 - BC^2 = BF^2$
 $BF^2 = 20^2 - 12^2 = (16)^2 \Rightarrow BF = 16$

$AK \perp CD$ ($K \in CD$) $\Leftrightarrow$ В $\triangle ACD$ равнобедренный
 прямоугольный треугольник $\Leftrightarrow AK = \frac{CD}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} = 14$

$16 = BF = BD = y \Rightarrow CD = BD + BC = 28$

$BD = \frac{CD}{2} = BD - DK = 16 - 14 = 2 = BK$

$$\boxed{AC = AD = x = 14\sqrt{2}} \quad \boxed{DF = 16\sqrt{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 $\triangle ADF$ (теорема Пифагора)

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 = 14^2 \cdot 2 + 16^2 \cdot 2 = 2 \cdot 4(7^2 + 8^2) = 8 \cdot 113$$

$$\cos \angle ACF = \frac{AC^2 + CF^2 - AF^2}{2 \cdot AC \cdot CF} = \frac{196 \cdot 2 + 20^2 - 8 \cdot 113}{2 \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20} =$$

$$= \frac{20^2 - 16^2 \cdot 2}{40 \cdot 14\sqrt{2}} = \frac{1/6(25 - 32)}{16 \cdot 5 \cdot 7\sqrt{2}} = -\frac{4}{5 \cdot 7\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle ACF = \sqrt{1 - \frac{1}{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{AC \cdot CF}{2} \sin \angle ACF = \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 =$$

$$= \frac{7 \cdot 20 \cdot 14}{10} = 196$$

Ответ: а) $CF = 20$

б) $S_{\triangle ACF} = 196$.

Задача № 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} > 0 \Rightarrow 76 + 2(2^{32} - 1)x > 0 \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$\Downarrow$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$38 + (2^{32} - 1)x > 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{33}$$

$$-x + 38 > 2^{32} (2^{x-33} + 6 - x)$$

$$38 - x > 2^{32} (2^{x-33} + 6 - x) \Leftrightarrow x > 0$$

потому что $2^{32} \cdot 6 + 2^{32} (2^{x-33} - x) > 2^{32} \cdot 6 - 2^{32} \cdot x > 38 - x$

Если $x \leq 0$

$\Uparrow$

Значит $x > 0$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^x + (2^{33} - 2)x > 76 + (2^{33} - 2)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34} \Rightarrow 2^{34} / (2^{x-34} + 3)$$

$$x \geq 38 \quad 2^{34} / (2^{x-34} + 3) > 2^{33} - 2$$

$$2^{34} / (2^{x-34} + 3) > 2^{33} - 2$$

$$3 \cdot 2^{34} + 2^x - x \cdot 2^{33} > 76 - 2x$$

$$2^{33} (6 + 2^{x-33} - x) > 76 - 2x \quad \checkmark$$

Значит $x \in 38$ Если $x \geq 38$

$$\text{то } 2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y \leq 76 + 2(2^{32} - 1)x \Rightarrow y = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

а это не может быть.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

значит $x \leq 37$

$$38 - x > 2^{32} (2^{x-33} + 6 - x)$$

Если $x \leq 5$ то $2^{32} (2^{x-33} + 6 - x) \geq 2^{32} > 38 - x$

значит $x \geq 6$ Если $x = 6$

то $32 > 32$ а это тоже не
может быть.

значит $x > 6 \Rightarrow x \geq 7$

$$x \in [7 : 37]$$

1) $x = 7$

y может принимать

$$2^{33} + 76 - 2^7 - 14 \text{ чисел}$$

2) $x = 8$

$$2^{33} - 2 + 76 - 2^8 - 16 \text{ чисел}$$

3) $x = 37$

y может принимать

$$2^{33} \cdot 31 + 76 - 2^{37} - 74 \text{ чисел}$$

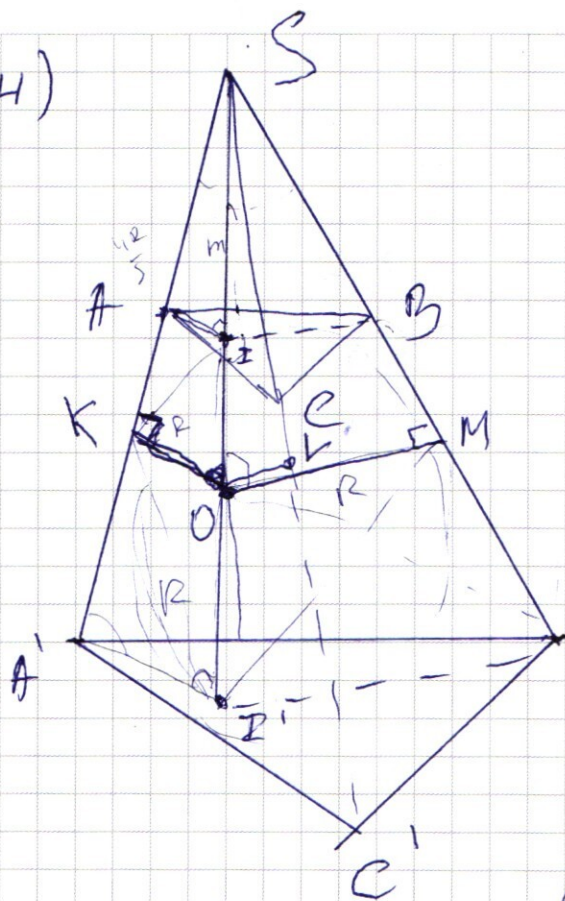
то всего $(x; y)$ пар

$$\begin{aligned}
& 2^{33} (1 + - + 31) + 76 \cdot 31 - 2^7 (1 + - + 2^{31}) - 2 (4 + - + 31) = \\
& = 2^{33} \cdot 16 \cdot 31 + 76 \cdot 31 - 2^7 \cdot (2^{32} - 1) - 2 \cdot \frac{44}{2} \cdot 31 = \\
& = (2^{37} + 76) 31 - 2^{38} + 2^7 - 44 \cdot 31 = \\
& = 2^{37} (31 - 4) + 31 \cdot 76 + 128 - 31 \cdot 44 = \\
& = 2^{37} \cdot 27 + 31 \cdot 76 + 128 - 31 \cdot 44 = \\
& = 2^{37} \cdot 27 + 128 + 31 \cdot 32 = 2^{37} \cdot 27 + 32 \cdot 35 = \\
& = 2^{37} \cdot 27 + 1120
\end{aligned}$$

Ответ: $2^{37} \cdot 27 + 1120$ пар.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4)



$SABC$ и $SA'B'C'$
пирамиды.

и ABC и $A'B'C'$
плоскости которые
касаются в сфере.

§ 0 перпендикуляр
в ABC и $A'B'C$
(из условия
задач)

следует @ лежит
на высоте трапеции
 $\angle A'B'$ и $ABCS$ и основание

Эму болонги $Z' \ll Z$.

$$\mathbb{R}S \cong M \quad O\mathbb{P} \cong O\mathbb{P}' \cong \mathbb{R} \quad (\text{радиус сферы})$$

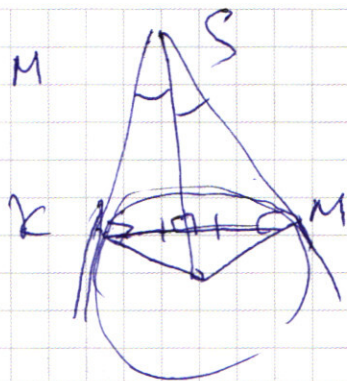
РД ABC и A'B'C' подобны (параллельные и соответствующие)

$$T_{\text{to}} \frac{P \cdot B'}{IB} \approx \sqrt{\frac{16}{1}} \approx 4 \approx \frac{2R+m}{m} \Rightarrow \boxed{m \approx \frac{2R}{3}}$$

$$OS = m + R = \frac{5R}{3}; OK = R \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{R}{\frac{5R}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{mo } \left\langle \cos \theta = \frac{3}{5} \right\rangle \Rightarrow \frac{R}{3} = \frac{5R}{3} \cos \theta = \frac{5R}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4R}{3}$$

$$KS \approx KM$$



$$\frac{KM}{2} \approx KS \cdot \sin \angle KSO \approx$$

$$\approx KS \cdot \frac{3}{5} \approx \frac{4R}{3} \cdot \frac{3}{5} \approx \frac{4R}{5}$$

$$\text{то } \boxed{KM \approx \frac{8R}{5}}$$

$$KM \approx KL \approx ML$$

$$S_{MKS} \approx \left(\frac{8R}{5}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \approx \frac{16R^2 \sqrt{3}}{25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $abcde fgh$ $abcd = 9261 = 9 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$

$abcde fgh = 3^3 \cdot 7^3$

1) $\underline{333} \cdot \underline{777} \underline{11}$

2) $\underline{93} \underline{777} \underline{111}$

$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{45678}{6 \cdot 2} = 560$

$\frac{8!}{3!3!} = \frac{45678}{6} = 560 \cdot 2$

$2) + 1) = 560 \cdot 3 = 1680$

2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2 \sin 2x \sin 7x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\cos 9x - \cos 5x = 2 \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$

$\cos 2x - \cos 9x = \sqrt{2} \sin 7x$

$2 \sin 5x (\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$

1) $\tan 2x = 1$ $2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$

$\sin 180 - \sin 90 = 2 \sin 45 \cos 135$

2) $\sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \sin (2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\sin 2x + \cos 2x$

$\sin 7x = \sin (2x + \frac{\pi}{4})$

$\sin (2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$2 \sin (\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8}) \cos (\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$

$2x - \frac{\pi}{4} = \pi k$

$\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi k$

$x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k$

$\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$
 $x = \frac{5\pi}{94} + \frac{2}{9}\pi k$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} = y^{\ln y - \ln x^7} \\ y^2 - xy \rightarrow 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) x &= y \\ 2) x^2 &= y \\ \ln x &\geq 0 \\ \ln y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} = y^{\ln y}$$

$$2\ln x \cdot \ln x = (3\ln x - \ln y)\ln y$$

$$2a^2 = (3a - b)b$$

$$(2a - b)(a - b) = 0$$

$$x^{-2\ln x} y^{3\ln x} = y^{\ln y}$$

$$\boxed{x^{2\ln x} = y^{3\ln x - \ln y}}$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 + 4 - xy = 0$$

$$2y^2 - xy - 4x^2 + 16x - 4y = 0$$

$$(y-x)^2 + (y-2)^2 -$$

$$\left(\frac{y-x+4}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{4} - xy + 8x - 4y + x^2$$

$$\left(\frac{y}{2} - x - y\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 16$$

$$+16$$

$$y^2 - y^2 - 2y^2 + 4y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0 \quad y \neq 0$$

$$\boxed{y=2 \Rightarrow x}$$

$$DP = 16\sqrt{2}$$

$$CD = 28$$

$$CF = 20$$

$$2) x^2 = y$$

$$y^2 - xy - 2y + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - 6y + 8x - xy = 0$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x$$

$$x^4 - 6x^2 + 8x - x^3 = 0 \quad x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8$$

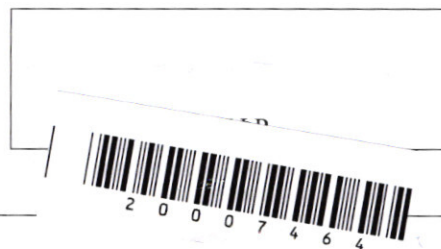
$$(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$(x-2)(x^2+x-4)$$

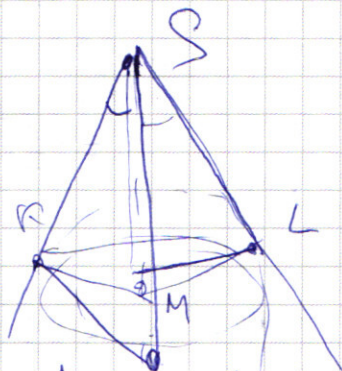
$$\boxed{x \geq 2, y \geq 4}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x+y| + |y-x|$$

$$\geq |10|$$

$$y = x$$

5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-5)^2 = 0 \end{cases}$$

$$|10+y| + |y|$$

$$1) y \geq x \geq -2.5$$

$$2y = 0$$

$$y \geq 0$$

$$|x+5| + |5-x| \geq 10$$

$$x+5$$

$$2x \geq$$

$$5 \geq x \geq -2.5$$

$$\begin{cases} 0 \geq x \geq -2.5 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$2) -2.5 \geq y \geq x$$

$$-x-y-5+y-x+5$$

$$-2x \geq 10$$

$$x \leq -5$$

$$|y| + |y+10| \geq 10$$

$$10+y \geq |y+10|$$

$$-2.5 \geq y \geq -5$$

$$3) \begin{cases} y-x \geq -5 \\ x \geq y \geq -2.5 \end{cases}$$

$$x+y+5+y-x+5 \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x \leq 5$$

$$|x+5| + |5-x| \geq 10$$

$$5) -2.5 \geq x \geq y \geq -5$$

$$-y-x-5+y-x+5$$

$$x \leq -5$$

$$-5 \geq y \geq -10$$

$$y-x$$

$$4) \begin{cases} -x \geq y \geq -2.5 \\ y-x \leq -5 \end{cases}$$

$$y-x \leq -5$$

$$-2.5 \leq y \leq 0$$

$$x+y+5+x-y-5$$

$$x \geq 5$$

☒ черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$6) \begin{cases} -2.5 \leq x \leq y \\ y - x \leq -5 \end{cases}$$

$$\boxed{-2.5 \leq x \leq -10}$$

$$y \geq 0 \quad [-5:5]$$

$$x \geq 5 \quad |y+5| \geq 5$$

$$\begin{cases} -10:10 \end{cases}$$

$$|y+10| + |y| = 10$$

$$y \leq -10$$

$$-2y = 20$$

$$\boxed{[0: -10]}$$

$$\boxed{y = -10}$$

$$|y+15| + |y-5| = 10 \quad \begin{matrix} x \leq -5 & x \geq -10 \end{matrix}$$

$$y \in [-15: 5]$$

$$y \leq -15$$

$$y \geq 5$$

$$-y-15-y+5$$

$$y \geq 0$$

$$\boxed{y \geq -10}$$

$$[-10: 0]$$

$$[-15: 5]$$

$$y+15+5-y \neq$$

$$-x-y-5-y+x-5 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$\boxed{y = -10}$$

$$|x+5| + |5-x| \geq 10$$

$$x \geq 5$$

$$\boxed{x = 5}$$

$$\boxed{5 \leq x \leq -5}$$

$$x \geq 5$$

$$x \geq -5$$

$$x \geq 5$$

$$|y+10| + |y|$$

$$|x| +$$

$$|x-5| + |x+5| \geq 10$$

$$x \geq 5 \quad x \geq 10$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x = 7$ $y \geq 2^7 + 3 \cdot 2^{34}$

$62 + 14 \cdot 2^{32}$

$62 + 7 \cdot 2^{33} \geq y \geq 2^7 + 3 \cdot 2^{34}$

$61 + 7 \cdot 2^{33} \geq y \geq 2^7 + 3 \cdot 2^{34}$

$7 \cdot 2^{33} + 61 - 2^7 - 3 \cdot 2^{34} = 2^{33}(7-6) - 67 + 1$

$x \geq 7$ $y \geq \boxed{2^{33} - 66} + 1$

$\frac{60}{5}$
 $\frac{30}{5}$

$\frac{45}{5}$

2) $x = 8$

$76 + 2^{33} \cdot 8 - 2 \cdot 8 - 2^8 - 3 \cdot 2^{34} - 1$

$2^{33} \cdot 8 - 194 + 1$

$2^{33} \cdot 5 - 196$

$76 - 18 - 512$

3) $x = 9$

$76 + 2^{33} \cdot 9 - 2 \cdot 9 - 2^9 - 3 \cdot 2^{34} + 1$

$y \geq 2^{33} \cdot 3 - 454$

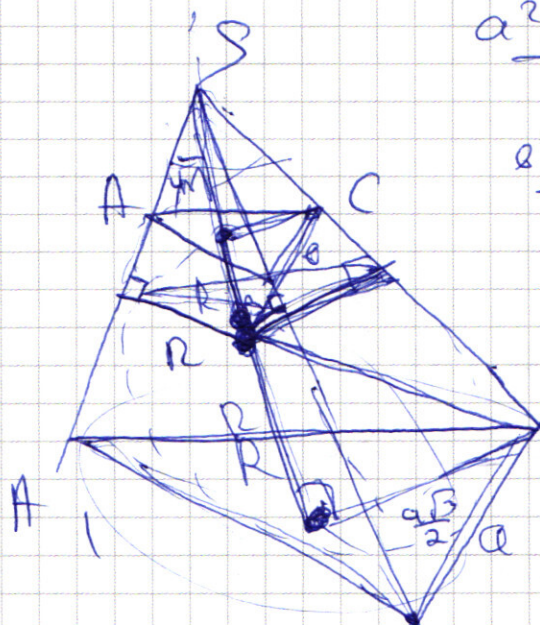
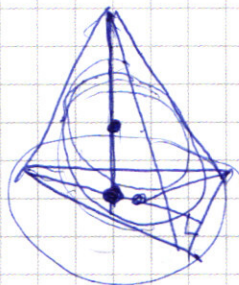
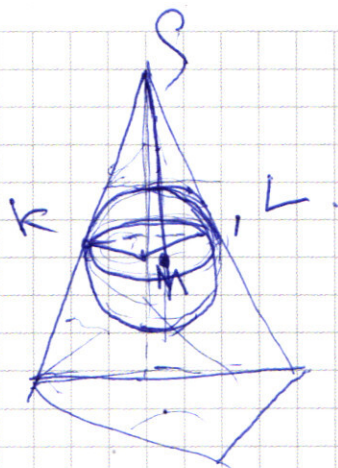
$x = 7$ $2^{33} \cdot 1 + 76 - 2^7 - 14$

$x = 8$ $2^{33} \cdot 2 + 76 - 2^8 - 16$

$x = 3$ $2^{33} \cdot 3 + 76 - 2^3 - 74$

$2^{33}(1 + \dots + 31) + 76 \cdot 31 - 2^7(1 + \dots + 31) - 2(7 + \dots + 37) =$

17



$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \approx 16$$

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \approx 1$$



$$\frac{m+2R}{m} \approx \frac{a}{b} \approx 4$$

$$m \approx \frac{2R}{3}$$

$$\cos \varphi \approx \frac{4}{5}$$

$$\sin \varphi \approx \frac{3}{5}$$

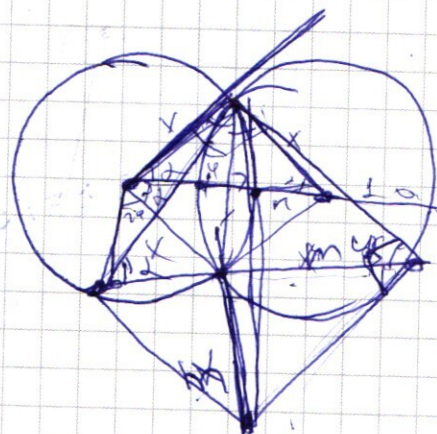
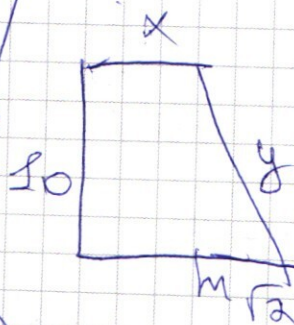
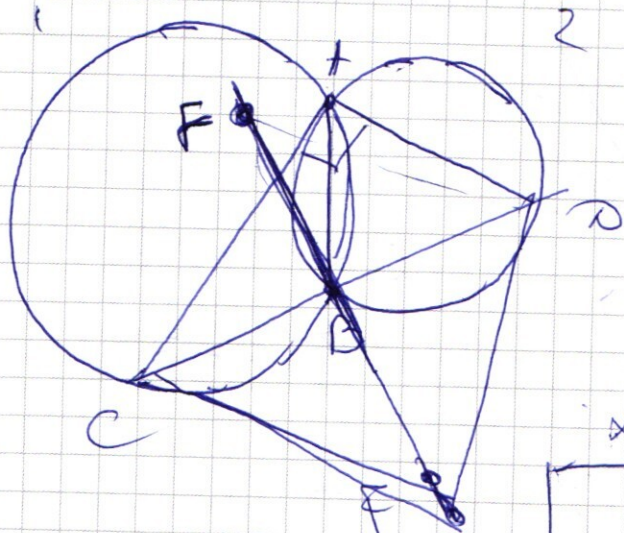
$$2\varphi \approx \alpha$$

$$\arcsin \frac{3}{5}$$

$$\sin 2\varphi \approx \frac{24}{25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

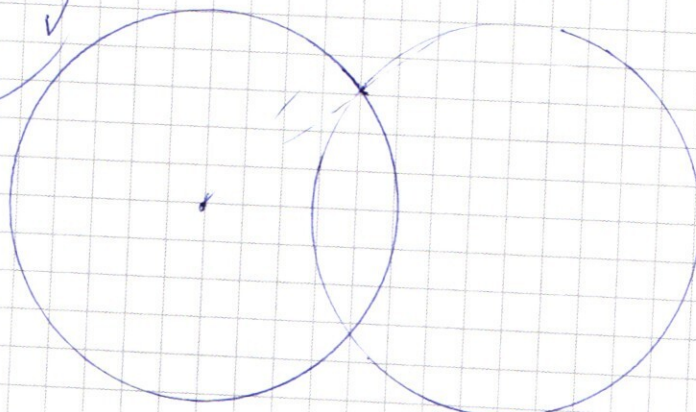
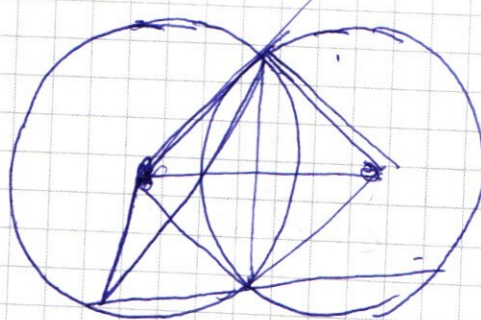
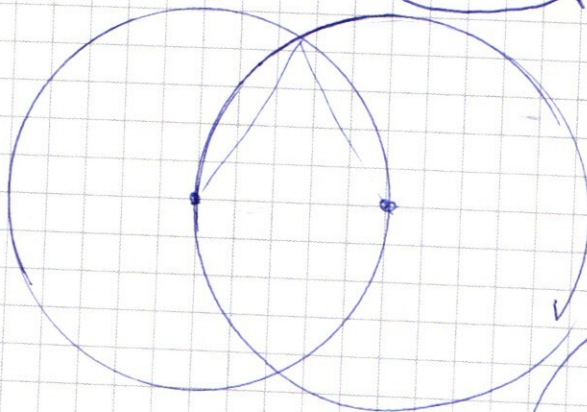
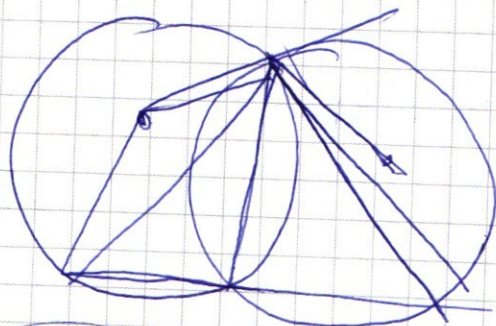


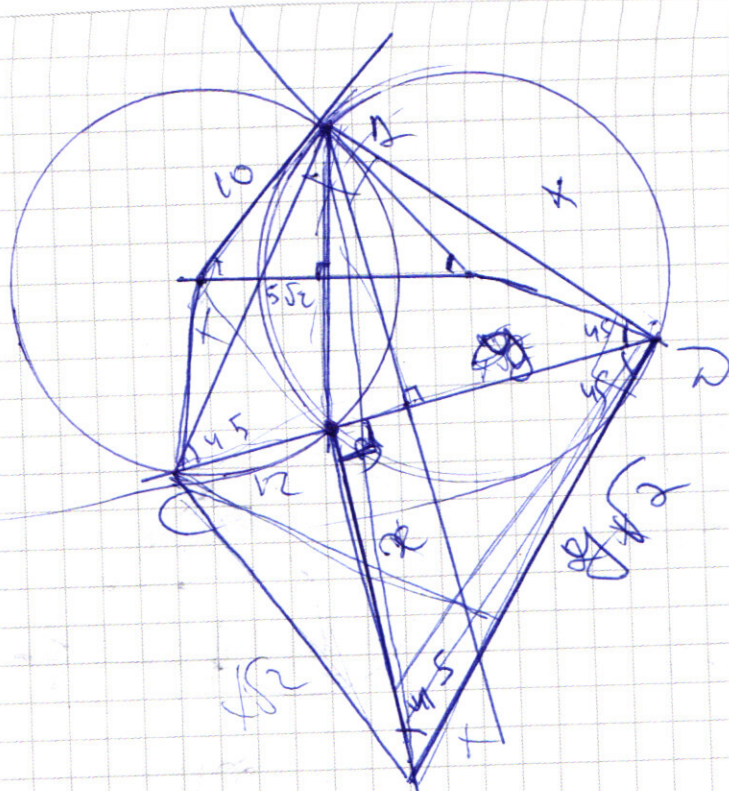
$$100 = n(20 + n)$$

$$n^2 + 20n - 100 = 0$$

$$n = -10 + 10\sqrt{2}$$

$$= 10(\sqrt{2} - 1)$$





$$CA = CD$$

$$2(x^2 + y^2) - 2xy - 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy} = CF = 200$$

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}$$

$$6x + 3x\sqrt{2}$$

$$10(6 + \sqrt{2})$$

$$x^2 +$$

$$8 \cdot 32$$

$$x \geq 6 \quad y < 64 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + (2^{33} - 2)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{32} \cdot 19$$

$$38 + (2^{32} - 1)x \geq 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{33}$$

$$2^{32}(x - 6)$$

$$2^{32}(2^{x-33} + 6 - x) \leq 38 - x$$

$$2^{32}(2^{x-33} + 6 - x) < x(2^{33} - 2) \quad 0 \leq x \leq 38$$

$$x \geq 40$$

$$1) \quad x \geq 33$$

$$x = 33 \quad \checkmark$$

$$x = 34, 35, 36, 37, 38 \quad \checkmark$$

$$2) \quad x = 32, \dots, 7, \quad \checkmark$$

$$3) \quad x \geq 6 \quad 2^{32} - 27 \cdot 5 = 2 \quad \checkmark$$

$$4) \quad x = 5 \quad 2^4 + 2 = 37$$

$$38 \geq x \geq 6$$

$$[7:37]$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ 32 \\ \hline 70 \\ 105 \\ \hline 1120 \end{array}$$