МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра(

Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

№1

Разложим число 3375 на множители.

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$3375 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5$

Значит, в восьмизначных числах, произведение цифр которых равно 3375 будет либо 3 пятёрки, 3 тройки и 2 единицы, либо 3 пятёрки, 1 тройка, 1 девятка и 3 единицы.

В восьмизначном числе C_8^3 способов разместить 3 пятёрки.

В пятизначном числе C_5^3 способов разместить 3 тройки.

Значит, 1-м способом можно составить $C_8^3 \cdot C_5^3$ восьмизначных чисел

В другом случае в пятизначном числе C_5^2 варианта выбора 2-х позиций для размещения девятки и тройки $\Rightarrow 2\cdot C_5^2$ вариантов размещения девятки и тройки.

Значит, 2-м способом можно составить $C_8^3 \cdot 2C_5^2$ восьмизнач. чисел

Итого, суммарное кол-во способов равно сумме кол-ва расстановок 1-м и 2-м способом:

$\underline{S} = C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot 2 = C_8^3 (C_5^3 + 2 \cdot C_5^2) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \left(\frac{5 \cdot 4}{2} + \right.$

$\left. + 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2}\right) = 56 (10 + 20) = 56 \cdot 30 = \underline{1680}$

Ответ: 1680

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $x \geq 0$
$y \geq 0$

Реш-е ур-~~ея~~я системы (2):

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$x^2 - x(2y + 4) - 3y^2 + 12y = 0$

$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) =$
$= 16(y-1)^2$

$x_1 = \frac{2y + 4 + 4y - 4}{2} = 3y$

$x_2 = \frac{2y + 4 - 4y + 4}{2} = 4 - y$

Реш-е ур-я системы (1):

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$

$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$

$y^{3 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg y}$

$10^{\lg y^{3 \lg x}} \cdot 10^{\lg x^{-\lg x}} = 10^{\lg y^{2 \lg y}}$

$10^{3 \lg x \cdot \lg y} \cdot 10^{-\lg^2 x} = 10^{2 \lg^2 y}$

$10^{3 \lg x \lg y - \lg^2 x} = 10^{2 \lg^2 y}$

$3 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg^2 y$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\lg^2 x - 3\lg x \cdot \lg y + 2\lg^2 y = 0$

$\lg x = k$

$k^2 - 3k \cdot \lg y + 2\lg^2 y = 0$

$D = 9\lg^2 y - 8\lg^2 y = \lg^2 y$

$k_1 = \frac{3\lg y + \lg y}{2} = 2\lg y$

$k_2 = \frac{3\lg y - \lg y}{2} = \lg y$

$\lg x = 2\lg y$ или $\lg x = \lg y$

$x = y^2$ $\qquad$ $x = y$

Исходная система преобразована в систему из 2-х совокупностей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y^2 \\ x = y \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 4 - y \end{array}\right. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x = y^2 \\ x = 3y \end{cases}$

$y^2 = 3y$

$y = 0$ или $y = 3$

$\notin$ ОДЗ

$y = 3 \Rightarrow x = 9$

$(9;3)$ - реш-е

2) $\begin{cases} x = y^2 \\ x = 4 - y \end{cases}$

$y^2 = 4 - y$

$y^2 + y - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$y_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \notin$ ОДЗ

$y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$

$\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ - реш-е

3) $\begin{cases} x = y \\ x = 3y \end{cases}$

$y = 3y$

$y = 0 \notin$ ОДЗ

4) $\begin{cases} x = y \\ x = 4 - y \end{cases}$

$y = 4 - y$

$y = 2$

$x = 2$

$(2;2)$ - реш-е

Ответ: $(2;2)$; $(9;3)$; $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

№4

Дано:

ω; O — центр

S — вершина трёхгр. угла

ω кас. в K, L, M

ABC кас. ω

$ABC \perp SO$

$A_1B_1C_1$ кас. ω

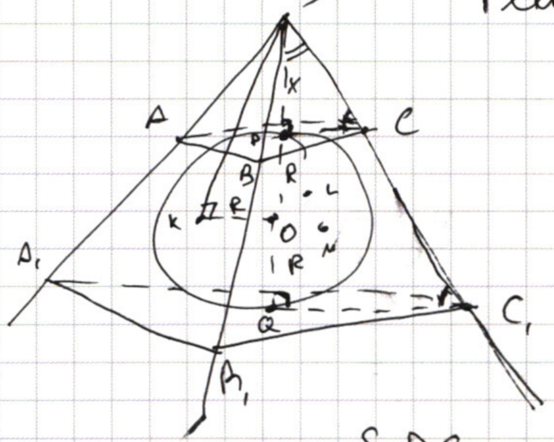
$A_1B_1C_1 \perp SO$

$S_{ABC} = 1$

$S_{A_1B_1C_1} = 4$

$\angle KSO$ — ?

$S_{сеч._{KLM}}$ — ?



Реш-е:

Пусть x — расст-я от S до пл-ти ABC,

Пусть P — т. кас. ω и ABC

Q — т. кас. ω и $A_1B_1C_1$

$\angle SPC \sim \angle SQC_1$ (по 2-м углам)

$\Rightarrow \frac{SC}{SC_1} = \frac{SP}{SQ}$

Аналогично $\frac{SB}{SB_1} = \frac{SA}{SA_1} = \frac{SP}{SQ} \Rightarrow$

$\triangle ASB \sim A_1SB_1$ (по углу и 2 сторонам)

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SA}{SA_1} = \frac{SP}{SQ}$, значит аналогично

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{SP}{SQ} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $k = \frac{SP}{SQ}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2 = \left(\frac{SP}{SQ}\right)^2$

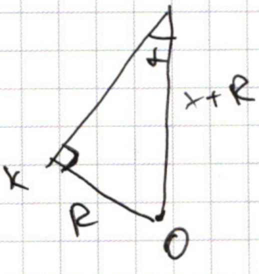
$SP = x$; $SQ = x + 2R$, где R — радиус сферы.

$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{x}{x+2R}\right)^2$

$\frac{x}{x+2R} = \frac{1}{2}$

$2x = x + 2R$

$x = 2R$



в $\triangle SKO$ $\angle K = 90° \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{R}{x+R} = \arcsin \frac{R}{3R} = \underline{\arcsin \frac{1}{3}}$

Т.к. $SK = SL = SM$ как касательные, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ K, L, M

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

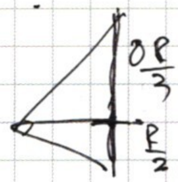
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\ell = 9R^{2} \cdot 9 - \frac{32}{9}R^2 = R^2 \cdot \frac{49}{9}$ $\quad 81-32=49 \quad 4r^2$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 + 2AB \cdot 2r\sqrt{2} - 2AB(\cos(\alpha-\gamma) + \cos(\alpha+\gamma))$

$2\cos\varphi\cos\gamma$

$x_* = \frac{3R + \frac{7}{3}R}{2} = \frac{9R+7R}{6} = \frac{16R}{6} = \frac{8R}{3}$



$\frac{S_1}{S_{cer}} = \left(\cancel{\frac{3\cdot 2R}{8R}}\right)\left(\frac{2R}{\cancel{2R}+\frac{8R}{3}}\right)^2 =$

$\cos\varphi\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right) = \frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$

$= \left(\frac{2R\cdot 6R}{6R+8R}\right)^2 = \left(\frac{6}{14}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \cancel{\frac{9}{49}}$

$S_{cer} = \frac{49}{9}$

$(x+y)^2 + 4r^2 - 2r\sqrt{2}\,\alpha\,\cancel{\cos\varphi\cos\gamma}\,(\cos\alpha+\sin\alpha)$

$0 = 2xy + 4r^2 - 4r\sqrt{2}\cdot\cancel{\cos}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\gamma$

$2xy + 4r^2 - 4r\cos\gamma = 0$

$\frac{4}{S_{cer}} = \left(\cancel{\frac{}{2R+8}}\right.$

$x^2+y^2 = 4r^2 + 2r(\cos 2\alpha - \cos\alpha)$

$\frac{1}{S_{cer}} = \left(\frac{2R}{8R/3}\right)^2 = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$S_{cer} = \frac{16}{9}$ $\quad 2r \quad \sqrt{2}xy$

$y^2 = 2r^2 + 2r\cos 2\alpha$

$x^2 = 2r^2 - 2r\cos\alpha$

$\frac{4}{S_{cer}} = \left(\frac{4R\cdot 3}{28R}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\cos 14x = \cos 11x\cos 3x - \sin 11x \sin 3x$

$\boxed{S_{cer} = \frac{16}{9}}$

$\frac{\pi}{4} - \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\gamma = \alpha - \frac{\pi}{4}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin(4x) = \cos 14x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 11x\cos 3x - \sqrt{2}\sin 11x\sin 3x$

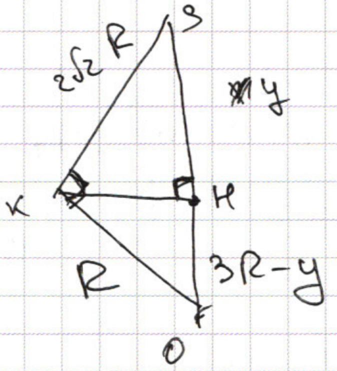
$\cos 11x\left(1-\sqrt{2}\cos 3x\right) + \sin 11x\left(\sqrt{2}\sin 3x - 1\right) - \cos 3x + \sin 3x = 0$

$\cancel{\sin(3x \ldots \cos}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

принадлежат одной пл-ти, удалённой от вершины S на опред. расст-е. Пусть H — точка пересеч. SO и KLM $\Rightarrow$ $KH \perp SO$ $\Rightarrow$ KH - высота в $\triangle SKO$



в $\triangle SKO$ по т. Пифагора $KS = \sqrt{SO^2 - KO^2} = \sqrt{9R^2 - R^2} = 2\sqrt{2}R$

т.к. $\angle K = 90°$, то $KH = \frac{KS \cdot KO}{SO} = \frac{2\sqrt{2} \cdot R \cdot R}{3R} = R\frac{2\sqrt{2}}{3}$

пусть $SH = y$ $(y = \rho(S; KLM))$ $\Rightarrow HO = 3R - y$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по св-ву высоты $KH^2 = SH \cdot HO$

$R^2 \cdot \frac{8}{9} = y(3R - y)$

$y^2 - 3Ry + R^2 \cdot \frac{8}{9} = 0$

$D = 9R^2 - \frac{32}{9}R^2 = R^2 \frac{49}{9}$

$y_1 = \frac{3R + \frac{7}{3}R}{2} = \frac{16R}{6} = \frac{8}{3}R$

$y_2 = \frac{3R - \frac{7}{3}R}{2} = \frac{2R}{6} = \frac{1}{3}R$

у меньшего катета меньшая пр-я на гипотенузу $\Rightarrow$

$\Rightarrow SH = \frac{8}{3}R$

$\frac{S_{ABC}}{S_{сеч}} = \left(\frac{\rho(S; ABC)}{\rho(S; KLM)}\right)^2 = \left(\frac{2R}{\frac{8}{3}R}\right)^2 = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$S_{сеч} = \frac{16 S_{ABC}}{9} = \frac{16}{9}$

Ответ: ~~arcsin~~; $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{3}$

$S_{сеч} = \frac{16}{9}$

N5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

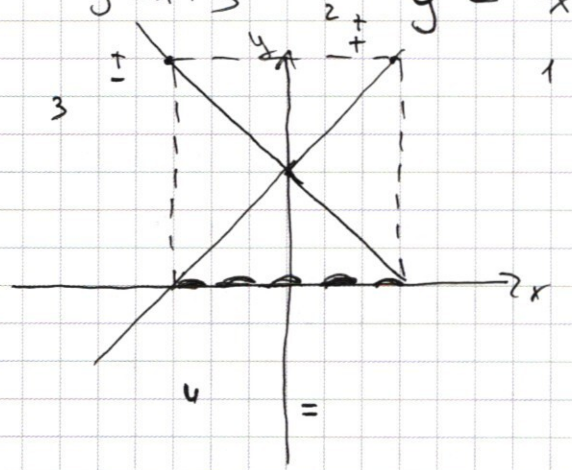
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим выраж-е (1):

$$\underbrace{|y-3-x|}_{(I)} + \underbrace{|y-3+x|}_{(II)} = 6$$

$y-3-x \geq 0$ $\Downarrow$ $y \geq x+3$ | $y-3+x \geq 0$, $y \geq -x+3$

$y-3-x < 0$, $y < x+3$ | $y-3+x < 0$, $y < -x+3$



прямые $y=x+3$ и $y=-x+3$ разбивают пл-ть на 4 ч-ти.

в полупл-ти 1 $I < 0$, $II \geq 0$

в полупл-ти 2 $I \geq 0$, $II \geq 0$

в полупл-ти 3 $I \geq 0$, $II < 0$

в полупл-ти 4 $I < 0$, $II < 0$

$I \geq 0$ $II \geq 0$ $\Rightarrow$

$y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6$

$2y-6=6$

$y=6$

$I < 0$ $II \geq 0$ $\Rightarrow$

$x+\cancel{3}-\cancel{y}+\cancel{y}-\cancel{3}+x=6$

$2x=6$

$x=3$

$I < 0$ $II < 0$

$\cancel{x}+3-y+3-\cancel{x}-y=6$

$6-2y=6$

$y=0$

$I \geq 0$ $II < 0$

$\cancel{y}-\cancel{3}-x+\cancel{3}-x-\cancel{y}=6$

$-2x=6$

$x=-3$

Рассмотрим выраж-е (2):

$$(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$$

при $x \geq 0$ $y \geq 0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=a$

при $x<0$ $y \geq 0$

$(-x-4)^2+(y-3)^2=a$

$(x+4)^2+(y-3)^2=a$

при $x<0$ $y<0$

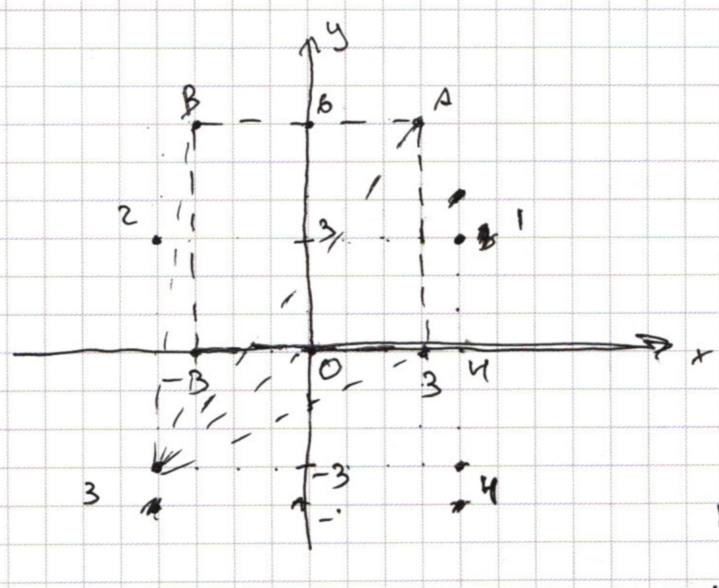
$(x+4)^2+(y+3)^2=a$

при $x \geq 0$ $y<0$

$(x-4)^2+(y+3)^2=a$

Следовательно, мн-во точек пл-ти, удовл. выраж-ю 2 являются 4 окружности радиусом $\sqrt{a}$ и центрами в $(4;3)$; $(-4;3)$; $(-4;-3)$; $(4;-3)$

Изобразим на одной пл-ти выраж-я (1) и (2)



при $a \in [0;1)$ реш-й нет

при $a=1$ 2 реш-я

при $a \in (1;10)$ 4 реш-я

при $a=10$ 4 реш-я

при $a \in (10;25)$ 6 реш-й

при $a=25$ 2 реш-я

при $a \in (25;49)$ 6 реш-й

при $a=49$ 6 реш-й

при $a \in (49;58)$ 6 реш-й

при $a=58$ 6 реш-й

при $a>58$ у ~~окр-й~~ с центрами 1 и 2 нет общих точек с 1 выраж-м

у окр-й с центрами в 3 и 4

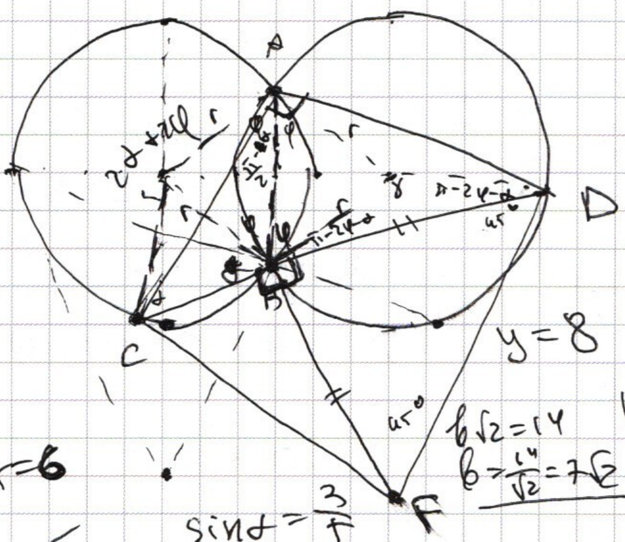
будет либо 0, либо 1, либо 2 реш-я у каждой, т.к. эти ~~окрут~~ центры этих окр-й симметричны относительно OY $\Rightarrow$ кол-во реш-й при любом a у них будет одинаковым. У них не может быть 2 общих реш-я $\Rightarrow$ у них будет 2 реш-я, когда т. $A \in \omega_3$; т. $B \in \omega_4$ $\Rightarrow a = 81+49=130 \Rightarrow$ 2 реш-я у исходной системы будет

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2\varphi + \alpha + x = 180^\circ$

$x = \pi - 2\varphi - \alpha$

$\angle COB = \pi - 2\alpha$

$\angle COB = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$2\pi - 4\varphi - 2\alpha + 2\gamma = \pi$

$\gamma = 4\varphi + 2\alpha - \pi$

$\gamma = 2\gamma$

$\angle BO_2D =$
$= 4\varphi + 2\alpha - \pi$

$\angle BAD = 2\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}$

$y = 8$

$b\sqrt{2} = 14$

$b = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$

$\varphi + \pi - 2\varphi - \alpha = \pi - \varphi - \alpha$

$2\pi - 2\varphi - 2\alpha$

$\angle CAB + \angle BAD =$
$= \cancel{\frac{\pi}{2}} - \cancel{\alpha} + 2\varphi + \cancel{\alpha} - \cancel{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$x = 6$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$r = 5$

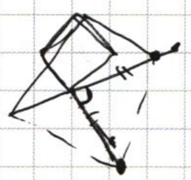
$\pi - \varphi - \alpha = \frac{3\pi}{4} - \alpha$

$\cancel{4\varphi + 2\alpha - \pi + 2\pi - 2\varphi = \pi}$

$2\varphi = \frac{\pi}{2}$

$2\pi - 2\varphi - 2\alpha + \pi - 2\varphi + 4\varphi + 2\alpha - \pi = 2\pi$

$4 - \frac{\pi}{4}$

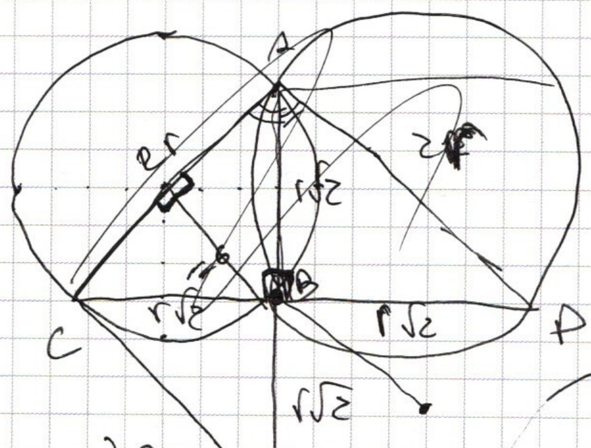


$x^2 + y^2 =$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) =$
$-\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

$\frac{\gamma}{2} = 2\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}$

$\cancel{\frac{\pi}{2}} - \cancel{\alpha} + 2\varphi + \cancel{\alpha} - \cancel{\frac{\pi}{2}} = 2\varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 45^\circ$



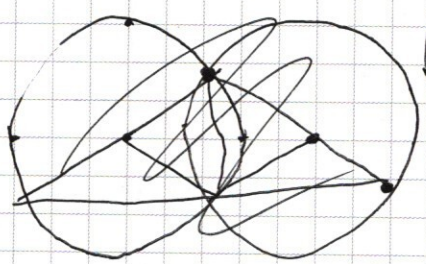
$CF = 2r = 10$

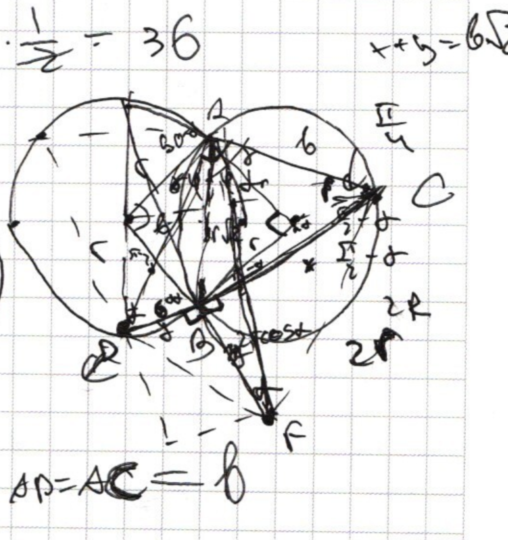
$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{4} =$
$= \alpha + \frac{3\pi}{4}$

$r\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 2r\sqrt{2} = 12$

$S = \frac{3}{6} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 36$

$x + y = 6\sqrt{2}$





$4 - \gamma \qquad 4 + \gamma$

$y^2 = CD^2 + AB^2 - 2AB\,CD \cdot \cos(\varphi - \gamma)$

$x^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\varphi + \gamma)$

$CF = \sqrt{x^2 + y^2}$

$AD = AC = b$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

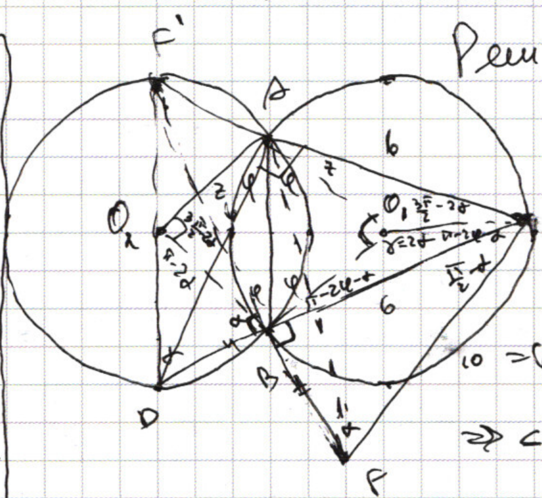
при $a = 1; 25; 130$

Ответ: $1; 25; 130$

№6

Дано:
$r=5$
~~BC~~
$\omega_1 \cap \omega_2 = AB$
$C \in \omega_1$, $D \in \omega_2$
$B \in CD$
$\angle CAD = 90^\circ$
$BC=6$
$BF \perp BD$ $BF = BD$

$CF - ?$
$S_{ACF} - ?$



Реш-е

а) $\triangle O_2AB = \triangle O_1AB$

пусть $\angle O_2AB = \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_1AB = \angle O_1BA = \angle O_2BA = \varphi$. Пусть $\angle O_2DB = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2AD = \alpha$; $\angle DO_2B = \pi - 2\alpha$

тогда $\angle O_1BC = \pi - 2\varphi - \alpha = \angle O_1CB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BO_1C = \gamma = 4\varphi + 2\alpha - \pi$

$\angle DAB = \frac{1}{2}\angle DO_2B = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BO_1C = 2\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}$

$\angle DAB + \angle DAC = \cancel{\frac{\pi}{2}} \cancel{-\alpha} + 2\varphi \cancel{+\alpha} - \cancel{\frac{\pi}{2}} = 2\varphi = \angle DAC = \frac{\pi}{2}$

значит, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\gamma = 2\alpha$

тогда $\angle AO_2B = \frac{\pi}{2} = \angle AO_1B$; $\angle O_2AD = \angle O_1AC = z$

$\frac{\pi}{4} + z = \frac{1}{2}\gamma = \alpha \Rightarrow z = \alpha - \frac{\pi}{4}$

Продолжим F до пересеч с ω_2 $F' \in \omega_2$

$\angle F'CB = z + \frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle F'BC = \frac{\pi}{2} \Rightarrow BF' = BC$

$\left.\begin{array}{l} BF' = BC \\ BD = BF' \\ \angle DBF' = \angle FBC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle DF'B = \triangle FBC \Rightarrow$

$\Rightarrow FC = DF' = 2R = \underline{10}$

б) т.к. $\triangle BFC = BDF' \Rightarrow \angle BFC = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BC}{BF} = \frac{6}{10} =$

$= \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow BF = CF \cdot \cos\alpha = 8$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

в $\triangle DAC$ т.к. $\angle ACD = \frac{\pi}{4} \Rightarrow AD = AC = b \Rightarrow$

$\Rightarrow DC = 14 = b\sqrt{2} \Rightarrow b = 7\sqrt{2}$

$\angle ACF = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{3\pi}{4} - \alpha$

$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AC \cdot \sin ACF = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) =$

$= 35\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) = 35\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right)\right) =$

$= \cancel{35}^{7}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{7}{\cancel{5}} = 49$

Ответ: $CF = 10$

$S_{ACF} = 49$

№2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

~~$\sqrt{2}\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 14x$~~

~~$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$~~

$-\sqrt{2}\sin 7x \sin 4x - \sqrt{2}\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}\cos^2 7x - \sqrt{2}\sin^2 7x$

$\cos 7x\left(\cos 7x + \sqrt{2}\sin 4x\right) = \sin 7x\left(\sin 7x - \sqrt{2}\sin 4x\right)$

№7

$\begin{cases} y \geq \underbrace{2^x + 3 \cdot 2^{65}}_{=A} \\ y \leq \underbrace{70 + (2^{64} - 1)x}_{=B} \end{cases}$

найдём мн-во между A и B

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$2^x + 6 \cdot 2^{64} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$

при $x < 0$ 2^x не влияет $\Rightarrow$

$x \geq \frac{6 \cdot 2^{64} - 70}{2^{64} - 1} > 0$ $\Rightarrow$ при $x < 0$ реш-й нет

при $x \geq 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$3375 = 27\cdot125$

$125 \times 27 = 875 + 250 = 3375$

333555

$C_8^3 \cdot C_5^3 = 56\cdot10 = 560$

N8

3 место для 5

размещ-е 5-к   размещение 3-х троек

5 мест для 333

$C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3\cdot C_5^2\cdot 2 =$

$C_5^2 = \frac{5\cdot4}{2} = 10 \cdot 2 = 20$

$\cos14x = \cos^2 7x - 1$

$\cos7x$

$\cos(\alpha+\frac{\pi}{4}) - \cos(\beta+\frac{\pi}{4}) = \cos(\alpha+\beta)$

$n = 5+2+1$

5 для 9   4 для 3

$\sin(7x+\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}-7x) = \cos(7x-\frac{\pi}{4})$

$= C_8^3(C_5^3 + 2C_5^2) = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\left(\frac{5\cdot4}{2} + 2\cdot\frac{5\cdot4}{2}\right) =$

$= 56(10+20) = 56\cdot30 = 1680$ $56\times30 = 1680$

$\cos14x = \cos(11x+3x)$

2) $\cos11x - \cos3x - \sin11x + \sin3x = \sqrt2\cos14x$

$\cos11x - \cos3x - \sin11x + \sin3x =$

$\cos11x - \sin11x - (\cos3x - \sin3x) = \sqrt2\cos14x$

$\cancel{\sqrt2}\cos(11x+\frac{\pi}{4}) - \cancel{\sqrt2}\cos(3x+\frac{\pi}{4}) = \cancel{\sqrt2}\cos14x$

$-2\sin(7x+\frac{\pi}{4})\sin(4x) = \cos14x$

$\cos(11x+\frac{\pi}{4}) - \cos(3x+\frac{\pi}{4}) = \cos14x$

$\frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt2}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt2}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt2}{2}\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{2}\cos 14x = \sqrt{2}\cos 11x \cos 3x - \sqrt{2}\sin 11x \sin 3x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 11x\cos 3x - \sqrt{2}\sin 11x \sin 3x$

$90 - \frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{4} + \alpha$

$\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha) = -\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha$

$u - \gamma = \frac{\pi}{4} - \alpha$ ... $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$\varphi + \gamma = \frac{\pi}{4}$ $\quad 45 - \alpha + 45 = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$45 + \alpha - 45 = \alpha$

$b^2 + 2r^2 - 2br\sqrt{2}\sin\alpha = y^2$

$b^2 + 2r^2 - 2br\sqrt{2}\cos\alpha = x^2$

$b^2 = 2r^2 + 2r^2\sin 2\alpha$

$x^2 + y^2 = 4r^2 + 4r^2 - 2br\sqrt{2}($

$8r^2$

$2br\sqrt{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

$b =$

3) $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg x y} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$ $\quad 4r^2 \quad x > 0 \quad y > 0$

$8b^2r^2(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 16r^4$

$(16r^4 + 16r^4\sin 2\alpha)(1 + \sin 2\alpha)$

$16r^4 + 16r^4$

$x^2 - x(2y + 4) - 3y^2 + 12y = 0$

$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 =$

$= 16(y^2 - 2y + 1) = 16(y-1)^2$

$x_1 = \frac{2y + 4 + 4y - 4}{2} = 3y$

$x_2 = \frac{2y + 4 - 4y + 4}{2} = 4 - y$

$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{6r} \\ b < +0+>^{ax} \cdot x - x \end{cases}$

I. $x = 3y$

$a^{\log c} = c^{\log b}$

$b^a = c^a$

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{4\lg 3y}$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{4\lg 3y}$

$\left(\frac{y^4}{3y^4}\right)^{\lg 3y} = 1$

$\frac{y^4}{3} = y^4$

$\frac{y^4}{3y^4} = 1$ реш-й нет

$y^4 - y^4 = 3y^4 \Rightarrow$

$-2y^4 = 0 \quad y = 0 \Rightarrow x = 0 \notin ООЗ$

$\lg 3y = 0$

II. $x = 4 - y$

$x = 10 \quad 3y = 10 \quad y = \frac{10}{3}$

реш-й нет

$x - x \cdot 2^{ax} + 0 + > 2 \cdot 6^{6x} < 2 \cdot 6 \cdot 2^{ax} - 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2\lg(-y^2+4y)}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} = y^{2(\lg x+\lg y)} = y^{2\lg x}\cdot y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2\lg(4-y)}\cdot y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2\lg y}$$

$$y^{3\lg(4-y)}\cdot(4-y)^{-\lg(4-y)} = y^{2\lg y}$$

$$y^{3\lg(4-y)-2\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{2\lg y} = 10^{\lg y^{2\lg y}} = 10^{2\lg^2 y}$$

$$y^{3\lg x} = 10^{\lg y^{3\lg x}} = 10^{3\lg x\cdot\lg y}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$$

$$y^{5\lg x}\cdot x^{-\lg x} = y^{2\lg x}\cdot y^{2\lg y}$$

$$\cancel{y^{3\lg x} = (y^2/x)^{\lg x}}$$

$$2^4\cdot 2^{-1} = 2^3$$

$$y^{3\lg x}\cdot x^{-\lg x} = y^{2\lg y}$$

$$\cancel{10^{3\lg^2 x}\cdot 10^{-\lg^2 x} = 10^{2\lg^2 y}}$$

$$\cancel{10^{2\lg^2 x}}$$

$$10^{3\lg x\lg y}\cdot 10^{-\lg^2 x} = 10^{2\lg^2 y}$$

$$10^{(3\lg x\lg y-\lg^2 x)} = 10^{2\lg^2 y}$$

$$3\lg x\cdot\lg y-\lg^2 x = 2\lg^2 y$$

$$\lg^2 x-3\lg x\lg y+2\lg^2 y = 0$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$D = 9\lg^2 y - 8\lg^2 y = \lg y$ $\qquad y^{4\lg y} = y^{2\lg y^2}$

$\lg x = \frac{3\lg y + \lg y}{2} = 2\lg y$ $\qquad 7\cdot 7 \quad 4\cdot 3 \quad 4+7=11$

$y^{3\lg y^2} = y^{2\lg y^3}$

$\lg x = \lg y$ $\qquad x; y > 0$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \cancel{\lg x} \; x = y^2 \\ x = y \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 4 - y \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 11x - \cos 3x$ $\qquad \cos 14x = 2\cos^2 7x - 1$

$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cancel{\cos 7x}$ $(\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos^2 7x - \sin^2 7x$

1) $x = y^2$
$x = 3y$
$y^2 = 3y$
$y = 0 \quad y = 3$
$x = 9$
$9; 3$

2) $x = y^2$
$x = 4 - y$
$y^2 = 4 - y$
$y^2 + y - 4 = 0$
$D = 1 + 16 = 17$
$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$
$\cancel{x = \frac{18 \ldots \sqrt{17}}{2}}$

3) $x = y$
$x = 3y$
$x = 0 \quad y = 0$
$\notin ООЗ$

$\cos 7x = \cos 4x \cos 3x$

$\cancel{2\cos\left(\frac{12x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}$

$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \boxed{\frac{9 - \sqrt{17}}{2}}$

4) $x = y$
$x = 4 - y$
$y = 4 - y$
$y = 2$
$x = 2$
$(2; 2)$

$\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

$2\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{2x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$

$-2\sin 4x\left(\cancel{\cos 7}\sin 7x + \cos 7x\right)$

Ответ: $(2; 2)$; $(9; 3)$; $\left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$

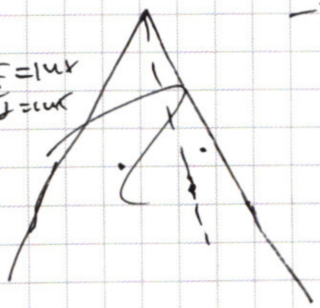
$-2\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \cos 14x$

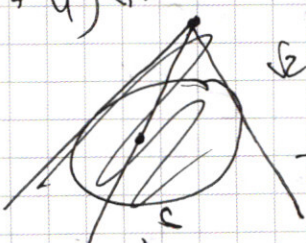
$\frac{\alpha + \beta}{2} = 14x$ $\quad \frac{2\alpha}{2} = 14x$ $\quad \alpha = 14x$

$\frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \quad \alpha = \beta$

$\cos 14x \cdot \cos 0$

$\frac{1}{2}(\cos 7x$





$\sqrt{2}\cos^2 7x + 2\cos 7x \sin 4x -$

$-\sqrt{2}\sin^2 7x + 2\sin 7x \sin 4x =$

$= \sqrt{2}\cos 7x\left(\cos 7x + \sqrt{2}\sin 4x\right)$

$- \sqrt{2}\sin 7x\left(\sin 7x - \sqrt{2}\sin 4x\right) = 0$

$\cos 7x\left(\cos 7x + \sqrt{2}\sin 4x\right) =$
$\sin 7x\left(\sin 7x - \sqrt{2}\sin 4x\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

5) $\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$ ровно 2 реш.

1) $\frac{+}{+}$ ~~$y-3-x+y-3+x=6$~~

$y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6$

$2y-6=6$

$y=6$

$y-3-x \qquad y-3+x$

$y-3-x>0 \qquad y-3+x>0$

$y>x+3 \qquad y>x-3$

2) $\frac{-}{+}$

$x+\cancel{3}-\cancel{y}+\cancel{y}-\cancel{3}+x=6$

$2x=6$

$x=3$

$y-3-x<0 \qquad y-3+x<0$

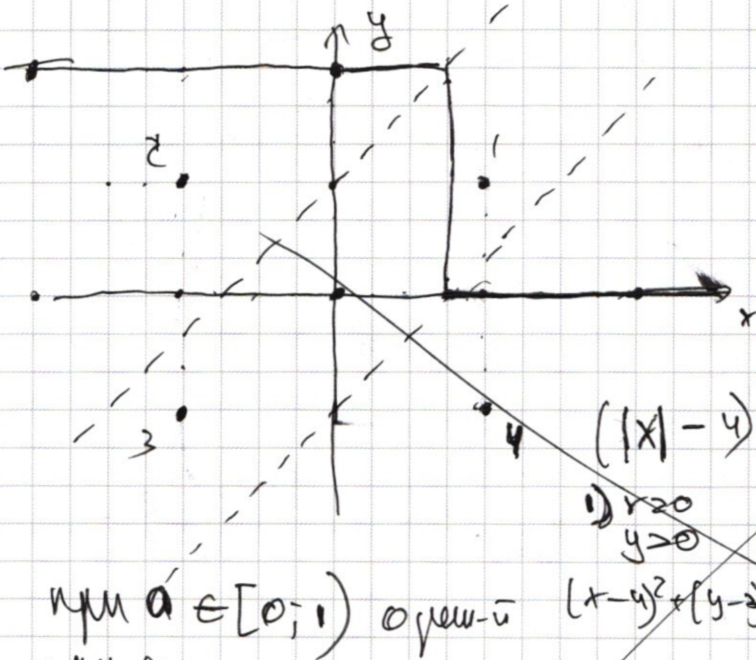
$y<x+3 \qquad y<x-3$

3) $=$

$6-2y=6$

$2y=0$

$y=0$

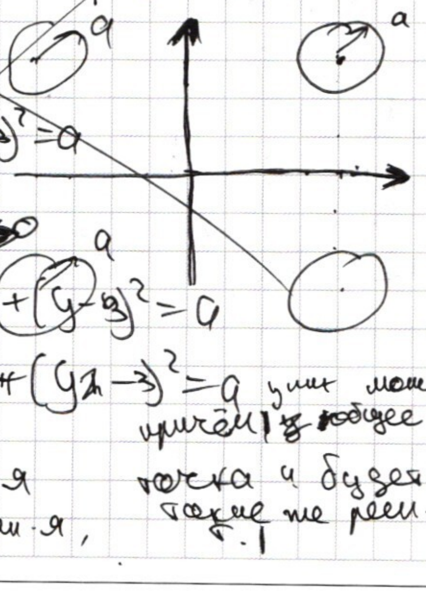


$(1;9)$ — ответ.

$(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$

1) $x\geq0$, $y\geq0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=a$



при $a\in[0;1)$ 0 реш-й

при $a=1$ 1 реш-е

при $a\in\boxed{(1;9)}$ 2 реш-я

при $a=9$ 4 реш-я

~~при $a=25$~~ При последующих a

2) $x<0$ $y\geq0$

$(-x-4)^2+(y-3)^2=a$

$(x+4)^2+(y-3)^2=a$

у точки 1 будет минимум 2 реш-я

у точки 2 будет минимум 2 реш-я,

уже может быть только причём ~~1~~ общее реш-е.

точка 4 будет давать такие же реш-я, что и т. 1

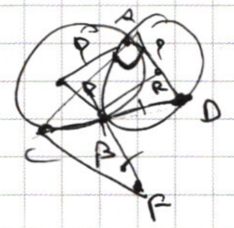
$$\begin{cases} y > 2^x + \cancel{8} \; 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

кол-во пар целых чисел

$$2^x + 3\cdot 2^{65} < y \le 70 + x\cdot 2^{64} - x$$

$$70 + x\cdot 2^{64} - x > 2^x + 3\cdot 2^{65} = 2^x + 6\cdot 2^{64}$$

~~70 = x ... 2^x~~



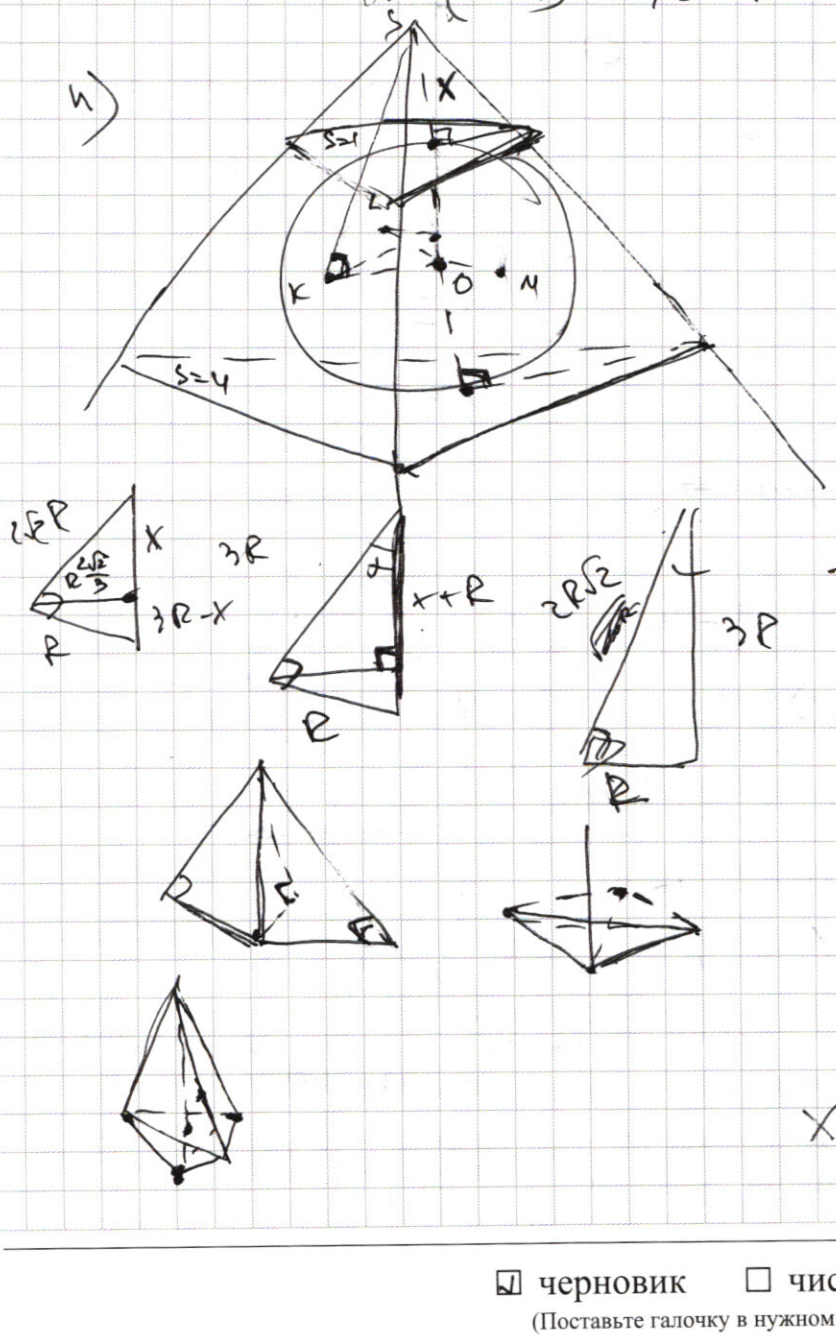
$$x\cdot 2^{64} - 6\cdot 2^{64} + 70 - x - 2^x > 0$$

$$2^{64}(x-6) + 70 - x - 2^x > 0$$

при $x<0$ $-2^x < 0$ и мало => сводится к реш-ю

$$2^{64}(x-6) + 70 - x > 0$$

4)



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{S(S_1; ABC)}{S(S_1; A_1B_1C_1)}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{x}{x+2R}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{x+2R} = \frac{1}{2}$$

$$2x = x + 2R$$

$$x = 2R$$

~~$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$~~

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$$

$$h = \frac{ab}{c} = \frac{R\cdot 2R\sqrt{2}}{3R} = R\,\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$x(3R-x) = R^2\cdot\frac{8}{9}$$

$$3Rx - x^2 = R^2\frac{8}{9}$$

$$x^2 - 3Rx + R^2\frac{8}{9} = 0$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)