

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5⁰

Сначала разложим число 3375 на простые множители: $3375 = 3^3 \cdot 5^3$

Отсюда сразу вытекают два основных типа чисел, которые мы собираемся искать:

- 1.) Числа, состоящие из одной "9", одной "3", трёх "5" и трёх "1"
- 2.) Числа, состоящие из трёх "3", трёх "5" и двух "1"

Рассмотрим эти два случая (иных быть не может, т.к. цифр evidentemente больше, чем в этом числе нет, а числа, содержащие "0" абстрактности будут давать "0", поэтому ставим на недостающие места "1").

2.) Для начала разместим на 8 позиций цифры "1". Способ это сделать существует $C_2^8 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ (это следует из того, что расставляемые цифры одинаковы)

Далее на оставшиеся 6 позиций разместим цифры "3": $C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 20$

Цифры "5" займут оставшиеся позиции; тогда итоговое кол-во: $20 \cdot 28 = 560$
В этом случае

- 1.) Аналогично для первого случая получаем.

Способ разложить "9" : 8

"3" : 7

$$\text{"1"}: C_8^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$\text{Итого: } 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\text{Суммируем для случаев 1 и 2: } 1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680

№3

Рассмотрим второе ур-е, решим его относительно x :

$$x^2 - 2x(y+2) - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$D = 4(y+2)^2 + 12y^2 - 48y = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$$
$$= 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) = (4(y-1))^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2(y+2) \pm 4(y-1)}{2}$$

$$\begin{cases} x = y+2+2y-2 = 3y \\ x = -y+4 \end{cases}$$

* $x > 0$
 $y > 0$

Логарифмируем обе части первого уравнения:

$$\lg y \left(\frac{1}{5} \right)^{\lg x} = \lg y \cdot 2 \lg xy$$

$$2 \lg xy = \lg x (5 - \lg y x)$$

$$2 \lg x + 2 \lg y = \lg x (5 - \lg y x)$$

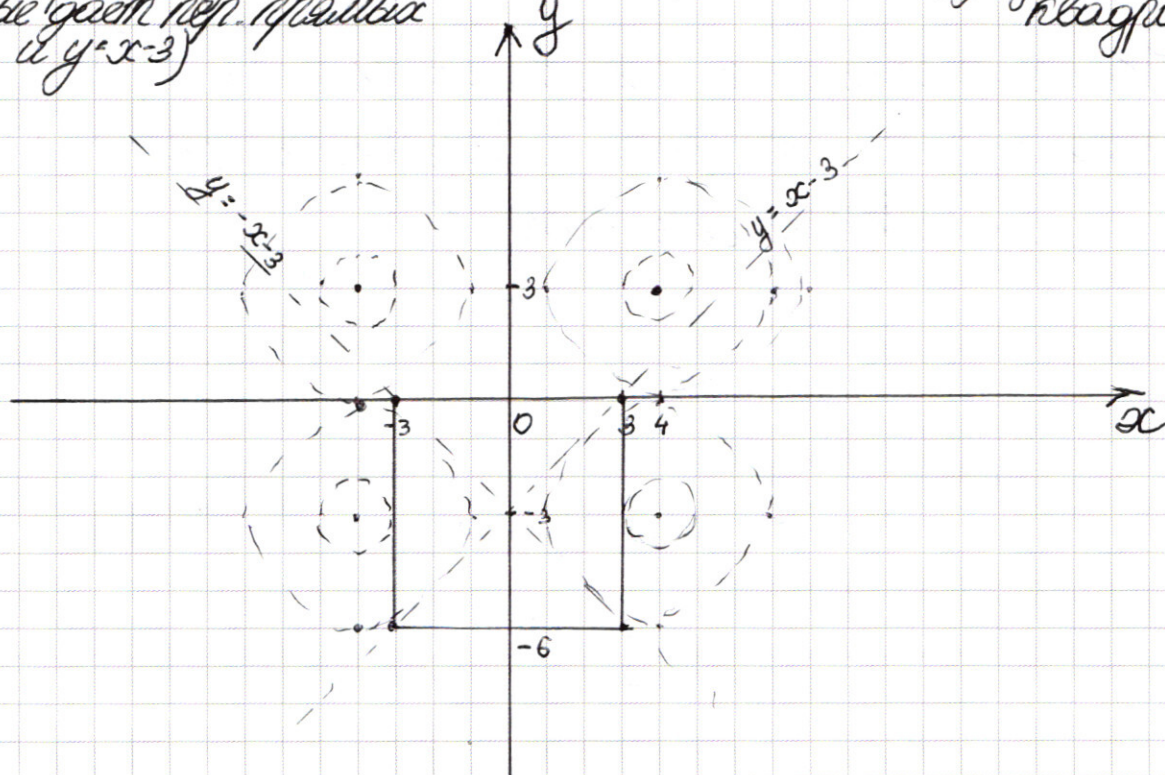
Пусть $\lg x = a$, $\lg y = b$

$$2a + 2b = a \left(5 - \frac{a}{b} \right) \quad (\lg y = 0, \text{ т.е. } y=1 \text{ не подходит})$$

$$2b^2 - 3ab + a^2 = 0 \quad (\text{прод. см. на стр. 7})$$

5°5

Вспомогательный модуль в ~~первой~~ ~~второй~~ ^{первой} четверти уравнений системы и изобразим полученную фигуру (она задает квадрат)
(рассмотрев разные части плоскости, которые дают пер. прямые $-x-3=y$ и $y=x-3$)



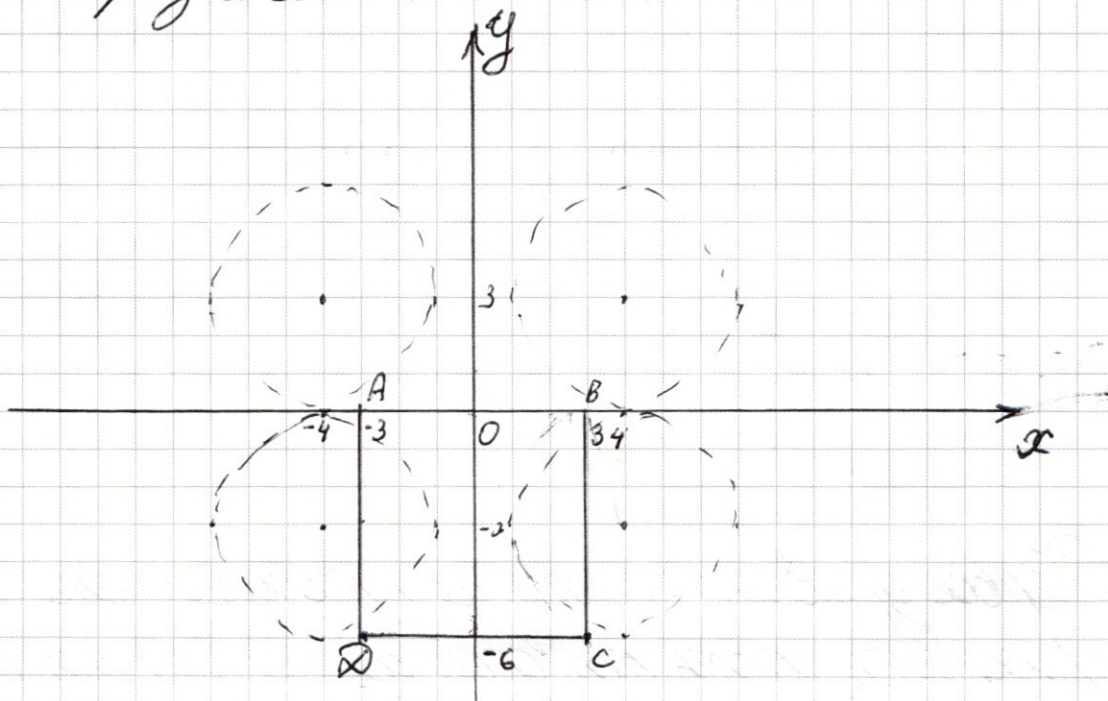
Первое уравнение системы представляет собой окружность, часть которой из первой четверти отражается симметрично относительно Ox и Oy .

Сначала рассмотрим случай, когда отраженная окружность располагается полностью в первой четверти. В случае, если $a^* < 1$ точек касания с квадратом не будет, в случае $a^* = 1$ две нижние окружности будут давать по одной общей точке.

Далее, пока первая окружность будет отражаться полностью, точек пересечения будет 4 (т.е. когда $a^* \in (1; 9]$ (так же от двух нижних окружностей)).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Далее изобразим ситуацию при $a \in (3; 4)$,
когда окружность уже "обрезалась" осью Ox ,
но еще не обрезалась осью Oy :



При увеличении радиуса окружности от 3 до $\sqrt{10}$
будет наблюдаться 4 пересечения на BC и AD , от $\sqrt{10}$
до $\sqrt{16}$ так же, но на AB и DC . Аналогичное
будет выполняться и до $r=5$ (пересечение в $(0;0)$ и
 $a=25$ $(0; -6)$).

При дальнейшем увеличении a , точек будут и
вовсе отсутствовать

Ответ: $a=1, a=25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

52

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) \cdot (-2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = 0 & (II) \end{cases}$$

$$(I) \quad \sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\sin 7x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 7x \right) = 0$$

$$2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(II) \quad -2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$-2 \sin 4x - \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - 7x \right) - \sin 7x \right) = 0$$

$$-2 \sin 4x - \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$-2 \sin 4x - 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0$$

$$\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0$$

$$\sin(4x) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = 0$$

$$\sin\left(-1,5x + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(5,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(-1,5x + \frac{\pi}{8}\right) = 0 & (1) \\ \cos\left(5,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad -1,5x + \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{8} - \pi n = 1,5x, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad 5,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$11x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}, l \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}, l \in \mathbb{Z}$$

Зад 5-3

$$\begin{cases} b=a \\ b=\frac{1}{2}a \end{cases}; \begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg x^2 = \lg y \end{cases}; \begin{cases} x=y \\ x^2=y \end{cases}$$

Рассмотрим комбинации из полученных совокупностей:

1.) $\begin{cases} x=3y \\ x=y \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ - не подходит

2.) $\begin{cases} x=3y \\ x^2=y \end{cases}; \begin{cases} x=3y \\ 9y^2=y \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{9} \end{cases}$ ($y=0$ - не подходит)

3.) $\begin{cases} x=4-y \\ (4-y)^2=y \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

4.) $\begin{cases} x=4-y \\ (4-y)^2=y \end{cases}; \begin{cases} x=4-y \\ 16-8y+y^2=0 \end{cases}$ $y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-64}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$

$\begin{cases} x = \frac{8-9-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ - не подходит ($x < 0$)

$\begin{cases} x = \frac{8-9+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right); \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right); (2; 2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = -y$$

$$x = 3y + 4$$

$$* \quad b = 1$$

$$\text{пу } x = a$$

$$\text{пу } y = b$$

$$2a + 2b = a(5 - \frac{a}{b})$$

$$2a + 2b = 5a - \frac{a^2}{b}$$

$$2ab + 2b^2 = 5ab - a^2$$

$$2b^2 - 3ab + a^2 = 0$$

$$b =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^{2\lg x} (x^{3\lg y - \lg x} - y^{2\lg y}) = 0$$

$$y^{2\lg x} = 0$$

$$y^{2\lg y} = 0$$

$y = 0$ - не подходит

$$x^{3\lg y} = y$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$b_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{4}$$

$$b = \frac{1}{2}a$$

$$y^{2\lg xy} =$$

$$x^{3\lg y} =$$

$$\frac{1}{x} \lg x = 1$$

$$y = 1$$

$$x^2 - 2x - 4x - 3 + 12 = 0$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{3\lg x}} = y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x =$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x = 3$$

$$3^{-\lg 3} = 1$$

лог. Пролог. все части

$$2 \lg xy = \lg y \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x$$

$$2 \lg xy = \lg x \cdot \lg y \cdot \frac{y^5}{x^5}$$

$$2 \lg xy = \lg x \cdot (5 - \lg y x)$$

$$2 \lg x + 6$$

$$(9y - 1)$$

2

$$-12 \sin 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (-2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$-2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x = 0$$

$$-2 \cdot 2 \sin 4x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x$$

$$\sin 7x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 7x \right) = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \cdot \left(\cos \frac{7x - \frac{\pi}{2} + 7x}{2} \right) = 0$$

$$\cos 7x \sin \left(\frac{\pi}{2} - 7x \right) - \sin 7x$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cdot \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$\sin(4x) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$$

$$\sin\left(-1,5x + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(5,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = x$$

(1)

$$\frac{1}{3} \lg 3y$$

$$\frac{1}{3} \lg x$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg x} y$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{2 \lg x} (y^{3 \lg x} \cdot x^{-\lg x} - y^{2 \lg y})$$

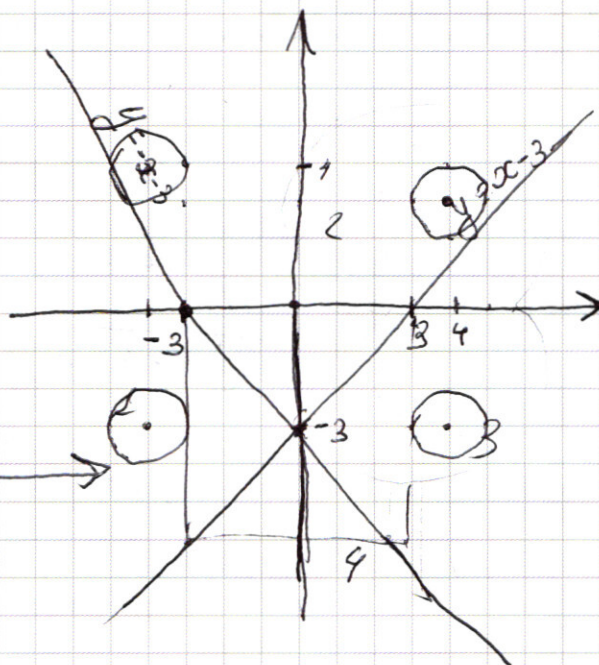
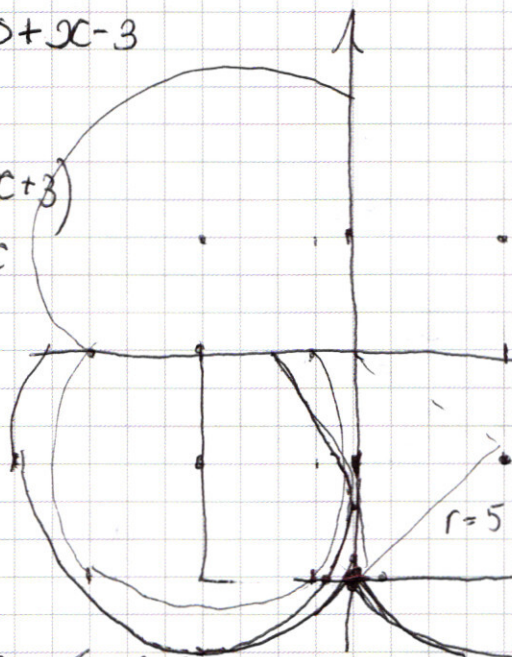
5⁰ 5

$$y > (-x-3)$$

$$y > +x-3$$

$$y > -(x+3)$$

$$y > (x-3)$$



при $y < -x-3$ и $y < x-3$

$$-y+3+x - y+3-x = 6$$

$$y = 0$$

от 5 до 4

при $y > -x-3$ и $y < x-3$

$$y-3-x - y+3-x = 6$$

$$x = -3$$

при $y > -x-3$ и $y > x-3$

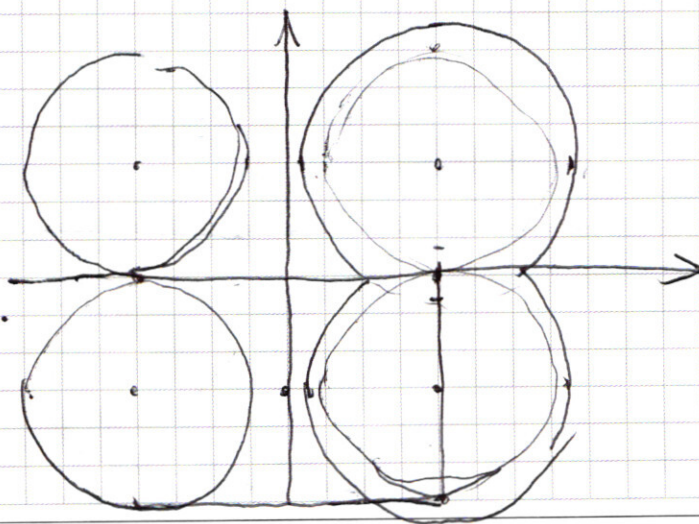
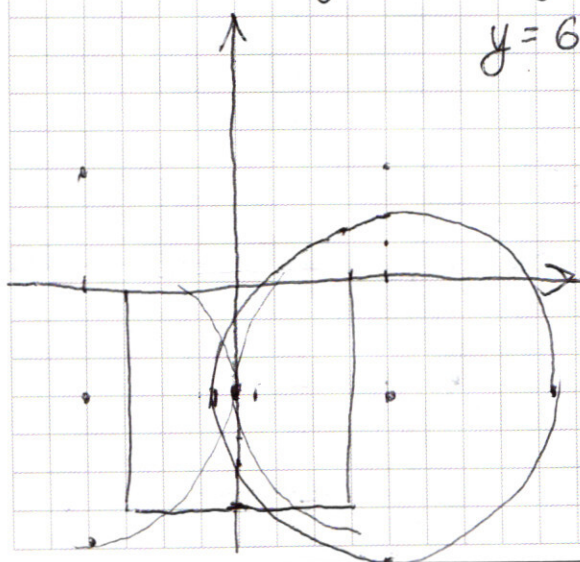
$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$y = 6$$

при $y < -x-3$ и $y > x-3$

$$-y+3+x + y+3+x = 6$$

$$x = 3$$

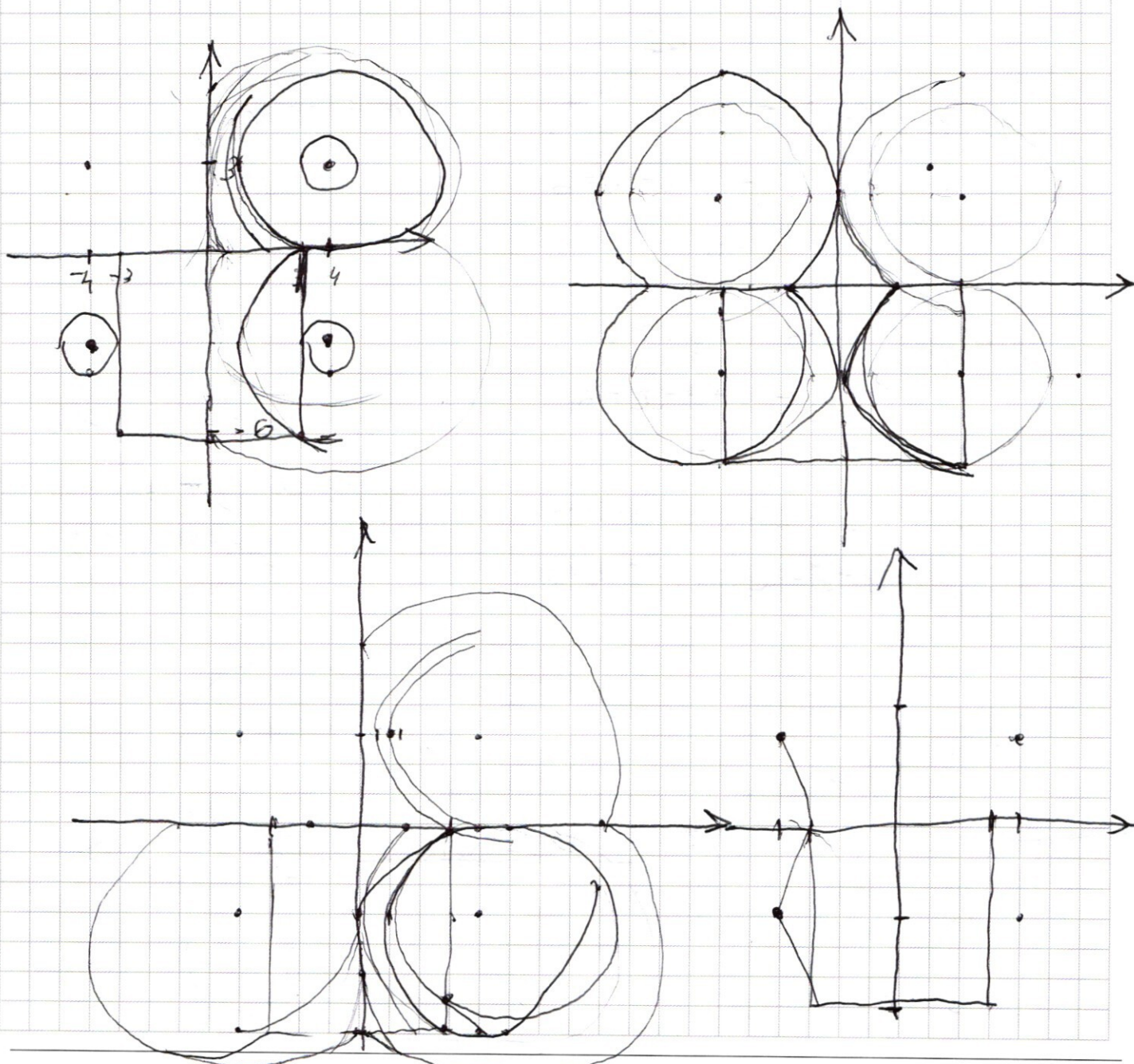


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 25 \\ \hline 25 & 135 \\ 87 & 10 \\ 75 & 35 \\ 125 & 35 \\ & 0 \end{array}$$

$$5^{-0}$$

$$5^3 \cdot 3^3 = 3375$$

$$15 \dots \dots$$

$$\frac{C_3^3}{3} \dots \frac{C_3^3}{3}$$

$$5^{-2}$$

$$\begin{aligned} \cos(a) - \cos(b) &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \sin(a) - \sin(b) &= +2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin(a) + \sin(b) &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

$$\sin 4x \cdot x$$

$$\begin{aligned} -2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 7x &= -2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \\ &= -2 \sin 4x (\sin 7x + \sin(\frac{\pi}{2} - 7x)) = \\ &= -2 \sin 4x (2 \sin \frac{7x + \frac{\pi}{2} - 7x}{2} \cdot \sin \frac{14x - \frac{\pi}{2}}{2}) = \sqrt{2} \cos \end{aligned}$$

$$-2\sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

* случай с 9

1.) случай ~~3~~ 3 "5" и 3 "3"

8 вариантов цифры 1 на позиции

4. N. $\frac{7-8}{2}$ вариантов постановки

1

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\frac{3 \cdot 2}{2}$$

$$5 \ 5 \ 5 \ 5$$

$$\sin a \cdot \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) =$$

$$= -2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 7x =$$

$$= -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) =$$

$$= -2 \sin 4x (\sin 7x + \sin(\frac{\pi}{2} - 7x)) =$$

$$= -2 \sin 4x \cdot 2 \cdot \sin \frac{7x - 7x + \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \sin \frac{7x - \frac{\pi}{2} + 7x}{2} =$$

$$= -4 \sin 4x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = -2\sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$-2 \sin 4x \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin 7x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 7x \sin \frac{\pi}{4})$$

$$-2 \cdot \frac{1}{2} (\cos(11x - \frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4} - 3x)) = \cos 14x$$

$$\cos(4x - 7x + \frac{\pi}{4}) - \cos(11x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - 3x) - \cos(11x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 3x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 3x - \cos 11x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin 11x \cdot \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 3x + \sin 3x - \cos 11x - \sin 11x)$$

$$-2 \sin 4x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 7x - \cos 7x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$x^2 - 2xy$$

$$x^2 - 2x(y+2) - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 4(y+2)^2 + 12y^2 - 48y = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = \\ &= 16y^2 - 32y + 16 = \\ &= 4(4y^2 - 8y + 4) = \\ &= 46(y+1)^2 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(y+2) \pm 4(y+1)}{2} = (y+2) \pm 2(y+1)$$

$$\begin{cases} x = y+2 - 2y-2 = -y \\ x = y+2 + 2y+2 = 3y+4 \end{cases}$$

$$y+2 \pm 2y-2$$

$$-y+4$$

$$x \lg x$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x \lg x}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x =$$

$$1.) x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right) \lg 3y = (y^2) \lg 3y^2$$

$$y^2$$