

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИС

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

- Обозначим за P - произведение цифр числа, которое ищем
- т.к. $P: 5^3$ (т.к. $P = 3375$) то среди цифр должно быть как минимум три пятерки (больше тем пять и кратное пяти не может быть т.к. это уже 10, что не является цифрой) $\Rightarrow$ три пятерки есть.
 - Заметим, что нулей не может быть (иначе $P=0$).
 $P: 3^3 \Rightarrow$ среди цифр найдутся или 9 и 3 одновременно или три тройки.

Оставшиеся позиции для цифр занимают единицы (чтобы P было равно 3375)

I сл. три тройки.

Выбрать для них места можно C_8^3 способами

В оставшиеся места поставим три пятерки $C_{(8-3)}^3$ способами

А в остальные две единицы $C_{(8-3-3)}^2$ способами

Они перемножаются т.к. для каждой расстановки троих I C_5^3 расстановок пятерок.

т.е. всего $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2$

II сл. девятка и тройка

Три пятерки C_8^3

Девятка в любое место из оставшихся C_5^1 , тройка C_4^1 , единицы C_3^2
сл. на отрезке

т.е. во втором сл. всего $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3$
 $\leq = C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_2^2 + C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 =$
 $= C_8^3 \cdot (C_5^3 + C_5^1 \cdot C_4^1)$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\leq = \frac{8!}{3!(5!)} \cdot \left(\frac{5!}{3! \cdot 2!} + 5 \cdot 4 \right) = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2} \cdot \left(\frac{4 \cdot 5}{2} + 5 \cdot 4 \right) =$$

$$= 7 \cdot 8 \cdot (10 + 20) = 56 \cdot 30 = 1680 - \text{это и есть кол-во восьмизначных чисел, произведение кот. равно 3375}$$

Ответ: 1680.

Задача 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 7x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$-2 \cdot \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cdot (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \cdot \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2} \cdot (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\begin{cases} \cos 7x = -\sin 7x \\ -2 \sin 4x = \sqrt{2} \cdot (\cos 7x - \sin 7x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \\ -2 \sin 4x = 2 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x - \sin 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}; k \in \mathbb{Z} \end{cases} - 6 \text{ ответов.}$$

$$\begin{cases} -\sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \\ \sin 4x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\sin 4x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

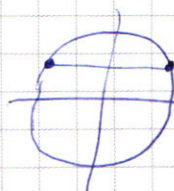
$$\begin{cases} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi m \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi s}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11} \end{cases} \quad s, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi s}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi s}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11} \end{cases}$$



Ответ:

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi s}{3}$$

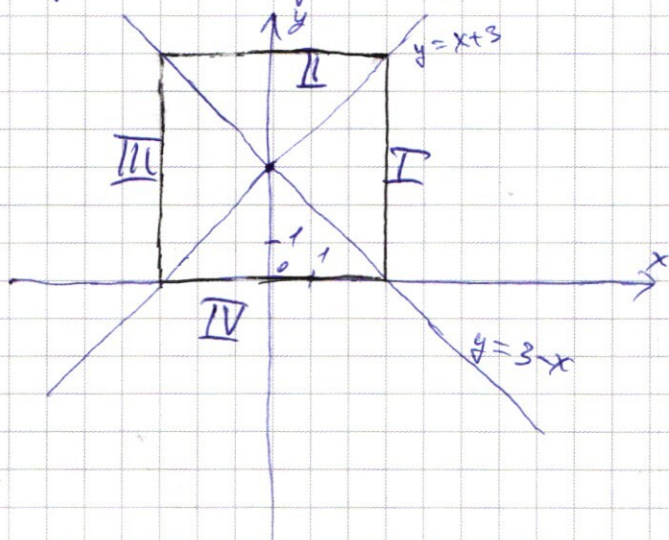
$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11}$$

$$\text{где } k, s, m \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$$



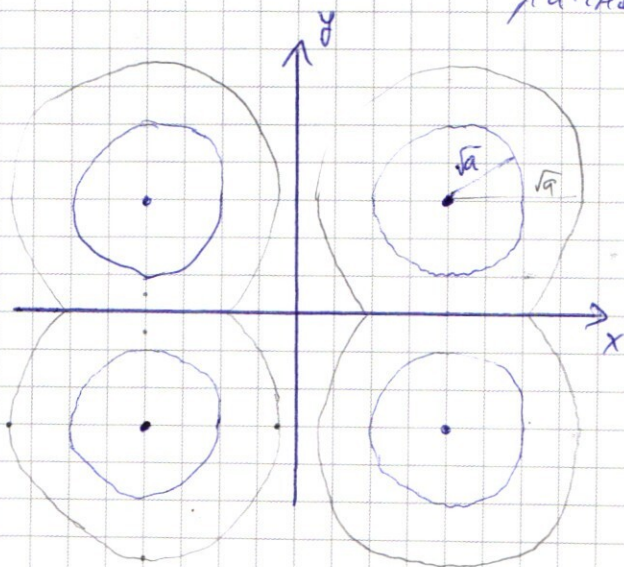
$$\begin{aligned} \text{I} \quad & y \geq 3 - x \quad + \quad x + 3 - y + y - 3 + x = 6 \\ & y \leq x + 3 \quad - \quad x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & 2y - 6 = 6 \\ & y = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & y - 3 - x - y + 3 - x = 6 \\ & x = -3 \end{aligned}$$

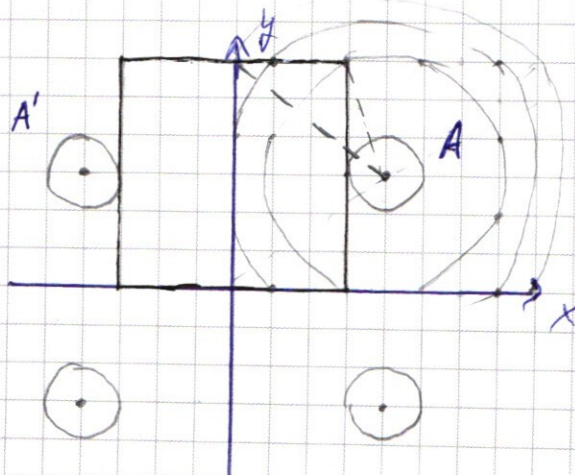
$$\begin{aligned} \text{IV} \quad & 3 + x - y - y + 3 - x = 6 \\ & -2y = 0 \quad y = 0 \end{aligned}$$

$(|x - 4|^2 + |y - 3|^2 = a$ - окр. радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(4; 3)$, отраженная симметрично от обеих осей:



см. на обороте,

Посмотрим на 2 ур-я в одной коорд. плоскости:



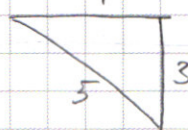
Как мы видели, если окр. A^* имеет пересечение с нашим терновым квадратом, то и окр. A' имеет такое же пересечение (симметрично от-но Oy)

Т.к. нам надо чтобы было ровно 2 корня, то окр. A должна пересекать квадрат не более чем в 1 точке.

* Запись „окр. A “ может означать не всю окружность. Например, при $a \geq 16$ она означает лишь часть окр. заключенной в положительные x и y .

I сл. A пересекает в 1 точке:

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 1 \\ \sqrt{a} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 25 \end{cases}$$



Случай $a = 25$ нам не подх. т.к. тогда и A' пересекает в той же точке, что и A , $\Rightarrow$ 1 реш.

Случай $a = 1$ полностью устраивает.

II сл. окр. A не пересекает. $\Rightarrow A'$ - тоже.

значит никакие окр. должны касаться ^{квадрата} по 1 разу.

Из рисунка понятно, что такое невозможно.

Ответ: $a = 1$

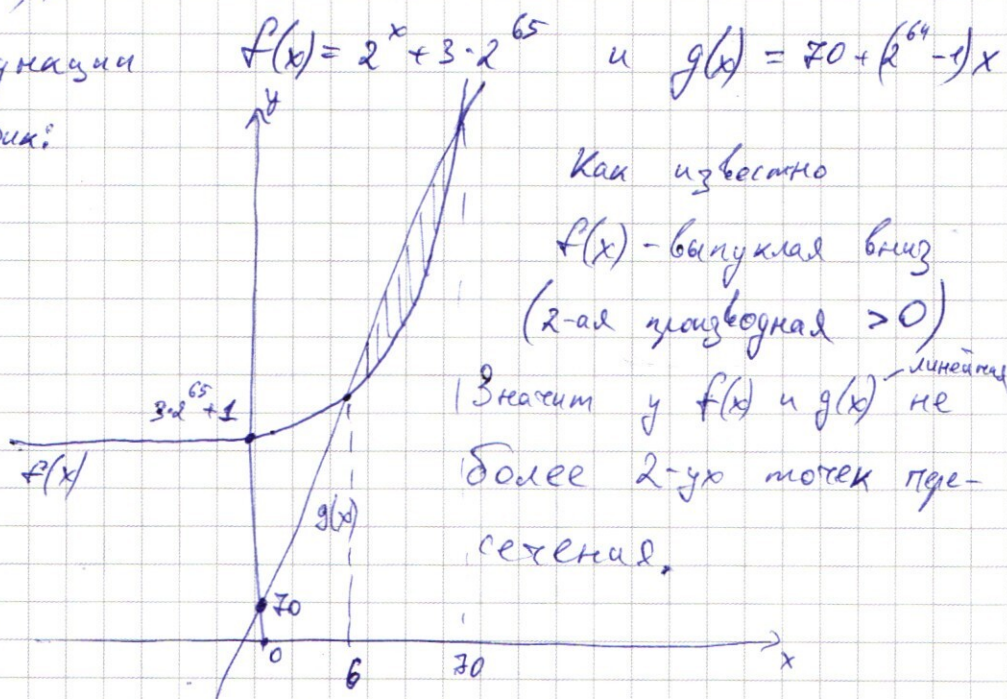
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Рассмотрим функции

Примерный график:



Тогда нам нужно найти все целочисленные точки в заштрихованной области.

$$\begin{cases} f(6) = 3 \cdot 2^{65} + 64 \\ g(6) = 2^{64} \cdot 6 + 70 - 6 = 3 \cdot 2^{65} + 64 \end{cases} \Rightarrow x=6 - \text{пересечение графиков.}$$

$$\begin{cases} f(5) = 3 \cdot 2^{65} + 32 \\ g(5) = 5 \cdot 2^{64} + 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & 3 \cdot 2^{65} + 32 > 5 \cdot 2^{64} + 65 \\ & 6 > 5 + \frac{33}{2^{64}} \quad \frac{33}{2^{64}} < 1 \\ & \Downarrow \\ & f(5) > g(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 3 \cdot 2^{65} + 16 \\ g(4) &= 2 \cdot 2^{65} + 66 \\ 3 \cdot 2^{65} &> 2 \cdot 2^{65} + 50 \\ 3 &> 2 + \frac{50}{2^{65}} \Rightarrow f(4) > g(4) \end{aligned}$$

$$f(x) = 128 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$g(x) = 7 \cdot 2^{64} + 63$$

$$7 \cdot 2^{64} \geq 3 \cdot 2^{65} + 65 \quad \Bigg| \Rightarrow \quad g(x) > f(x)$$

$$f(x_0) = 2^{x_0} + 3 \cdot 2^{65}$$

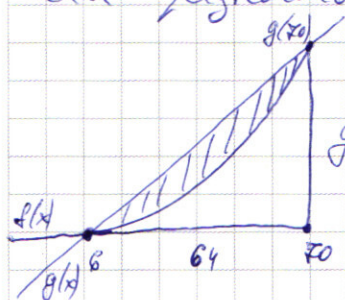
$$g(x_0) = 70 \cdot 2^{64}$$

$$2^6 + 3 \cdot 2^6 = 70 \quad \Bigg| \Rightarrow \quad f(x_0) = g(x_0)$$

$$64 + 6 = 70$$

$x = 70$ вторая
точка пересечения

Точки в заштрихованной области можно посчитать как разность точек в треугольнике и др. фигур:



$$g(x_0) - g(6) = 70 \cdot 2^{64} - 3 \cdot 2^{65} - 64 = 2^{64} \cdot 64 - 64 = 2^{64} \cdot (2^{64} - 1)$$

На высоте $2^{64} \cdot (2^{64} - 1) + 1$ точек.

В основании 65 целых точек.

$$\text{В прямоугольнике } 2^{64} \cdot 64 \cdot 65 - 63 \cdot 65$$

в Δ -ке

Кол-во целых точек можно посчитать как сумму ариф.

прогрессии $a_1 = 1, d = g(n+1) - g(n) = 2^{64} - 1 = 2^{64} - 1$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad n = 65$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{65 \cdot 1 + 2^{64} \cdot 32 \cdot 65}{2} = 65 + 65 \cdot 2^{69} = 65 \cdot 1 + 32 \cdot 65 \cdot (2^{64} - 1) = 2^{69} \cdot 65 - 65 \cdot 31$$

Теперь посчитаем кол-во точек под $f(x)$ в пределах нашего треугольника

$$f(n+1) - f(n) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$$

где $n \geq 6$

Обозначим эту сумму за T , тогда $T_n = 1 + (2^6 + 1) + (2^6 + 1 + 2^7) + (1 + 2^6 + 2^7 + 2^8) +$

$$+ \dots + (1 + 2^6 + \dots + 2^{n-1})$$

$n = 70$ в нашем сл.

$$T_n = 1 \cdot 65 + 2^6 \cdot 64 + 2^7 \cdot 63 + 2^8 \cdot 62 + \dots + 2^{n-1} \cdot 1$$

$$T_n = 1 \cdot 65 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_{n-1}, \quad \text{где } F - \text{сумма членов геом. прогрессии}$$

$$q = 2 \quad b_1 = 2^6$$

и. продолжение на след. стр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \Sigma &= S_n - T_n = 2^{69} \cdot 65 - 65 \cdot 31 - 2^{69} - 2^{68} \cdot 2 - 2^{67} \cdot 3 - 2^{66} \cdot 4 - \dots - 2^6 \cdot 64 - 65 = \\ &= (2^{69} - 2^{69}) + (2^{69} - 2^{68} \cdot 2) + (2^{69} - 2^{67} \cdot 3) + \dots + (2^{69} - 2^6 \cdot 64) + 2^{69} - 32 \cdot 65 = \\ &= 0 + 0 + 2^{67}(4-3) + 2^{66}(8-4) + 2^{65}(2^4-5) + \dots + 2^6(2^{63}-64) + 2^{69} - 32 \cdot 65 = \\ &= 2^{67} + 4 \cdot 2^{66} + 11 \cdot 2^{65} + 2^{64} \cdot 26 + \dots \quad \text{умнож.} \end{aligned}$$

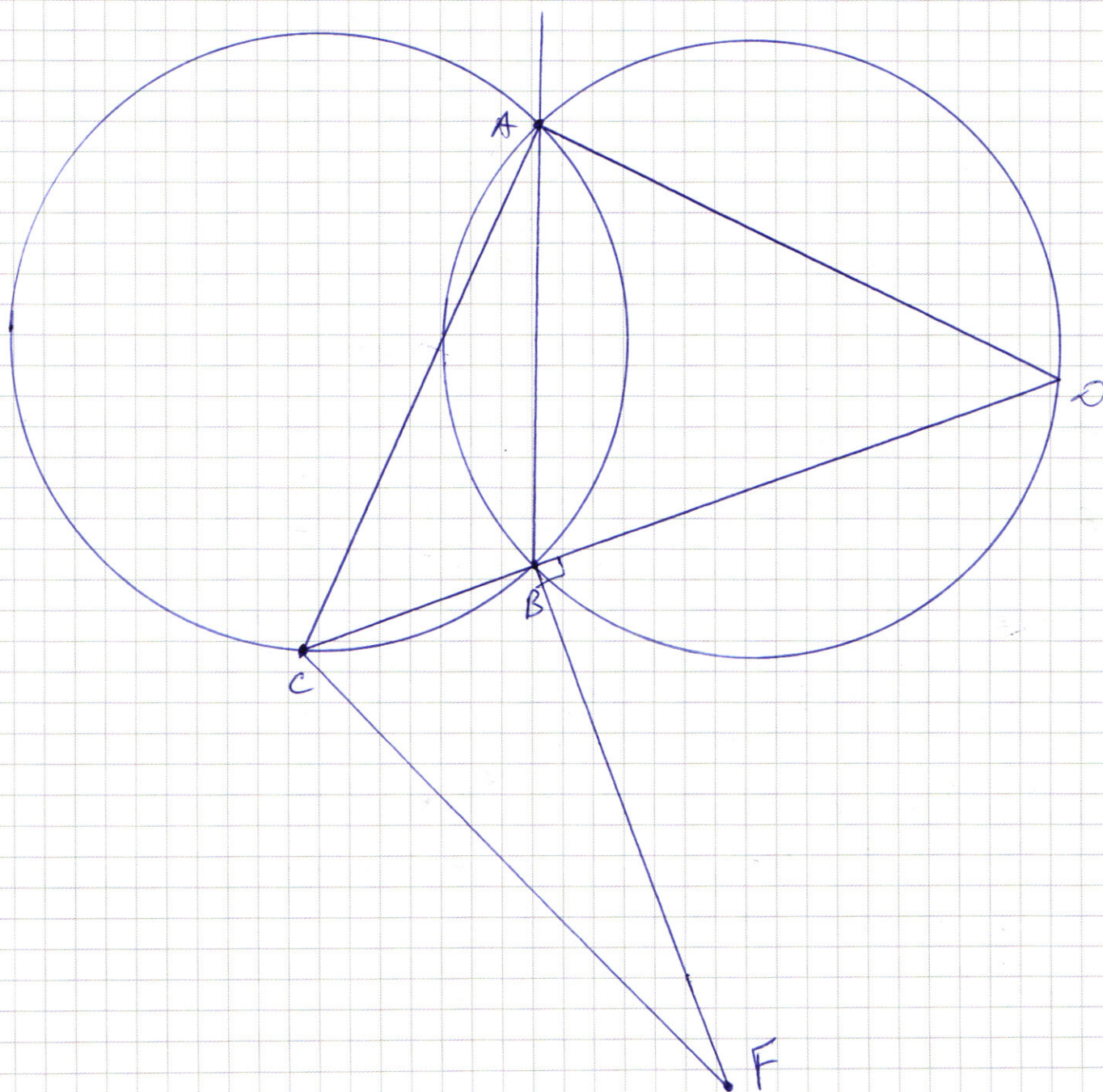
$$T_n = 65 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} \quad b_1 = 2^6 \quad q = 2 \quad n = 70$$

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{b_1 \cdot (q^m - 1)}{q - 1} \Rightarrow T_n = 65 + 2^6 (q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q - 68) = \\ &= 65 - 2^6 \cdot 69 + 2^6 \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} = 65 - 2^6 \cdot 69 + 2^6 (2^{n-1} - 1) = \\ &= 65 - 2^6 \cdot 69 + 2^{75} - 2^6 = 2^{75} + 65 - 2^6 \cdot 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= S_n - T_n = 2^{69} \cdot 65 - 65 \cdot 31 - 2^{75} + 65 + 2^6 \cdot 70 = \\ &= 2^{69} (65 - 2^6) - 65 \cdot 32 + 2^6 \cdot 70 = 2^{69} + 2^5 (140 - 65) = \\ &= 2^{69} + 32 \cdot 75 = 2^{69} + 2400 \end{aligned}$$

Ответ: $2^{69} + 2400$

Задача 6



В частном случае CF равна диаметру окружности

Ответ: $CF = 10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{1}{5}x} = y^{\frac{2}{5}xy}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12 = 0$$

Из 1-го: $x > 0$
 $xy > 0 \Rightarrow y > 0$

$$\begin{aligned} y^{\frac{5}{5}x} &= y^{\frac{2}{5}x} \cdot y^{\frac{3}{5}x} \cdot x^{\frac{1}{5}x} \\ y^{\frac{3}{5}x} &= y^{\frac{2}{5}x} \cdot x^{\frac{1}{5}x} \\ y^{\frac{2}{5}x} \cdot x^{\frac{1}{5}x} &= y^{\frac{2}{5}x} \cdot x^{\frac{1}{5}x} \\ (y^{\frac{2}{5}x})^{\frac{x}{y}} &= x^{\frac{x}{y}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y^2 = x \\ \lg \frac{x}{y} = 0 \\ xy > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ \frac{x}{y} = 1 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \\ xy > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ис. $x = y$

Подставляем во второе уравнение системы

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12 = 0$$

$$4x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \text{По 1-му } x > 0$$

$$\text{только пара } \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right)$$

Ис. $x = y^2$

$$x = y^2$$

Подставляем во второе т.к. $xy > 0$

то здесь $x > 0$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12 = 0$$

$$y^2(y^2 - 2y + 1) - 8y^2 + 12 = 0$$

$$y^2(y - 1)^2 - 4(2y - 3) = 0$$

Ни один из делителей 12 не подходит. Значит, корни иррациональные

$$\begin{aligned} &\text{г, б, с, д - корни} \\ &(y-a)(y-b)(y-c)(y-d) = 0 \\ &y^4 - y^3(abc + abd + bcd + acd) + \\ &+ y^2(ab + bc + cd + ac + ad + bd) + \\ &+ y(-a - b - c - d) + abcd = 0 \end{aligned}$$

$$abc + d = 12$$

$$a + b + c + d = 0$$

$$ab + bc + cd + ac + ad + bd = -7$$

$$abc + abd + bcd + acd = -2$$

π ол.

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12 = 0$$

$$x = y^2; \quad xy > 0 \Rightarrow y > 0$$

Заметим что $y^4 - 2y^3 - 7y^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{y^4 \cdot (-2y^3) \cdot (-7y^2)} =$
 $= 3 \cdot \sqrt[3]{y^9 \cdot 14} = 3y^3 \cdot \sqrt[3]{14}$ что > 0 при $y > 0$

значит $y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12 > 12 \Rightarrow$ корней нет.

Ответ: $\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 30 \\ \underline{37} \\ 35 \\ \underline{25} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ 5 \\ \underline{12} \\ 15 \\ \underline{15} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ 10 \\ \underline{35} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \overline{) 5} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

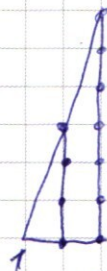
$$\begin{array}{r} 125 \overline{) 5} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$a + 3b = 0$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 30 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



$$(y^2 + ay + b)(y^2 + by + c) =$$

$$y^4 + y^3(a+b) + y^2(2+ab) + y(a+b) + 12$$

$$ab = -15$$

$$a = 3$$

$$b = -5$$

$$2a + 6b = 0$$

$$a + b = -2$$

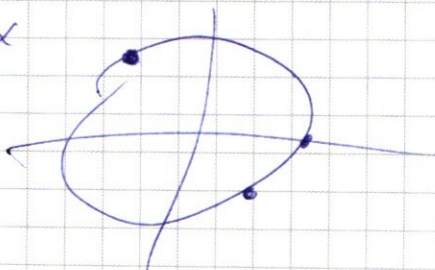
$$a + b = -2$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x = 2 \sin 4x \cdot \cos 7x =$$

$$= -2 \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) =$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \sqrt{2} =$$

$$\cos \alpha = -\sin \alpha$$



$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 \geq 3 \sqrt[3]{9 \cdot 14} \geq 3 \sqrt[3]{9 \cdot 14}$$

~~Решение~~

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$f(n+1) - f(n) = 2^{n+1} + 3 \cdot 2^{65} - 2^n - 3 \cdot 2^{65} = 2^n$$

$$\frac{y^{5/\lg x}}{x^{1/\lg x}} = y^{2/\lg x + 2/\lg y} = y^{2/\lg x} \cdot y^{2/\lg y}$$

$$y^{3/\lg x} = x^{1/\lg x} \cdot y^{2/\lg y} = y^{2/\lg x} \cdot x^{1/\lg y}$$

$$a^{1/\lg 6} = a^{\frac{\log_a 6}{\log_a 10}} = 6^{1/\lg a}$$

$$a^{1/\lg 6} = 6^{1/\lg a}$$

$$y^{-2/\lg y} = y^0$$

$$\cancel{x^{1/\lg x}} = y^{2/\lg xy} = x^{1/\lg xy}$$

$$\begin{cases} \lg xy = 0 \\ y^2 = x \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{y}$$

$$xy = 1$$

$$x^4 - 4x - 3y^2 + 10 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 3 = 0$$

$$x = y^2$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12 = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4x + 4) + 3(x - 1)$$

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot x}{2 \cdot x} = 6y^3$$

$$\frac{x^{1/\lg x}}{x^{1/\lg y}} = x^{1/\lg x - 1/\lg y} = x$$

$$y^{3/\lg y^2} = y^{2/\lg y^3}$$

$$y^{4/\lg y} = y^{2/\lg y^2}$$

$$12 \pm 6 \pm 2 \pm 3 \pm 1$$

$$16 + 16 - 7 \cdot 8 + 12$$

$$44$$

$$1296$$

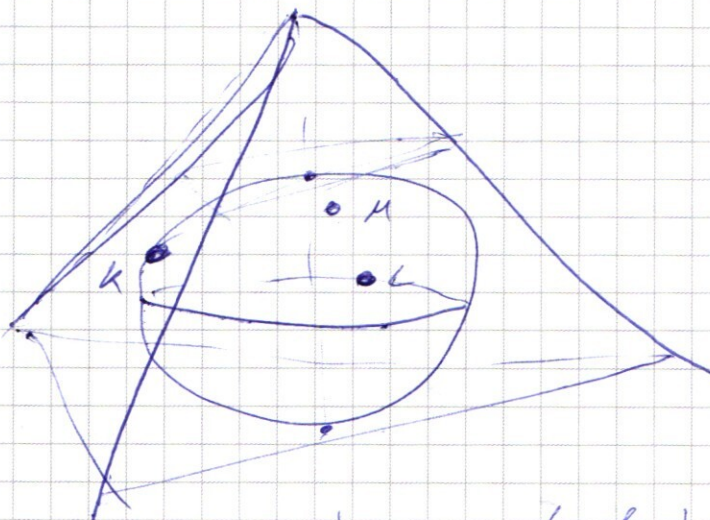
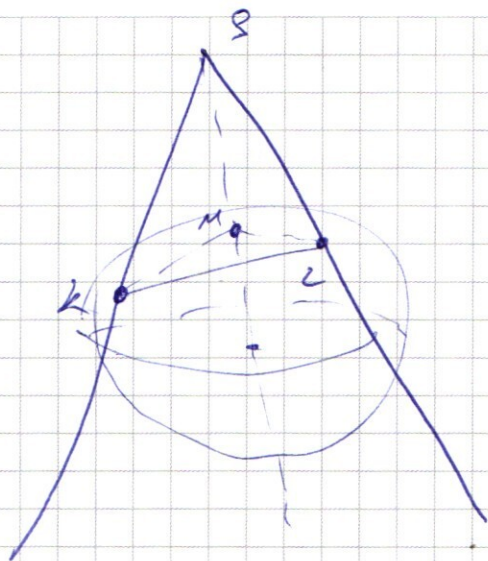
$$\frac{216}{432}$$

$$+3 \quad 81 - 54 - 63 + 12 \quad 0$$

$$-3 \quad 81 + 54 - 63$$

$$6 \quad 1296 - 432 -$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$V_T = \frac{1}{3} r \cdot S_{\text{пов.}}$$

$$|6-x| + |6+x| = 6$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$128 = 2^7$$

$$f(128) = 2^{128} + 3 \cdot 2^{65}$$

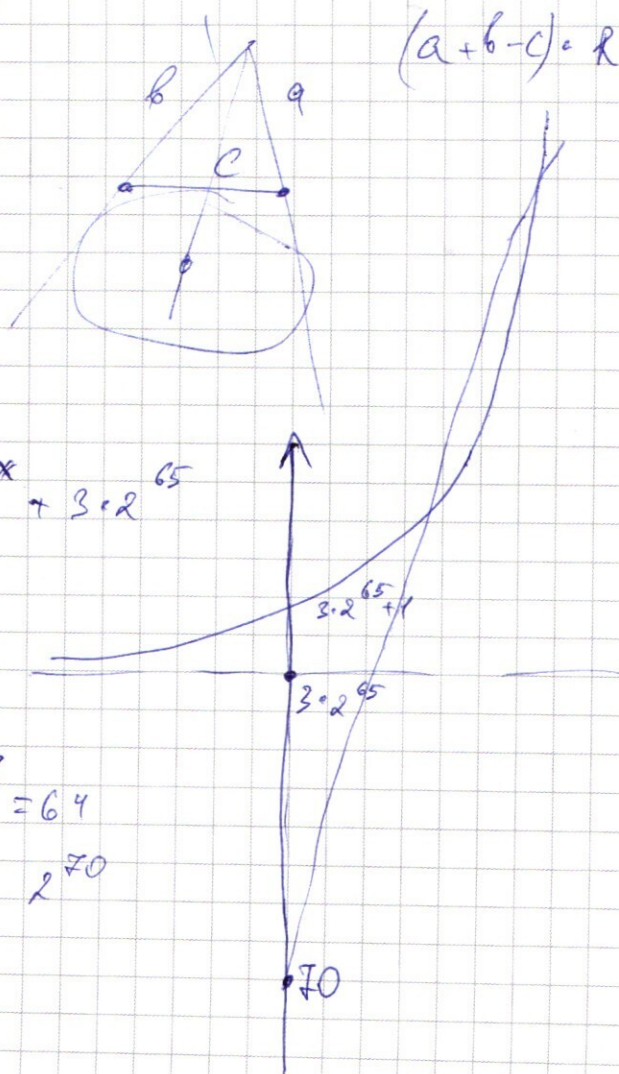
$$g(128) = 128 \cdot 2^{64} - 58$$

$$f(67) = 2^{67} + 3 \cdot 2^{65}$$

$$g(67) = 3 + 2^{64} \cdot 67$$

$$2^6 = 64$$

$$2^{70}$$





$$CB \cdot CD = c = CB (CB + BD) = CB^2 + CB \cdot BF$$

$$\triangle CBF \sim \triangle CAD$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{BF}{AD} = \frac{CF}{CD}$$

$$\beta - \alpha = \delta + \alpha$$

$$\beta + \gamma = 2\alpha + 2\delta = 90^\circ$$

$$\alpha + \delta = 45^\circ$$

$$a_1 \cdot n + d \cdot \frac{n(n+1)}{2} = h \cdot \frac{2a_1 + d(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+65}{2} \cdot 64 = 35 \cdot 64$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n =$$

$$= a + a_1 + d + 2d + 3d + \dots$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$128 = 65 \cdot 63$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 32 \\ \hline 450 \\ 225 \\ \hline 2400 \end{array}$$

$$F_n = \frac{b_1(9^n - 1)}{9 - 1}$$

$$b_2 = 9b_1$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ 65 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$4 \quad 16$$

$$5 \quad 32$$

$$6 \quad 64$$

$$5$$

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \quad 69$$

$$g(x)/g(6)$$

$$g(x)$$

$$g(6)$$

$$7$$

$$f(64) = 2^{64} (1 + 3 \cdot 2) = F_2^{64} \cdot 7 < g(7)$$

$$f(65) = 2^{65}$$

$$g(65) = 2^{64} \cdot 65 + 5$$

$$\begin{aligned} g(n+1) - g(n) &= \\ &= \frac{2^{64}}{n+1} + 2^{64} - n - 1 - \frac{2^{64}}{n+1} \\ &= 2^{64} - 1 \end{aligned}$$

$$g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$$