

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИС

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Найти разложение числа 64827 на простые: $64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Значит, возможные восьмизначные числа должны иметь набор цифр либо (1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7) либо (1, 1, 9, 3, 7, 7, 7, 7), т.к. кроме 7 не существует цифр, равной 7, и только 2 цифры, содержащиеся в разложении на простые только 3 и 9.

числа 1-го типа: $C_8^4 \cdot C_4^3$ — кол-во способов расставить по ост. 4 цифрам 3-ки
кол-во способов расставить 7-ки

числа 2-го типа: $C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$ — кол-во способов расставить 7-ки
кол-во способов расставить 3-ки

Значит, всего

$$C_8^4 \cdot C_4^3 + C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = C_8^4 \cdot C_4^1 \left(1 + C_3^1\right) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 \cdot 4 = 87 \cdot 4 = 1120$$

Ответ: 1120

Задача №3

$$\left(\frac{-x}{y}\right)^{\pm \ln(-y)} \cdot 2 \ln(xy^2) = x$$

ОДЗ:

$$\ln(-y) \Rightarrow -y > 0 \Rightarrow y < 0$$

$$\left(\frac{-x}{y}\right)^{\pm \ln(-y)} \Rightarrow \frac{-x}{y} > 0 \Rightarrow x < 0, \text{ т.к. } -y > 0 \Rightarrow x < 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\left(\frac{x}{-y}\right)^{\pm \ln(-y)} \cdot 2 \ln(x \cdot (-y)^2) = x$$

$$(y + 2x)^2 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\left(\frac{x}{-y}\right)^{\pm \ln(-y)} \cdot 2 \ln x + 2 \ln(-y) = x$$

$$(y + 2x)^2 - (2x - 2)^2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{\pm \ln(-y)} = x \\ 2 \ln x \cdot \ln(-y) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (3x + y)(y + 4 - x) = 0 \\ x = y = 3x \end{array} \right.$$

2) $y = 3x$
 $\int (e^{\ln x})^3 \ln(-y) = (e^{\ln x})^3 \ln x \cdot (e^{\ln(-y)}) \ln(-y)$ / интегрир. по осн. е
 $\rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ -y = 4 - x \end{cases}$

$$3 \ln x \ln(-y) = 2 \ln^2(x) + \ln^2(-y)$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ -y = 4 - x \end{cases}$$

$$(2 \ln x - \ln(-y))(\ln x - \ln(-y)) = 0$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ -y = 4 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = -y \\ x = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = 3x \\ -y = 4 - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 = -y \\ 3x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ -y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ x = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 = -y \\ -y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ -y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ x = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 = -y \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ -y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ x = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(*) x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}, \text{ но } x > 0, \text{ а } \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$$

Ответ

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \end{cases}$$

Задача ~ 5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \Rightarrow a \geq 0. \text{ } a = t^2 (t \geq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \quad (*) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = t^2 \end{cases}$$

- семейство из 4-х окружностей с центрами $(\pm 8; \pm 15)$ и радиусом t

(*) : $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$ - график симметричен относительно осей OX . Будет считать, что $y \geq 0$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

рассмотрим всевозможные случаи раскрытия модулей

$$1^{\circ} \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x-y+8 \geq 0$$

$$\Rightarrow x+y+8 \geq x-y+8 \Rightarrow$$

возможны случаи

возможны случаи

$$x+y+8 < 0, x-y+8 \geq 0$$

$$2x+16=16 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y-8 \geq 0 \Rightarrow \text{отрезок } x=0, 0 \leq y \leq 8$$

$$2^{\circ} \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases} \Rightarrow x+y+8 < 0$$

$$-2x-16=16$$

$$x=-16 \Rightarrow y-8 < 0 \Rightarrow \text{отрезок } x=-16, 0 \leq y < 8$$

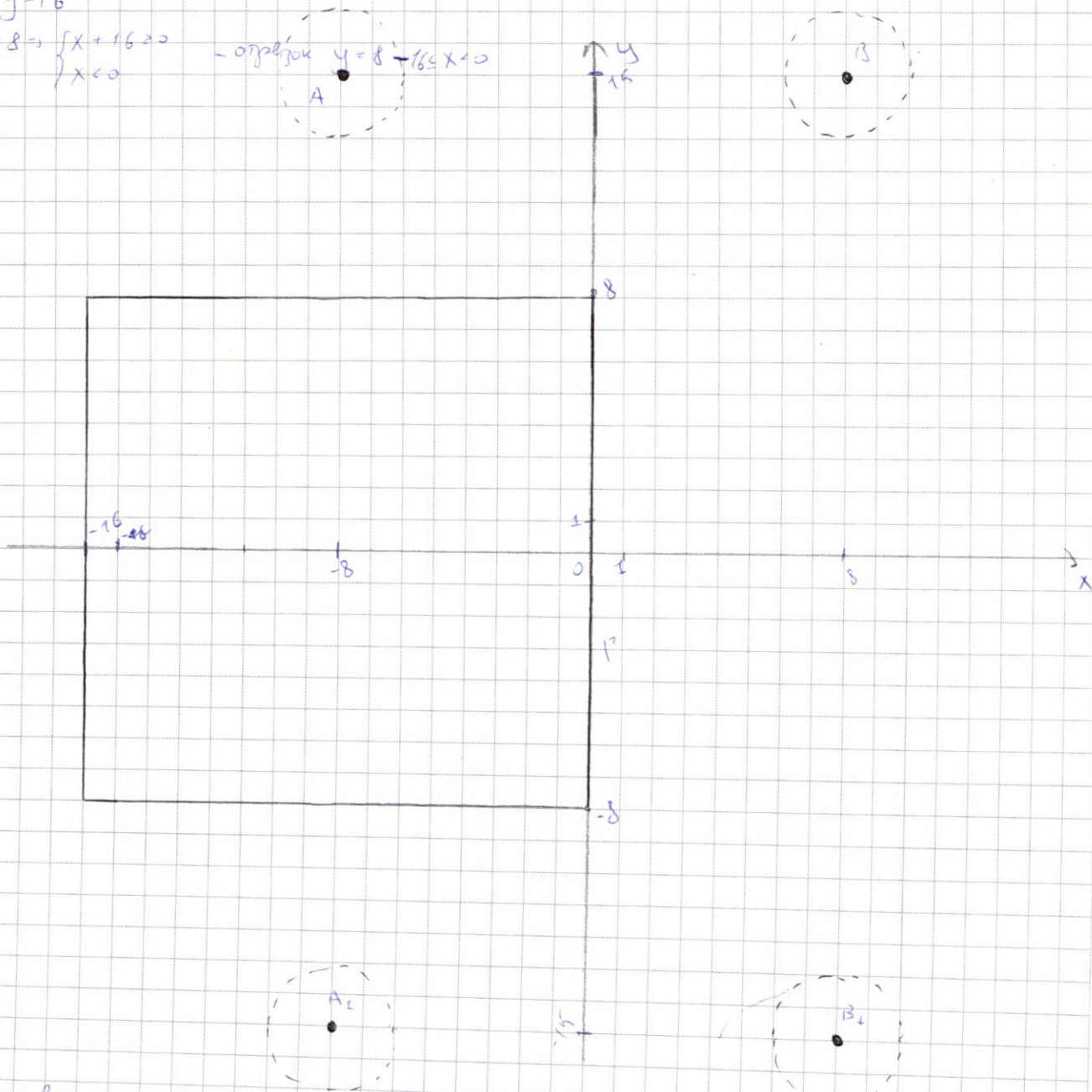
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^o) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases}$$

$$2y=16$$

$$y=8 \Rightarrow \begin{cases} x+16 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

- отрезок $y=8 -16 \leq x \leq 0$



по условию должно быть ровно 2 корня $\Rightarrow$ 2 т.п. 2-х графиков ур-ий. ~~картинка симметрична~~
~~откуда следует~~ $yx \Rightarrow$ все т.п. симметричны ~~относ. ОХ~~. Показем, что ~~симметрия~~ ~~относ. ОХ~~.
~~т.п. имеет коор. по оси ОХ~~ ~~идеи~~, или не ~~подходит~~ пусть это ~~точки~~ ~~на оси~~.
~~Заметим, что расстояния от точек~~ A ~~до~~ A_1 ~~и~~ A_2 ~~совпадают~~, также как и ~~до~~ B_1 B_2 , для
 A и A_1 ~~оно~~ равно $\sqrt{16}$, для B_1 B_2 $\sqrt{16}$ (и.е. это то значение t , когда соотв.
~~окр-ти~~ ~~находятся~~ ~~перед~~ ~~графиком~~ A P); ~~когда~~ ~~когда~~ ~~график~~ P ~~будет~~ ~~пересек~~
~~с~~ ~~соотв.~~ ~~окр-ти~~ ~~они~~ ~~есть~~ ~~значению~~ t : для A и A_1 : $(0; 7) \sqrt{(23^2+8^2)+16}$, для B_1 B_2 :
 $\sqrt{59^2}$

$$(0, \sqrt{113}) \cup (\sqrt{23^2 + 24^2}, +\infty)$$

где $0 \leq t \leq \sqrt{1005}$

Значит при $t \in (0; 7)$ корней нет, при $t = 7$ - 2 корня, при $t \in (7; \sqrt{593})$ хотя бы 2 корня (2 корня только в том случае, когда t лежит на OX , т.е. когда $t = \sqrt{15^2 + 2^2} = \sqrt{24^2 + 7^2}$)

$t \in (\sqrt{593}, +\infty)$ - 4 корня, при $t = \sqrt{593}$ - 3 корня

где B_1, B_2

$t \in (0; \sqrt{113}) \cup (\sqrt{1005}, +\infty)$ - 0 корней, при $t \in (\sqrt{113}, \sqrt{1005})$ - хотя бы 3 корня

Значит у A, A_1, B, B_1 пересек. возможно:

Возможны $t = 7, t = 12, t = \sqrt{593}, t = \sqrt{113}, t = \sqrt{1005}$

подчеркнул.

$t = 17$ не подходит, т.к. у B_1, B_2 только 2 корня

$t = \sqrt{593}$ не подходит.

$t = \sqrt{113}$ не подходит, т.к. у A, A_1 хотя бы 3 корня

Значит $a = t^2 \in \{49, 1005\}$

Ответ

$\{49, 1005\}$

Задача 11

Заметим, что сечение перпендикулярно плоскости касательной к сфере и перпендикулярно диаметру сферы.

SO перпендикулярна отрезку KL .

$SO = a$, радиус сферы - R , тогда

это значит, что SO перпендикулярна KL .

$\frac{a+R}{a-R}$ или $\frac{a+R}{a-R}$ при пересечении сферы образует отрезки $a-R$ и $a+R$.

коэф. $\frac{a+R}{a-R}$ в квадрате равен отношению площадей сечений перпендикулярно KL и SO .

$3a + 3R = 4a - 4R \Rightarrow a = 7R$. расен SO и KL перпендикуляр, $SO = FR$, $KO = R$.

$\cos \angle KSO = \frac{OK}{KS} = \frac{OK}{\sqrt{OK^2 + OS^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 49R^2}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$

$\sec \angle KSO = \frac{1}{\cos \angle KSO} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

$\frac{576}{49} = 11 \frac{37}{49}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6

Дано:

W_1, W_2

$W_1(O_1, R_1)$

$W_2(O_2, R_2)$

$W_1 \cap W_2 = \{A, B\}$

$C \in W_1, D \in W_2$

$B \in [CD], \angle CAD = 90^\circ$

и $\angle CBA = 45^\circ$
и $\angle BCD = 30^\circ$
и $\angle CAD = 90^\circ$

$CF \perp BD$

Найти:

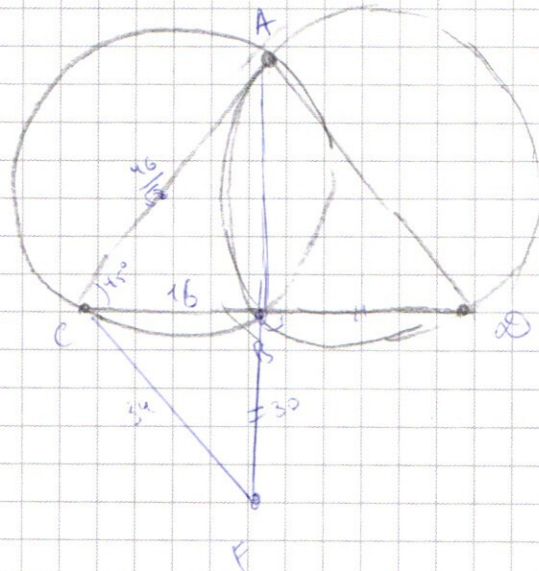
CF

д) $BC = 16$, S_{ACF} ?

Ответ:

$CF = 34$

$S_{ACF} = 529$



Решение:

по обозначенной Th синусов

$$CB = 2R_1 \sin \angle CAB = 34 \sin \angle CAB \quad (\text{из } \triangle CAB)$$

$$BD = 2R_2 \sin \angle BAD = 34 \sin \angle BAD = 34 \sin (90^\circ - \angle CAB) = 34 \cos \angle CAB \quad (\text{из } \triangle ABD)$$

$$BF = BD = 34 \cos \angle CAB$$

$$\angle CBF = 90^\circ \Rightarrow CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{(34 \sin \angle CAB)^2 + (34 \cos \angle CAB)^2} = 34 \sqrt{\sin^2 \angle CAB + \cos^2 \angle CAB} = 34$$

$$\text{д) } CB = 16 \Rightarrow BF = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 30$$

$$CF = 34$$

$$BD = BF = 30 \Rightarrow CD = 46$$

$$AC = 2R_1 \sin \angle CBA \quad (\text{из } \triangle CAB) = 2R_1 \sin \angle ABD = AD \quad (\text{из } \triangle ABD)$$

$$AC = AD, \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow AC = \frac{CD}{\sqrt{2}}, \angle ACD = 45^\circ$$

$$\angle BCF = 45^\circ$$

$$\sin \angle ACF = \sin (45^\circ + \angle BCF) = \sin 45^\circ \cos \angle BCF + \sin \angle BCF \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{16}{34} + \frac{30}{34} \right) = \frac{46}{34\sqrt{2}}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot \frac{46}{\sqrt{2}} \cdot 34 \cdot \frac{46}{34\sqrt{2}} = 23^2 = 529$$

Задача ~ 7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

Всегда $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$. $f(x)$, при $x \in \mathbb{Z}$ - равно числу y точек, что удовлетворяют условиям, тогда $f(x) = 93 + 3(3^{27} - 1)x - 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

когда это выражение больше 0, т.к. у него есть корень из промежутка

$$(3^x + 4 \cdot 3^{28}, 93 + 3(3^{27} - 1)x]$$

Значит искомого кол-во пар (x, y) равно $\sum_{f(x) > 0} f(x)$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$$f(x) = 93 + 3^{28} \cdot x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$$

$$f'(x) = 3^{28} - 3 - \ln 3 \cdot 3^x$$

при $x \geq 28$ $f'(x) = 3^{28} - 3 - \ln 3 \cdot 3^x \leq 3^{28} - 3 - \ln 3 \cdot 3^{28} < 0$, т.к. $\ln 3 > 1$, т.к. $e < 3$

при $x \leq 27$ $f'(x) = 3^{28} - 3 - 3^x \ln 3 \geq 3^{28} - 3 - 3^{27} \ln 3 \geq 3^{27} \cdot 2 - 3 - \ln 3 > 0$, т.к. $2 > \ln 3$, т.к. $e < 2$

Значит начиная с $x = 28$ $f'(x)$ убывает

(до $x = 27$ $f'(x)$ возрастает)

Найдем, когда при $x \leq 27$ $f(x)$ впервые на целом x станет меньше 0.

$$93 + 3^{28} \cdot x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$$

$$f(4) = 93 + 3^{28} \cdot 4 - 12 - 3^4 - 4 \cdot 3^{28} = 0 \Rightarrow \text{при } x \geq 5 \quad f(x) > 0$$

Найдем, когда при $x \geq 28$ $f(x)$ станет впервые меньше 0.

$$f(31) = 93 + 3^{28} \cdot 31 - 3 \cdot 31 - 3^{31} - 4 \cdot 3^{28} = 3^{28} \cdot (27 + 4) - 3(3 + 4) = 0 \Rightarrow \text{при } x \leq 30 \quad f(x) > 0$$

Значит $\sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) = \sum_{5 \leq x \leq 30} 93 + 3^{28} \cdot x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} = 26(93 - 4 \cdot 3^{28}) +$

$$+ (3^{28} - 3) \sum_{5 \leq x \leq 30} x - \sum_{5 \leq x \leq 30} 3^x = 26(93 - 4 \cdot 3^{28}) + (3^{28} - 3) \cdot \frac{35 \cdot 26}{2} - (3^{30} + 3^{29} + \dots + 3^5) =$$

$$= 26(93 - 4 \cdot 3^{28}) + (3^{28} - 3) \cdot 35 \cdot 13 - 3(3^0 + 3^1 + \dots + 3^{25}) = 13(186 - 8 \cdot 3^{28} + 35 \cdot 3^{28} - 105) -$$

$$- 3 \cdot \frac{3^{26} - 1}{3 - 1} = 13(27 \cdot 3^{28} + 81) - 3 \cdot \frac{3^{26} - 1}{2} = 3 \cdot 13(3^{27} + 1) - 3 \cdot \frac{3^{27} - 3}{2} =$$

$$= 3^4(13 \cdot 3^{22} + 13 - \frac{3^{27} - 3}{2}) \cdot \frac{3^4}{2}(26 \cdot 3^{27} + 26 - 3^{27} + 3) = \frac{3^4}{2}(25 \cdot 3^{27} + 29)$$

Ответ:

$$\frac{25}{2} \cdot 3^{31} + \frac{2349}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача ~ 2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot 2 \sin(\frac{\pi}{4}) \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad / : \sqrt{2}$$

$$2 \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\sin(\frac{3\pi}{4} - 7x) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) + \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$$

$$2 \sin(\frac{3\pi}{8} - \frac{7}{2}x) \cos(\frac{3\pi}{8} - \frac{7}{2}x) + 2 \sin(\frac{3\pi}{8} - \frac{7}{2}x) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad / : 2$$

$$\sin(\frac{3\pi}{8} - \frac{7}{2}x) (\cos(\frac{3\pi}{8} - \frac{7}{2}x) + \cos(x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\sin(\frac{3\pi}{8} - \frac{7}{2}x) \cdot 2 \cos(\frac{\pi}{16} - \frac{5}{4}x) \cos(\frac{5\pi}{16} - \frac{9}{4}x) = 0$$

$$\sin(\frac{3\pi}{8} - \frac{7}{2}x) = 0$$

$$\cos(\frac{\pi}{16} - \frac{5}{4}x) = 0$$

$$\cos(\frac{5\pi}{16} - \frac{9}{4}x) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{8} - \frac{7}{2}x = \pi k \\ \frac{\pi}{16} - \frac{5}{4}x = \pi h + \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{16} - \frac{9}{4}x = \pi t + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\pi - 28x = 8\pi k \\ \pi - 20x = 16\pi h + 8\pi \\ 5\pi - 36x = 16\pi t + 8\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi - 8\pi k}{28} \\ x = \frac{-(6\pi h + 7\pi)}{20} \\ x = \frac{-(16\pi t + 3\pi)}{36} \end{cases}$$

$$\left(\frac{-x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

ОДЗ:
y > 0
x > 0

$$y^2 - 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(x) - 2\ln(-y)$$

$$(y+2)^2 - 4 + 2xy - 3x^2 + 12x = 0$$

$$(y+2) + 2x(y+2) - 3x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$((y+2)+x) - 4x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$((y+2)+x)^2 = (2x+2)^2$$

$$(x+y+2)^2 = (2x+2)^2$$

$$(3x-2y)(x-y) = 0$$

$$\begin{cases} x = y + 4 \text{ no } x > 0, y < 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

$$y = -3x$$

$$-y = 4 - x$$

$$\frac{3\ln(4-x)}{x} = \frac{2\ln x}{x} \cdot \ln(4-x)$$

$$\frac{3\ln x \cdot \ln(4-x)}{x} = \frac{2\ln^2 x + \ln^2(4-x)}{x}$$

$$2\ln^2 x + \ln^2(4-x) = 3\ln x \cdot \ln(4-x)$$

$$(2\ln^2 x - 2)$$

$$(2\ln x - \ln(4-x))(\ln x + \ln(4-x)) = 0$$

$$\begin{cases} x = 4 - x \\ \ln x = \ln(4-x) \end{cases}$$

$$x^2 = 4 - x$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \text{ no } y < 0$$

$$\left(\frac{-x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2(\ln x + 2\ln(-y))}$$

$$\frac{x^{\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x + 4\ln(-y)}$$

$$\frac{3\ln(-y)}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln(-y)}{(-y)}$$

$$x = y = -3x$$

$$\frac{3\ln(3x+4)}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln(3x+4)}{(3x+4)}$$

$$\frac{3\ln(3x)}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln(3x)}{(3x)}$$

$$\frac{3\ln x + 3\ln 3}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln 3 + \ln x}{3x}$$

$$\frac{3\ln 3}{x} = \frac{\ln 3}{3x} + \frac{\ln x}{3x}$$

$$\frac{2\ln 3}{x} = \frac{\ln x}{3x}$$

$$\frac{\ln 3}{x} \cdot x = \frac{\ln 3}{3} \cdot \frac{\ln x}{3}$$

$$3 = \frac{\ln x}{3}$$

$$\left(\frac{3\ln 3}{x}\right)' = 3\ln 3 \cdot \frac{3\ln 3 - 1}{x^2}$$

$$\frac{\ln 3}{3} \cdot \frac{\ln x}{3} = \frac{\ln 3}{3} \cdot e$$

$$\frac{2\ln 3}{x} = \frac{\ln 3(\ln x + \ln 3)}{x}$$

$$\frac{2\ln 3}{x} = \frac{\ln 3}{x} + \frac{\ln 3}{3}$$

$$\frac{\ln 3}{x} = \frac{\ln 3}{3}$$

$$x = 3, y = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 6482745 \\ -63 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ -13 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ -13 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$64827$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ -21 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$64827 = 3 \cdot 7$$

$$7, 7, 7, 9, 3, 1, 1, 1$$

$$7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = 5 \cdot 4$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3$$

$$C_8^3 (20 + \frac{20}{2}) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} (30) + 7 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 1680$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot 2 \sin(\frac{\pi}{4}) \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) \cos 3x + \cos 4x = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{4} - \beta) = 0$$

$$2 \sin(\frac{\pi - \alpha - \beta}{2}) \cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) = 0$$

$$2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}) \cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) = 0$$

$$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

$$\alpha = \pi - \beta$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$4 \cos 5x \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$x = t + \frac{\pi}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ ((x-8)^2 + (y-15)^2 = a \rightarrow a = t^2 \end{cases}$$

$|x+y+8| + |x-y+8| \geq |2x+16| \Rightarrow x \leq 0$
 $|y-x+8| + 1$
 $x \leq 0 \Rightarrow y \geq 5$
 $y = 0 \Rightarrow x \leq 0, x = -16$
 $y > 0, x \leq 0$
 $x - y + 8 \leq 0$
 $x \leq y - 8$
 $|x+y+8| + y - x - 8 = 16$
 $2y + 16 \Rightarrow y = 8$
 $\begin{cases} x - y + 8 \leq 0 & x \leq 0 \\ x + y + 8 \geq 0 & x \geq -16 \end{cases}$
 $2 \vee x + y + 8 \leq 0$
 $-16 - 2x \leq 16$
 $x = -12$
 $x + y + 8 \leq 0$
 $y - 4 \leq 0 \Rightarrow y \leq 4$
 $0 \leq y \leq 4$

$$\frac{(a-R)^2}{(a+R)^2} = \frac{9}{16}$$

$$(3a+R)^2 = 4(a-R)^2$$

$$(7a-R)(a-7R) = 0$$

$$a = \frac{R}{7}; a = 7R$$

$$SR = \sqrt{18} R$$

$$6R$$

$$8R$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$x = 31$$

$$x = 4$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} + 1 \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

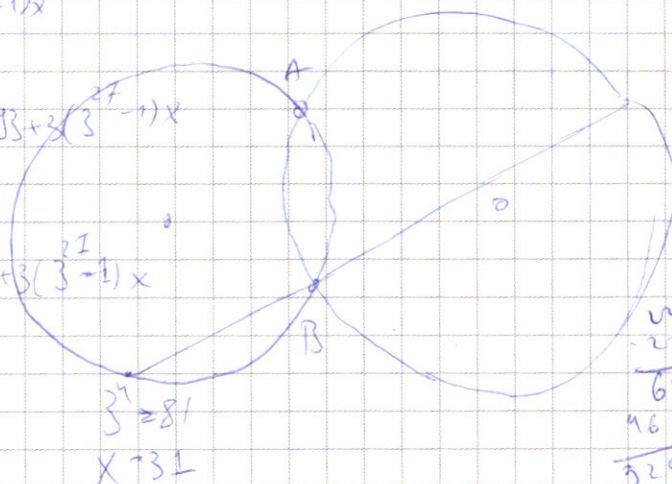
$$3^x + 3^{28}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} + 1 \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

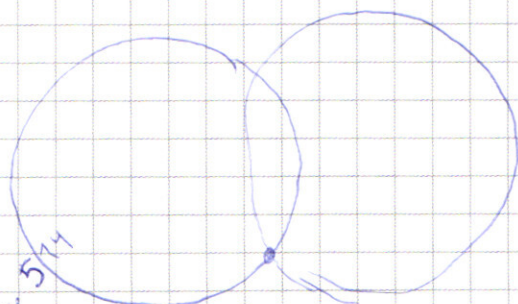
$$3^{28} \cdot x \leq 3^x$$

$$3^{28} \cdot x \leq 3^x$$

$$x = 32$$



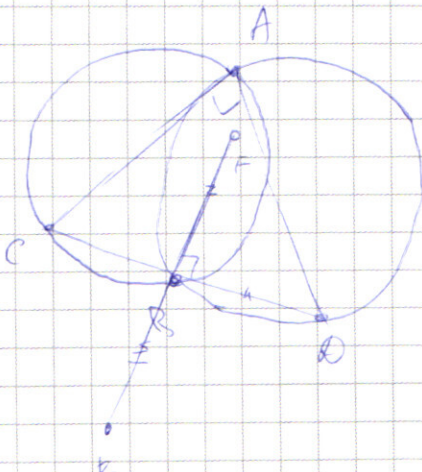
$$\begin{array}{r} 13 \\ -23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 329 \\ +61 \\ \hline 593 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 13 \\ -24 \\ \hline 36 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$576 + 576 = 1152$$

$$= 1025$$

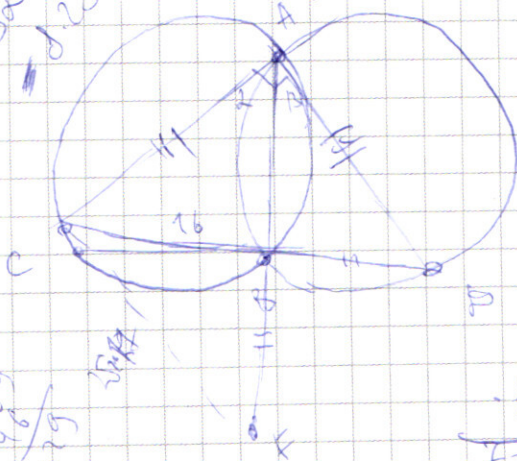


$$AC = \frac{2R \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \quad AB = \frac{2R \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \quad ABD = AD$$

$$CB = 2R \cdot \sin \alpha$$

$$AD = 2R \cdot \sin \beta = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$CB = 16 (2R)^2 \sin^2 \alpha = (2R)^2 \cos^2 \alpha = 25R^2$$



$$\begin{array}{r} 81 \\ -29 \\ \hline 729 \\ +62 \\ \hline 791 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 12x + \sin 2x \cdot \cos 5x + \int 2 \cos 4x dx$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sinh 7x) + \sqrt{2} \cos 9x = 0$$

$$2 \cos 15^\circ \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 \cos 4x =$$

$$2\cos 5x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4 x = 0$$

$$\cos\left(6x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$f = x + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(3t) \cdot \cos(7t - \frac{\pi}{2}) = \cos 4t$$

$$\cos 3t + \sin 7t = \cos 4 + 20$$

$$y = -3x$$

$$9x^2 - 6x^2 - 3x^2$$

$$\left(\frac{3^{2 \ln 3}}{3}\right) = 3^{2 \ln(3)}$$

$$\left. \begin{matrix} n \\ 10 \ln 3 \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} 10 \ln 3 \\ 10 \ln 3 \end{matrix} \right\}$$

64

573

$$y = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \in 93 + 3(3^{24} - 1)x$$

$$\sum_{A \geq 0} \left(93 + 3^{2A} - 1 \right) x - \left(3^A + 4 \cdot 3^{2A} \right) \Big)_{x=0}$$

$$93 + 3 \cdot x - x - 3 \cdot x - 4 \cdot 3 = A$$

$$f(x) \quad f'(x) = 3^{27} - 1 - \ln 3 \cdot 3^x$$

при х

$$3^{27} - 1 = \ln 3 \cdot 3^x = \ln 3 \cdot e^{\ln 3 \cdot x}$$

$$x = \log_3 \frac{3}{\ln 3}$$

$$x = 26$$

$$\{ \overset{27}{-1} \cdot \ln 3 \cdot 3^{\overset{26}{}}$$

$$X = 28 + a$$

$$x \ln 3 = \ln 3$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ - 29 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$x - 4 > 3$$

$x = 3$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(x+y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$x=y$$

$$x+y=\pi$$

$$2 \cos 5x \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = \sin 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \frac{\pi}{4} + \cos 3x + \frac{\pi}{4} + \cos 4x = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 3x) + \cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\sin \alpha + \cos \beta + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\sin \alpha + \sin(\frac{\pi}{4} + \beta)$$

$$\sin(\frac{3\pi}{4} -$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

