

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 8-и значное число состоит либо из 3х троек, 7х семерки и единицы, либо из 2х двоек, ~~одной~~ тройки и 4х семерок. и.е.:

$$64827 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \quad (1)$$

$$64827 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \quad (2)$$

Рассчитаем кол-во таких чисел:

1) число позиций для 1 из 8, умножим на число позиций для 3 из 7, умножим на число позиций для 4х из 4х.

$$C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{8! \cdot 7!}{1! \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

2) число позиций для 1 из 8, умножим на число позиций для 1 из 7, умножим на число позиций для 2х из 6, умножим на число позиций для 4х из 4х

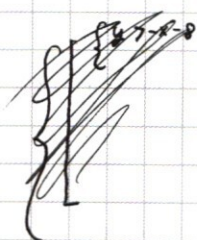
$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 \cdot C_4^4 = \frac{8! \cdot 7! \cdot 6!}{1! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 3 \cdot 280 = 840$$

$$(1) + (2) \rightarrow 280 \text{ способов} + 840 \text{ способов} = 1120$$

Ответ: 1120

№ 5

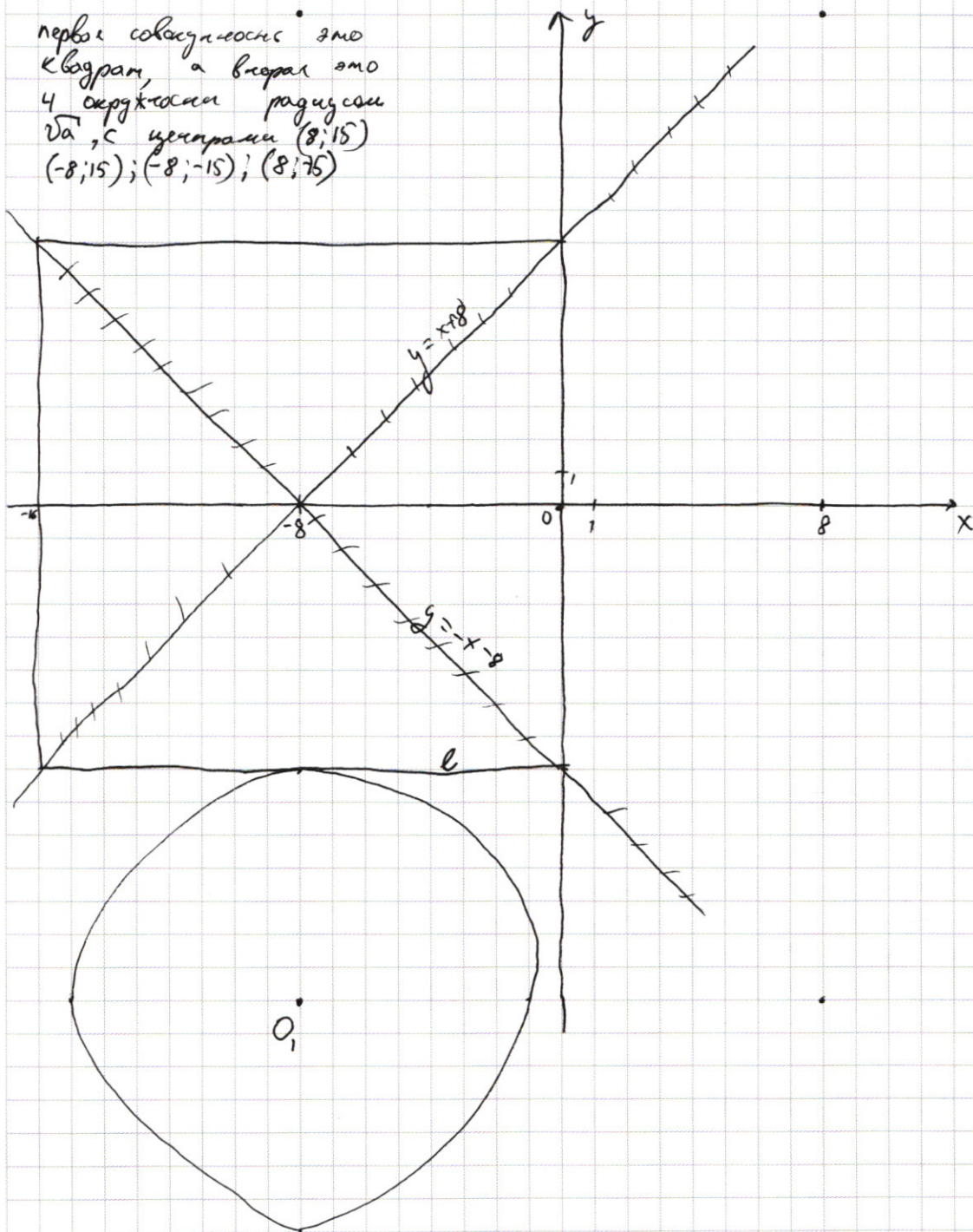
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-5)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\begin{cases} y > -x-8 \\ y > x+8 \\ x = 0 \\ y > -x-8 \\ y \leq x+8 \\ y = 8 \\ y \leq -x-8 \\ y \geq x+8 \\ y = -8 \\ y \leq -x-8 \\ y \leq x+8 \\ x = -16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-5)^2 = 0 \end{cases}$$

Нарисуем эту систему.

первое совпадает это
 квадрат, а второе это
 4 окружности радиусом
 $\sqrt{a}$, с центрами $(8; 15)$
 $(-8; 15)$; $(-8; -15)$; $(8; -15)$



в случае, когда окружности касались квадрата еще 2 точки,
 далее, при увеличении радиуса корней сталося не более
 4, до тех пор, пока окружности не войдут до точки
 $(0; 0)$ после этого всекие пересечения с квадратом
 пропадут. Осталось лишь определить при каком a , окр.
 касается. $r = \rho(O_1; e) = |-15 - (-8)| = 7 \Rightarrow a = 7^2$

Ответ: 49.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ -\frac{x^2}{y} = x^{2 \frac{\ln(xy^2)}{\ln(-y)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ -\frac{x^2}{y} = x^{2 \log_{(-y)}(xy^2)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ -\frac{x^2}{y} = x^{2(\log_{-y} x + 2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ \frac{x}{-y} = x^{2 \log_{-y} x - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ \frac{x}{-y} = x^{2 \log_{-y} \frac{x}{-y}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ \left(\frac{x}{-y}\right)^{\log_{(-y)} \frac{x}{-y}} = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ -y = x^2 \end{cases}$$

$$(2): y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y - x + 4)(y + 3x) = 0$$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4 = x^2 \\ 3x = x^2 \\ y = -x^2 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \\ x(x - 3) = 0 \\ y = -x^2 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = 0 \\ x = 3 \\ y = -x^2 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ y = -\frac{3 - 2\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (3; -9) \\ (x; y) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; -\frac{3 - 2\sqrt{5}}{4}\right) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (3; -9); \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; -\frac{3 - 2\sqrt{5}}{4}\right).$$

№7.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x \cdot 3^{28} + 3^7 + 3^2 + 3^1 - 3x &> 3^x + 3^{29} + 3^{28} \\ (x-4)3^{28} + 3^7 + 3^2 + 3^1 - 3x - 3^x &> 0 \end{aligned}$$

если $x < 5$, то старшая степень 3 отрицательна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все выражение разложится на сумму степеней 3

будет отрицательна, и.к. даже $2 \cdot 3^{1-1} + 2 \cdot 3^{1-2} \dots 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 < 3^3$

$$\Rightarrow x \geq 5$$

при $x = 31$ старшая степень - это $3^{31} - 3^{31} = 0$, а остальные члены

при $x = 31$ сумма равна 0 (а нам нужно?)

при $x > 31$ - старшая степень -3^x и она отрицательна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все выражение < 0 .

при $x \in [5; 30] \cap \mathbb{Z}$ старшая степень это $(x-4)3^{28}$ и

она $> 0 \Rightarrow$ все выражение $> 0 \Rightarrow$ искомые x это $x \in [5; 30] \cap \mathbb{Z}$

кол-во y при каждом x есть разность

$$f(x) = (93 + 3(3^{27} - 1)x) - (3^x + 4 \cdot 3^{28})$$

$$\sum_{i=5}^{30} f(i) = \frac{26+1}{2} \cdot 26 \cdot 3^{28} + 26 \cdot 3^7 + 26 \cdot 3^2 + 26 \cdot 3^1 - 3 \cdot \frac{26+1}{2} \cdot 26 -$$

$$- 3^5 \cdot \frac{1-3^{26}}{3-3} = 13 \cdot 3^{31} + 13 \cdot 81 + 26 \cdot 9 + 26 \cdot 3 = 12,5 \cdot 3^{31} + 1487,5$$

$$\text{Ответ: } 12,5 \cdot 3^{31} + 1487,5$$

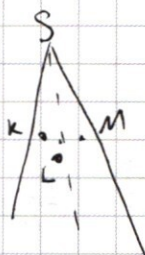
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{5} = 1$

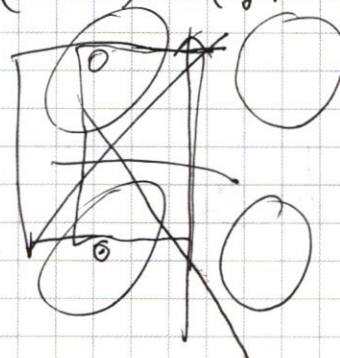
6	4	8	2	7	3
2	1	6	0	9	3
7	2	0	3	3	
2	4	0	1	7	
3	4	3		7	
4	9			7	
7				7	
1					

1 2 3 4 5 6 7

x^9
7302
727



$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$



4×7 и $3 \times 3 \times 1$ или 4×7 и $7 \times 9 \times 1 \times 3$ и 2×1
 $C_8^1 \cdot C_7^3 + C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 = 93 + 3(3^2 - 1) \times 7 = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$\sqrt{2} = 3$
 $\left(-\frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2)$

$x > 0$
 $y \neq 0$

$\frac{x}{4-x} = x^{2(\log_{4-x} \frac{x}{4-x})}$

$y < 0$

$4-x \neq x^2$

$x^2 + x - 4 = 0$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$
 $y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$

$D_{1,2}(y) = (x+2)^2 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = (2x-2)^2$

$y_{1,2} = -(x+2) \pm (2x-2) = \begin{cases} x-4 \\ -3x \end{cases}$

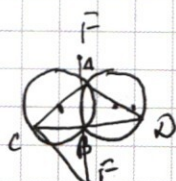
$(y+3x)(y-x-4) = 0$

$x \in (0; 4)$

$-\frac{x^2}{y} = x^{2 \log_{4-y}(xy^2)}$

$-\frac{x^2}{y} = x^{2 \log_{4-y} x + 2 \cdot 2}$

$-\frac{x^3}{y} = x^{2 \log_{4-y} x}$



$\begin{cases} y = -3x \\ y = x-4 \end{cases}$

$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln(3x^3)}$

$\frac{x^6}{3} = x^{2 \log_{3x} 9x^3}$

$\frac{1}{3} = x^{2(\log_{3x} \frac{1}{3})}$

$\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OB} - \vec{OB} = \vec{0}$

$3x \geq x^2$

$\frac{1}{3} =$

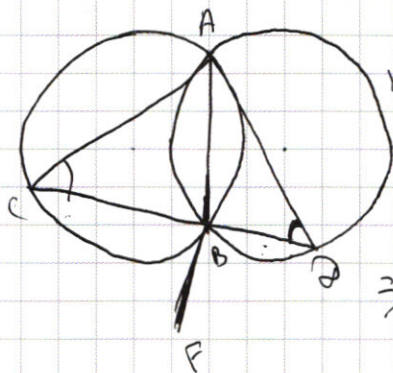
$x = 3$

$-\frac{x^3}{x-4} = x^{2 \log_{4-x} x} \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(-\frac{x}{4-x}\right) = (x^2)^{\log_{4-x} x}$
 $\frac{x}{4-x} = x^{2 \log_{4-x} x - 2}$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0 \quad 3^{28} - 165 - 243 -$$



$$\sin \frac{10x}{2} \cos \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} + \sin \frac{10x}{2} \cos \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} + \sin \frac{10x}{2} \cos \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{10x}{2} + \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) - \sin\left(\frac{10x}{2} - \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin 10x \cos \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$2 \cos(5x) \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x$$

$$\cos a + \cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 2 \cos \frac{b-a}{2} \sin \frac{b+a}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \cos 4x$$

$$2\sqrt{2} \cos 5x \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\sin(2x + \frac{\pi}{4})) + \cos 4x = 0$$

$$93 + x \cdot 3^{28} - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$(x-7) \cdot 3^{28} > 3x + 3^x - 93$$

$$x \in (0; 28) \cap \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x) - \sin 2x (-\sqrt{2} \cos 5x + \sin 2x)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x) + \sin 2x (-\sqrt{2} \sin 5x + \sin 2x))$$

$$\cos 7x = \cos(3x + 4x) = -\sin 3x \sin 4x + \cos 3x \cos 4x$$

$$\sin(3x + 4x) = \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \cdot 3^{28} + 3^7 + 3^2 + 3^1 - 3x > 3^x + 3^{29} + 3^{28}$$

$$(x-1) \cdot 3^{28} - 3^{29} + 3^7 + 3^2 + 3^1 - 3x - 3^x > 0$$

$$x > 7$$

$$x < 31$$

$$f(x) = (x-1) \cdot 3^{28} - 3^{29} + 3^7 + 3^2 + 3^1 - 3x - 3^x$$

$$\sum_{i=25}^{30} f(i) = 3^{28} + 3^7 + 3^2 + 3^1 - 3^2 - 12 \cdot 3 - 3^5 + 2 \cdot 3^{28} + 3^7 + 3^2 + 3^1 - 3^2 - 3^6 + 3^{29}$$

$$f(x) =$$

$$\frac{29+1}{2} \cdot 26 = 33 \cdot 13$$

$$33 \cdot 13 \cdot 3^{28}$$

$$(x-1) \cdot 3^{28} + 3^7 + 3^2 + 3^1 - 3 \cdot x - 3^x$$

$$\frac{26+1}{2} \cdot 26 \cdot 3^{28} + 26 \cdot 3^7 + 26 \cdot 3^2 + 26 \cdot 3^1 - 3 \cdot \frac{26+1}{2} \cdot 26 - 3^{\frac{26+1}{2} \cdot 26 - \frac{26-1}{2}}$$

$$= 13 \cdot 3^{31} + 26 \cdot 81 + 26 \cdot 9 + 26 \cdot 3 - \frac{84}{7} \cdot 13 + 3^{\frac{26-1}{2}}$$

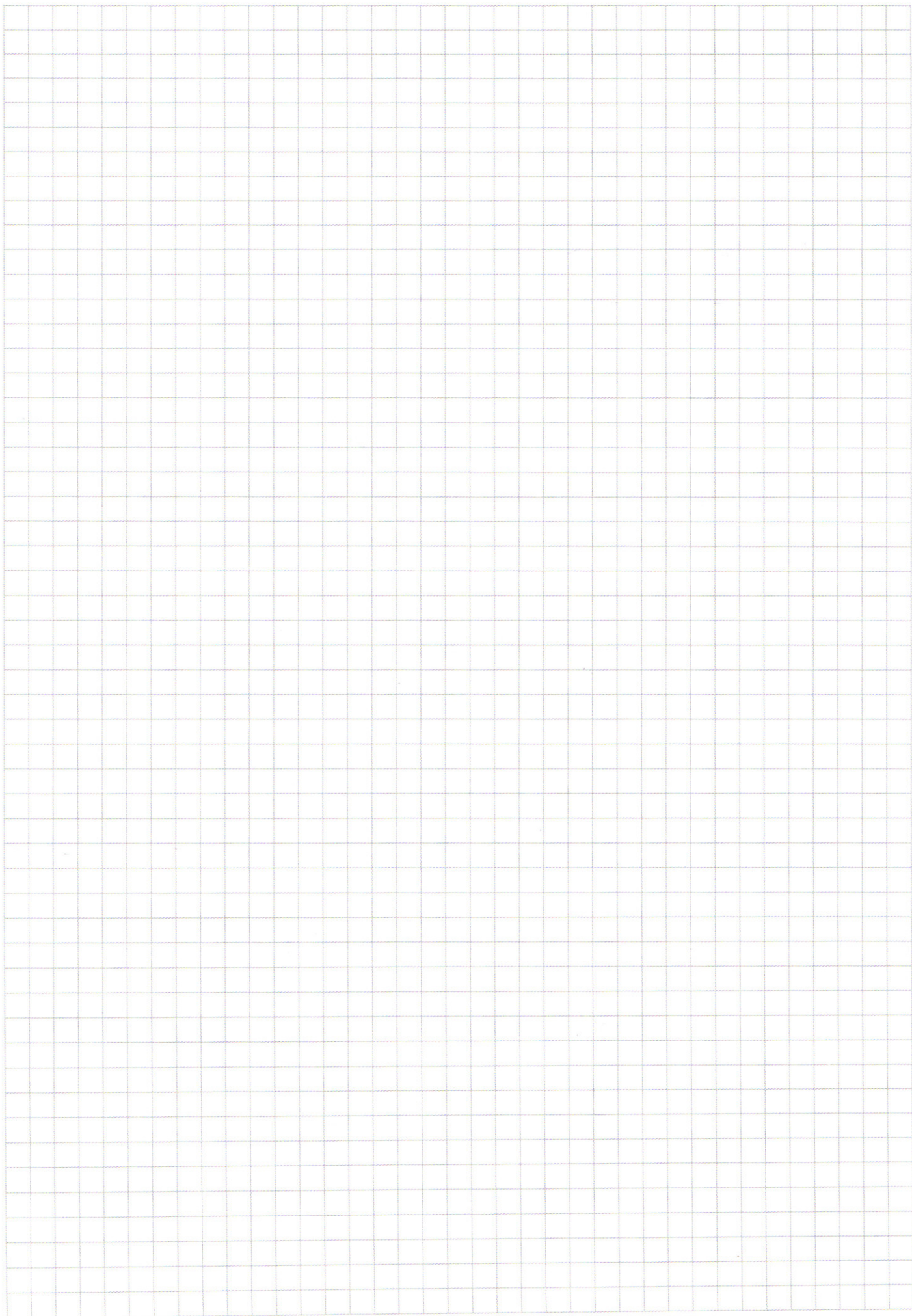
$$= 13 \cdot 3^{31} + 13 \cdot 81 + 26 \cdot 9 + 26 \cdot 3 = (12,5) \cdot 3^{31} + 13 \cdot 105 + 122,5$$

$$\frac{b_1}{1-q^n}$$

$$\frac{b_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} = 7$$

$$1389$$

$$1487,5$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

