

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИЧ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$

⇒ Исходное число состоит из этих

цифр

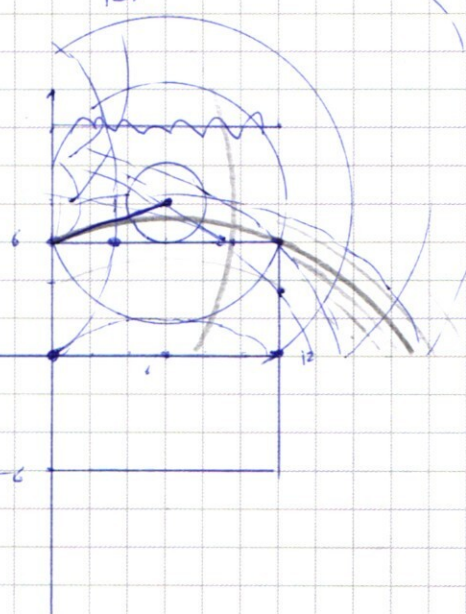
Тогда ко-во чисел =

$$\frac{8!}{4!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8!}{4!3!} = 35$$

$$5 \cdot 3 \cdot 3 = 270$$

Ответ: 270

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ \hline 15 & 3375 \\ 15 & 225 \\ 15 & 15 \\ 3 & 5 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ \hline 675 & 30 \\ 675 & 32 \\ 35 & 35 \\ 25 & 25 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 675 & 5 \\ \hline 135 & 12 \\ 135 & 15 \\ 27 & 27 \end{array}$$



6) $\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ |x-6-y|^2 + |x-6+y|^2 = a^2 \end{cases}$ где решение

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$x \leq x-6 \quad y \geq 6-x$$

Итак, четыре случая:

1) $y \leq 6$

2) $x = 12$

3) $x \leq 0$

4) $y = -6$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = a^2$$

Это окружность с радиусом $\sqrt{a}$

из-за модулей, она будет вписана в квадрат

Чтобы окружность касалась квадрата, $a > 4$

из рисунка следует, что $a \leq \sqrt{4^2 + 2^2}$, $a \leq 2\sqrt{5}$

При увеличении радиуса окружности решение всегда будет больше двух или одно или не будет вообще.

Ответ: $(4; 2\sqrt{5}]$.

3) $\begin{cases} \left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y \leq 0 \end{cases}$

$$y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y \leq 0$$

$$y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y^2 - (x+8)y + (x^2+4x) = 0$$

$$\Delta = (x+8)^2 - 4(x^2+4x) = x^2 + 16x + 64 - 4x^2 - 16x = 64 - 3x^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x+8 \pm \sqrt{64-3x^2}}{2}$$

$y \neq x$ по ОДЗ:

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$$

$$\frac{\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y}}{(-x)^{\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} / (-x)^{\lg y} > 0$$

$$\frac{1}{(-x)^{\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\lg \frac{1}{(-x)^{\lg y}} = \lg(-x)^{\lg(-x)} + \lg y^{2 \lg y}$$

$$(3 \lg y - \lg(-x)) \lg(-x) = 2 \lg y \cdot \lg y$$

Пусть $a = \lg(-x)$
 $b = \lg y$

Тогда

$$(3b - a)a = 2b^2$$

$$3ab - a^2 = 2b^2$$

$$2b^2 - 3ab + a^2 = 0 \quad | : a^2$$

$$\frac{2b^2}{a^2} - 3\frac{b}{a} + 1 = 0$$

Пусть $\frac{b}{a} = t$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{a}{\lg y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\lg(-x)}{\lg y} = 1 \\ \frac{\lg(-x)}{\lg y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = -0,5x - 4$$

Тогда

1) $-x = -0,5x - 4$
 $-0,5x = -4$
 $x = 8$

не подходит по ООЗ

2) $\lg_{-0,5x-4}(-x) = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{-0,5x-4} = -x \quad | \cdot 2$$

$$-0,5x - 4 = x^2$$

$$x^2 + 0,5x + 4 = 0$$

$$D < 0$$

$$D < 0$$

Пример: 0

4. Дано:

$$S_1 = 4$$

$$S_2 = 9$$

Найти $\angle KSO$

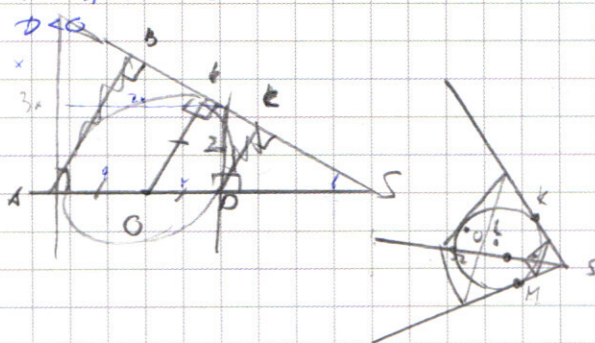
$SKSO$

Решение:

Решение

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{3}$$



$$2. \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \cos 2x \sin 5x$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - 2 \cos 2x \sin 5x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$1. \cos 5x = \sin 5x$$

$$\cos 5x = \sin(5x - \frac{\pi}{2})$$

$$\cos 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$2. 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos(5x - \frac{\pi}{4}))$$

$$2 \cos 2x = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{2} \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$-3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k$$

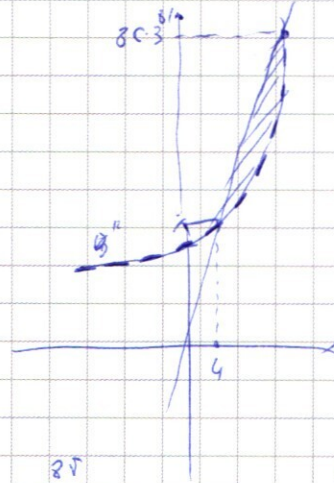
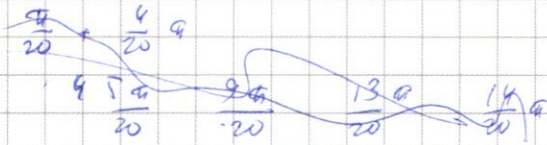
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



7)
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

найти точку

$$3 + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$x=4$ $x=85$ $\text{т.к. из рисунка следует что } x=85$

$$\int_4^{85} (85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}) dx = 85 \int_4^{85} dx + (3^{81} - 1) \int_4^{85} x dx - \int_4^{85} 3^x dx - 4 \cdot 3^{81} \int_4^{85} dx$$

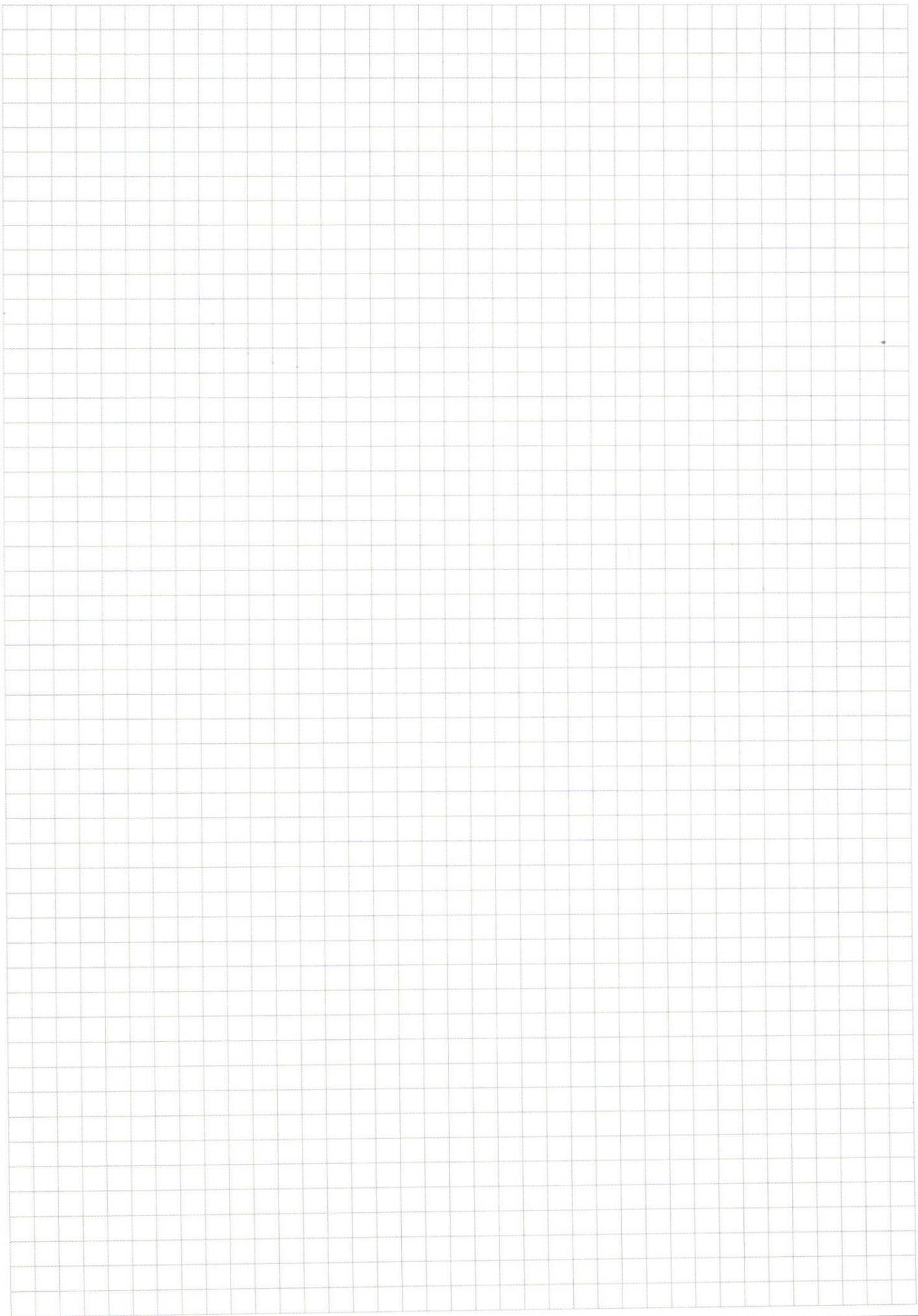
$$= 85x - 4x + (3^{81} - 1) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4^2}{2} \right) - \frac{3^{81}}{\ln 3} + \frac{3^4}{\ln 3} - 4 \cdot 3^{81} (85 - 4)$$

$$= 81 + \frac{7109}{2} \cdot (3^{81} - 1) - 324 \cdot 3^{81} - 81$$

$$= \left[\frac{6441}{2} \cdot 3^{81} - \frac{7109}{2} \right] = 3230 \cdot 3^{81} + 3554$$

Ответ: $3230 \cdot 3^{81} + 3554$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 29 \\ \hline 729 \\ 648 \\ \hline 3709 \end{array}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^4 \log y = (-x) \log(-x) + \log y$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\log y} = (-x)^{\log(-x)} \cdot (-x)^{\log(y)}$$

$$\frac{(x)^{\log y}}{(x)^{\log y}} = (-x)^{\log(-x)} \cdot (-x)^{\log y}$$

$$\frac{(-x)^{499}}{499} = (-x)^{499} \cdot \frac{1}{499}$$

$$\frac{(-x)^y}{y} - (-x)^y \cdot (-x)^y = 0$$

$$-x \frac{y^3}{y^2} \cdot \frac{-x^3 y^3}{y^2 y^3} = (-x) y^3 (-x)$$

$$\frac{(-x)^{3/2}}{(-x)^{5/2}} = x^{2/2}$$

$$(3b-a)a \leq 2b^2$$

$$3ab - a^2 \leq 2b^2$$

$$2b^2 - 3ab + a^2 \leq 0$$

$$2^2 - 3 + 1 = 0$$

$$0 \leftarrow 9 - 8$$

$3 \pm p$

62

1

63

[illegible]

$$-4$$

2.5.5

3.4.1

$$4 \times \frac{5}{2} + \times \frac{3}{2} = -2 \quad 2 \frac{1}{\log_2 6} \quad 2 \frac{1}{\log_2 4} \quad \log_2 u$$

$\log_{-x} 10$
 $\log_{-x} 10 = 9$
 $-\frac{\sqrt{x^5}}{x^2} - 2\sqrt{x^3} = 2 = 0 \sqrt{x^3}$

$y = -\frac{x}{2} - 4$
 $(-\frac{x}{2} - 4) = -\frac{2}{3}$

$+8 = 0 \quad -4$
 $-4,3$
 $\lg -0,5x - 4$
 $(-0,5x - 4)$

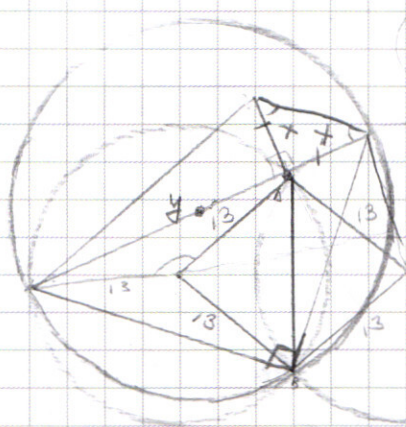
$$\begin{aligned} & -x = -\frac{x}{2} - 4 \\ & x^2 = -\frac{x}{2} - 4 \quad -2x = -x - 8 \\ & x^2 + \frac{x}{2} + 4 = 0 \quad -x = -8 \\ & \quad \quad \quad x = 8 \end{aligned}$$

$$-x = \sqrt{-\frac{x}{2} - 4}$$

$$x = \frac{x}{4} + 4x + 16$$

$$\frac{x}{4} + 4x + 16 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 + 16x + 64 = 0$$



$$2\cos^2 x = 1 + \frac{\cosh x + 1}{2}$$

$$\cos(4x+x) = \cos 4x \cdot \cos x - \sin 4x \cdot \sin x$$

$$\sin(4x+x) = \sin 4x \cdot \cos x + \cos 4x \cdot \sin x$$

$$2x + 8x$$

$$y^2 = 169 \cdot 2 - 2 \cdot 169 \cos \alpha$$

$$x^2 = 169 \cdot 2 (1 - \cos \beta)$$

$$\frac{2\cos 2x + 1}{2} \sqrt{2} (\cos 4x + \sin 4x) \cos x - (\cos 4x - \sin 4x) \sin x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos 5x = \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x \cdot \sqrt{1 - 2 \cos 10x} = \sqrt{2} \cos 10x = 1$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \sin 5x) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos(\frac{\pi}{4} - x) \cos \frac{\pi}{4} = \cos 5x - \sin 5x$$

$$1 + 2 \cos 10x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$$

$$x = \frac{1}{2}y$$

$$10x = y$$

$$\frac{7.5x}{y + 7.5x} = \frac{2x}{y}$$

$$2.5xy = 2xy + 7.5x^2$$

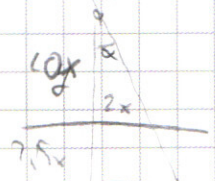
$$x(5x + 0.5y) = 0$$

$$\frac{CD}{OK} = 2$$

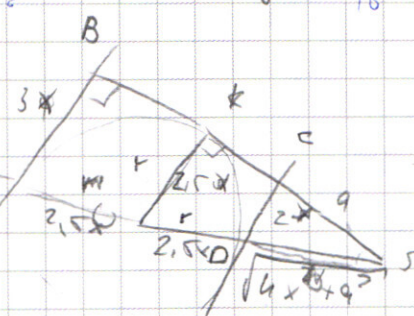
$$\frac{3\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} \sin \alpha \cdot 3y \cdot 3x \cdot 2 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8}$$

$$\frac{2}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12}$$

$$\sin \alpha \cdot xy = 1$$

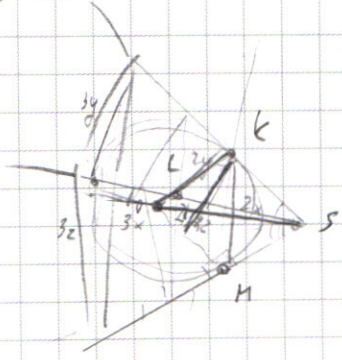
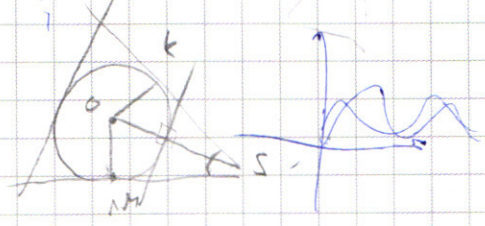
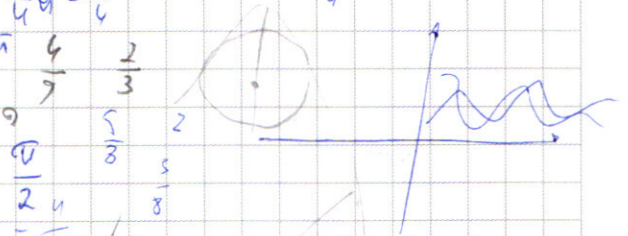


$$abcdy = \frac{1}{4}$$



$$\frac{32 \cdot h}{22} = \frac{18}{h} + 8$$

$$\frac{2}{2.5x}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$
 $\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sqrt{2} \cos \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$
 $\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) \cos(-2x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$

$\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) \cos(-2x) - \cos \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) \cos(-2x) = 0$
 $\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) (\sqrt{2} \cos(-2x) - 1) - \cos(\frac{\pi}{4} - 7x) = 0$
 $\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) (\sqrt{2} \cos 2x - 1) - \cos(\frac{\pi}{4} - 7x) = 0$

$\sqrt{2} \cos(-2x) - 1 - \cot(\frac{\pi}{4} - 7x) = 0$
 $a+b = \frac{\pi}{2}$
 $a-b = -2x$

$2a = \frac{\pi}{2} - 2x$
 $a = \frac{\pi}{4} - x$
 $b = \frac{\pi}{4} + x$

$\sin(\frac{\pi}{4} - x) + \cos(\frac{\pi}{4} - x) - 1 - \cot(\frac{\pi}{4} - 7x) = 0$
 $\cos 7x - \cos(\frac{\pi}{4} - 7x)$
 $\cos \frac{\pi}{4} (\cos 7x - \cos(\frac{\pi}{4} - 7x))$
 $y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$
 $y < 85 + (3^x - 1)x$

$3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 85 + (3^x - 1)x$
 $4(3^{2x} - 3^x) = 84 + x(3^x - 1)$
 $4(3^x - 1)(3^x + 1) = 84 + x(3^x - 1)$
 $3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 85 + 3^x \cdot x - x$
 $3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 85 + 3^x \cdot x - x$
 $81 + 4 \cdot 81 = 81 + 81x - x$
 $243 + 4 \cdot 81 = 81 + 81x - x$
 $3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 85 + (3^x - 1)x$
 $8^{16} + 4 \cdot 3^{21} = 69 + 16 \cdot 4^{21}$
 $3^{21} + 4 \cdot 3^{21} = 27 + 12 \cdot 4^{21}$
 $54 \cdot 3^{21} - 3^{21} = 82$
 $3^x = 3^x \cdot \ln 3 = 3 - 1$
 $\ln 3 = \frac{\ln(3-1)}{\ln 3}$
 $x \cdot \ln 3 = \frac{\ln(81-1)}{\ln 3} - \ln(\ln 3)$
 $\frac{81-1}{3} = \frac{80}{3}$

$16875 \mid 5$
 $15 \mid 3375$
 $12 \mid 30$
 $15 \mid 37$
 $32 \mid 35$
 $35 \mid 25$
 $25 \mid 25$
 $3 \mid 3125$
 $81 \mid 27$
 $4 \mid 31$
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

$$7009 \quad |x-6-y| + |x-6+y| \leq 12$$

$$\frac{648}{6481} \quad |x-6-y| + |x-6+y| \leq 12$$

$$6460 \quad |x-6-y| + |x-6+y| \leq 12$$

$$3230 \quad |x-6-y| + |x-6+y| \leq 12$$

$$2108 \quad |x-6-y| + |x-6+y| \leq 12$$

$$6 \quad |x-6-y| + |x-6+y| \leq 12$$

$$107 \quad |x-6-y| + |x-6+y| \leq 12$$

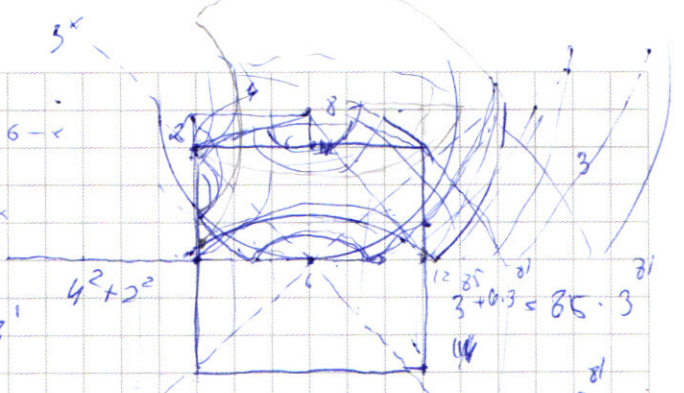
$$3584 \quad |x-6-y| + |x-6+y| \leq 12$$

$$x-y \geq 6$$

$$y \geq 6-x$$

$$x+y \geq 6$$

$$y \geq 6-x$$



$$3^2 + 4 \cdot 8^2$$

$$3^2 + 4 \cdot 8^2$$

$$3^2 + 4 \cdot 8^2$$

$$a \geq 4$$

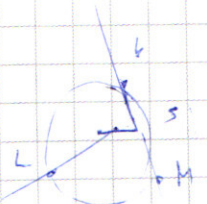
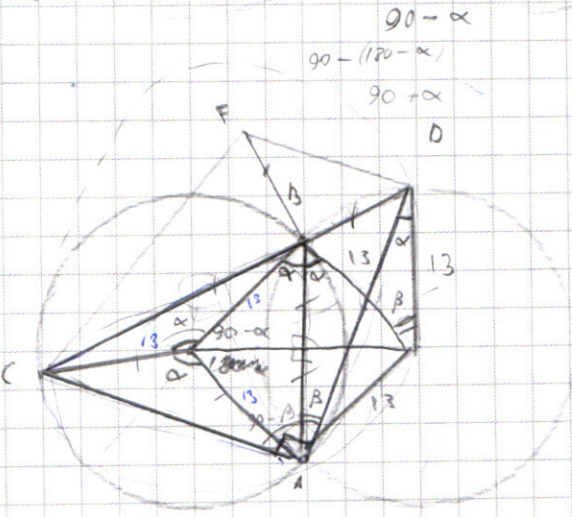
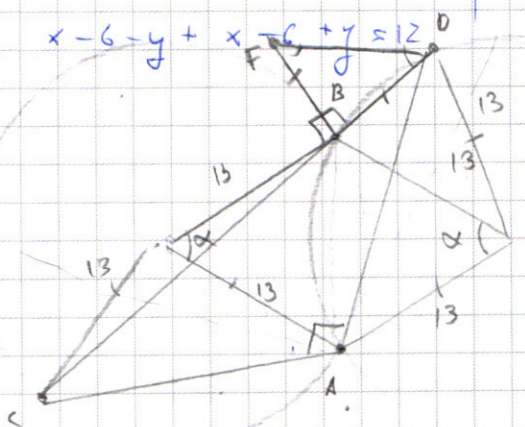
$$a \leq \sqrt{201}$$

$$3^{100} + 4 \cdot 3^{81} = -15 + 100 \cdot 3$$

$$96 \cdot 3^{81} - 15 \cdot 3^{100}$$

$$\begin{cases} y \leq -0.5x - 4 \\ y \geq x \end{cases} \text{ no 003:}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^4 \cdot \lg(1-0.5x-4) = (1-x) \lg(1-x(-4x-9))$$



$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\frac{\cos 7x + \cos 3x}{\sin 3x + \sin 7x} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos 5x - 2 \cos 2x \sin 5x = \sqrt{2} \cos 10x + \sqrt{2} \sin 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 8x (\cos 2x - 1) = \sqrt{2} \cos 8x \sin 5x / (\sqrt{2} \cos x - \sin x)$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^4 \lg y = (1-x) \lg(-xy)$$

$$2y + (x-8)y - (x^2 + 4x) = 0$$

$$0 = x^2 - 16x + 64 + 8x^2 + 32x$$

$$9x^2 + 48x + 64$$

$$(3x+8)^2$$

$$-2x-16 \quad -2x-16$$

$$2 \left(y + \frac{x-8-3x-8}{4} \right) \left(y - \frac{x-8+3x+16}{4} \right)$$

$$(y + 0.5x + 4)(y - x) \geq 0$$



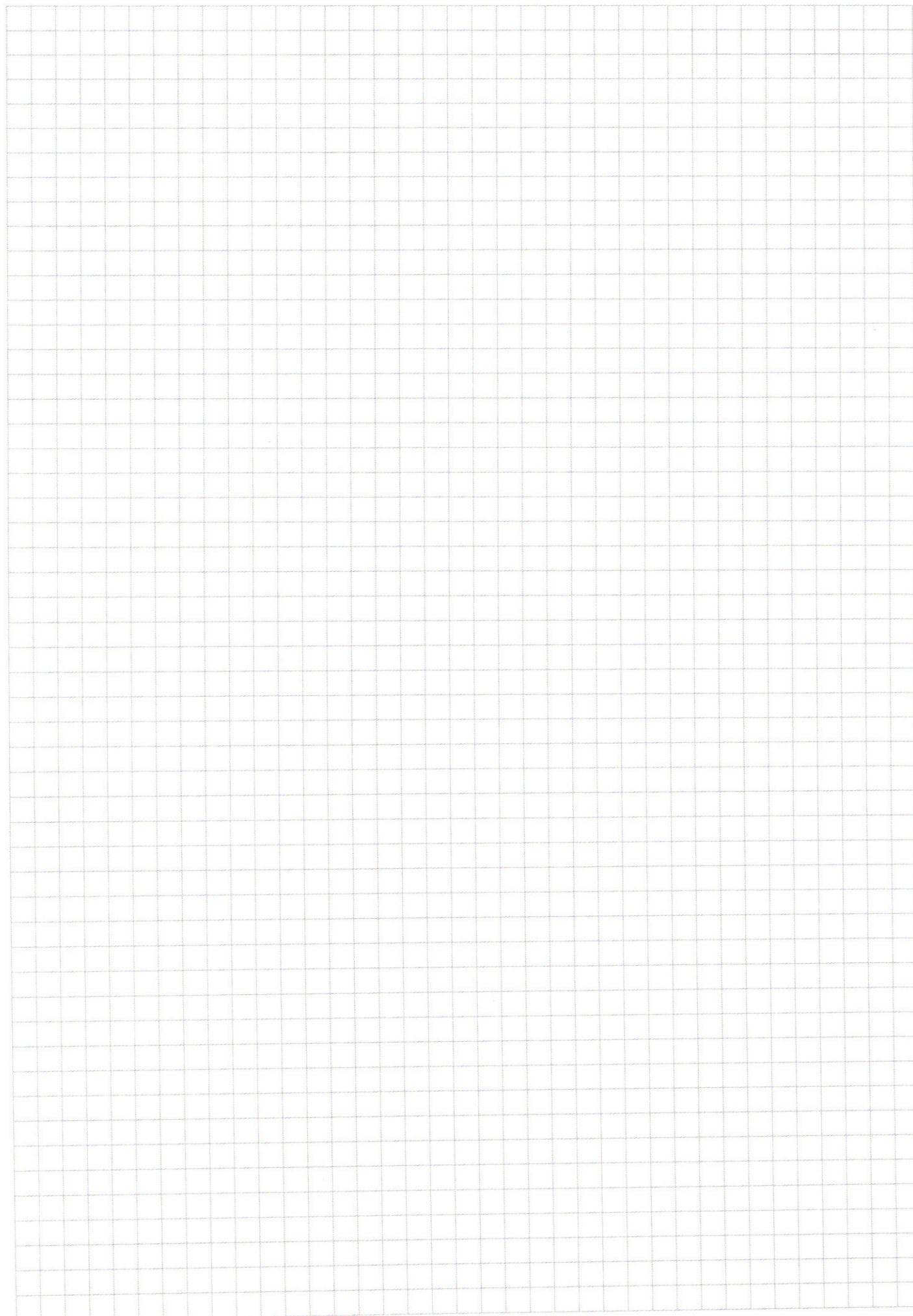
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)