

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6; \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = \alpha. \end{cases}$ $\alpha \rightarrow ?$ имеет 2 рещ.

1) $|y-3-x| + |(y-3)+x| = 6 \quad |^2$
 $(y-3-x)^2 + 2|(y-3-x)((y-3)+x)| + (y-3+x)^2 = 36$
 $(y-3)^2 - 2x(y-3) + x^2 + 2|(y-3)^2 - x^2| + (y-3)^2 + 2x(y-3) + x^2 = 36$
 $= 36; \quad 2(y-3)^2 + 2x^2 + 2|(y-3)^2 - x^2| = 36$
 $(y-3)^2 + x^2 + |(y-3)^2 - x^2| = 18 \quad |^2$
 $((y-3)^2 + x^2)^2 + 2|(y-3)^4 - x^4| + ((y-3)^2 - x^2)^2 = 324$
 $2(y-3)^4 + 2x^4 + 2|(y-3)^4 - x^4| = 324$

$$(y-3)^2 + x^2 + |(y-3)^2 - x^2| = 18$$

или $(y-3)^2 \geq x^2$

$$(y-3)^2 + x^2 + (y-3)^2 - x^2 = 18$$

$$2(y-3)^2 = 18 \quad (y-3) = 3$$

$$y-3 = \pm 3$$

$$\begin{cases} y = +6 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x^2 \leq 9$$

$$|x| \in [-3; 3]$$

или $(y-3)^2 < x^2$

$$(y-3)^2 + x^2 - (y-3)^2 - x^2 = 18$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$(y-3)^2 < 9$$

$$(y-3) \in (-3; 3)$$

$$|y| \in (0; 6)$$

2) $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = \alpha$

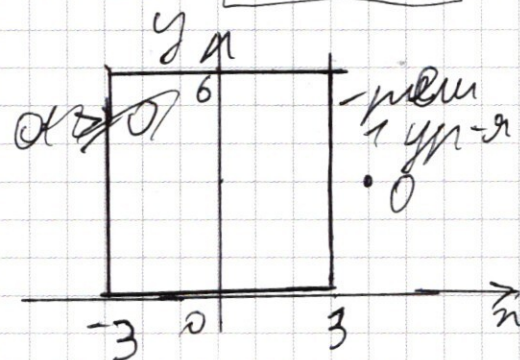
или $x \geq 0 \quad y \geq 0$

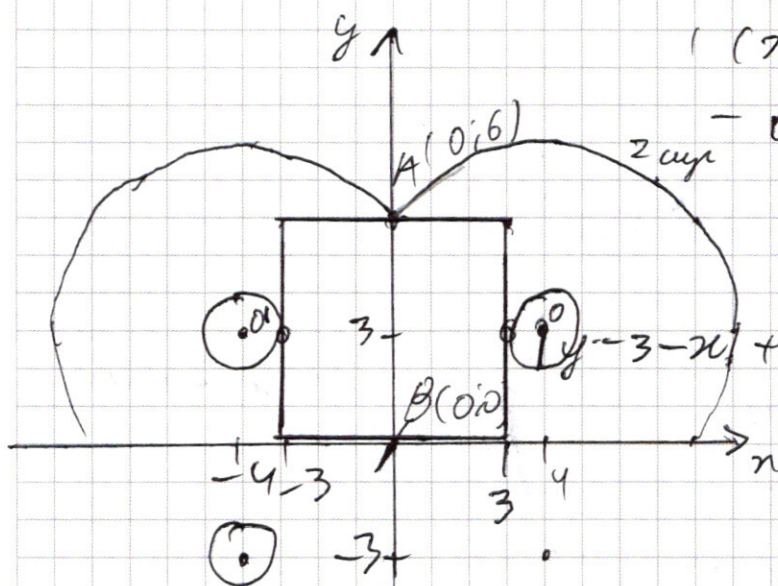
$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = \alpha = r^2$$

- центр в окружности

$$O(0; 4)$$

$$O(4; 3)$$





$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

2 окружности
по оси Ox и Oy

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

окружности
касались сторон
квадрата

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

и второй окруж

$D'(-4; 3; 0)$ - точка

$r=1$ - радиус окруж-ти
касаясь в 2 точках

2 решения

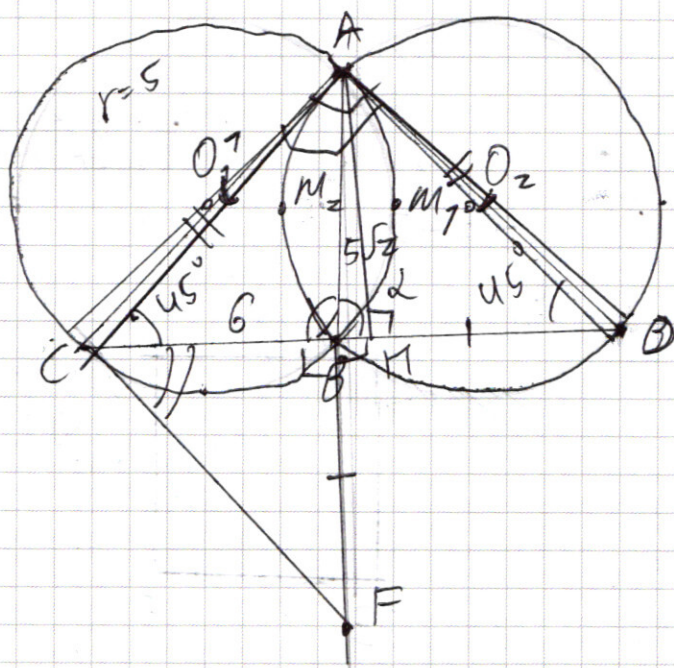
$$r^2 = a = 1$$

2) случай когда $r=5 = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$$r^2 = a = 25$$

Ответ: 1 и 25

W6



Доказ:

a) $D_1(O_1; 5)$ $D_2(O_2; 5)$

$A \in B$

$B \in CD$

$\angle CAD = 90^\circ$

$BF = BD$

$BF \perp CD$

Контрпр: $CF \perp$

d) Доказано:

$BC = 6$

Контрпр:

$S_{\triangle ACF}$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тема:

1) $\omega_1 \equiv \omega_2$ АВ - хорда окружности от
окружности окружности

$$\widehat{AM_1B} = \widehat{AM_2B} \Rightarrow \angle AM_1B = \angle AM_2B \Rightarrow$$

$$\angle AO_1B = \angle AO_2B \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$$

(центр дуг) (вписан. угол)

$\triangle ACD$ - равнобедренный треугольник

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$2) \angle AOB = 45 \cdot 2 = 90^\circ \Rightarrow$$

$$OA = 5 \quad AB = \sqrt{2} \cdot OA = 5\sqrt{2}$$

3) Р-н АН - высота

$$AH = HD$$

$$AH = AB \sin \angle ABD$$

$$BD = HD + BH = HD + AB \cdot \cos \angle ABD$$

$$= AB (\sin \angle ABD + \cos \angle ABD) = BF$$

$$CD = 2AH \quad (\text{при равнобедр. треугольнике})$$

$$CB = 2AH - BD = 2 \cdot AB \cdot \sin \angle ABD - AB \sin \angle ABD - AB \cos \angle ABD$$

$$= AB \cdot \sin \angle ABD - AB \cos \angle ABD = AB (\sin \angle ABD - \cos \angle ABD)$$

$$4) CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = AB \sqrt{(\sin \angle ABD + \cos \angle ABD)^2 + (\sin \angle ABD - \cos \angle ABD)^2}$$

$$= AB \sqrt{2 \sin^2 \angle ABD + 2 \cos^2 \angle ABD + 2 \sin \angle ABD \cos \angle ABD - 2 \sin \angle ABD \cos \angle ABD} =$$

$$= AB \sqrt{2 (\sin^2 \angle ABD + \cos^2 \angle ABD)} = AB \sqrt{2}$$

$$CF = AB \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 10$$

Ответ: $CF = 10$

$$d) BC = 6$$

$$BF = BD = 2AM - CB = 2 \cdot \sin 2 \cdot 5\sqrt{2} - 6 =$$

=

$AC = AD$ и $\triangle ACD$ - равнобедренный

$$AC^2 = AD^2$$

$$CB^2 + AB^2 + 2CB \cdot AB \cdot \cos \alpha = AD^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \alpha$$

$$\angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos\left(\frac{11}{2}n - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{11}{2}n - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11}{2}n = \frac{5\pi}{8} + \pi l$$

$$n = \frac{5}{44}\pi + \frac{2\pi}{11}l$$

$\sqrt{2}$

$$\cos 11n - \cos 3n - \sin 11n + \sin 3n = \sqrt{2} \cos 14n$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \cos \beta &= \sin \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2 \sin \frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta}{2} = \\ &= 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

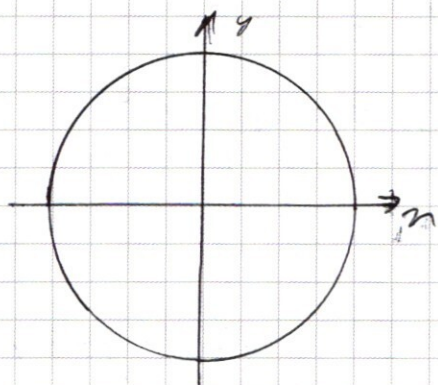
$$(\sin 3n - \cos 3n) - (\sin 11n - \cos 11n) = \sqrt{2} \cos 14n$$

$$\sqrt{2} \sin\left(3n - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(11n - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos(2 - 4n)$$

$$\sin\left(3n - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(11n - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14n$$

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}\left(3n - \frac{\pi}{4} - 11n + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cos\left(\frac{1}{2}\left(3n - \frac{\pi}{4} + 11n - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$2 \sin(-4n) \cos\left(7n - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14n$$



$$1) n = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} m$$

$$2) n = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} k$$

$$3) n = \frac{5}{44}\pi + \frac{2\pi}{11} l$$

$m, k, l \in \mathbb{Z}$.

Ответ:

$$n = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} m$$

$$n = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} k$$

$$n = \frac{5}{44}\pi + \frac{2\pi}{11} l$$

$m, k, l \in \mathbb{Z}$

н/з Термины слов гр-и

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg n} = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2ny - 4n - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

OD3:
 $n > 0$
 $y > 0$

1) $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg n} = y^2 \lg xy$

$$y^{5 \lg n} \cdot x^{-\lg n} = y^{2(\lg n + \lg y)}$$

$$y^{5 \lg n} \cdot (x^{-1})^{\lg n} = y^{2 \lg n} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg n} \cdot x^{-1 \lg n} = y^{2 \lg y}$$

$$10^{\lg y \cdot 3 \lg n} \cdot 10^{(-1) \lg n \cdot \lg n} = 10^{\lg y \cdot 2 \lg y}$$

$$10^{3 \lg n \lg y - \lg^2 n} = 10^{2 \lg^2 y}$$

$$10^{-\lg^2 n + 3 \lg n \lg y - 2 \lg^2 y} = 1$$

$$10^{\lg^2 n - 3 \lg n \lg y + 2 \lg^2 y} = 10^0$$

$$\lg^2 n - 3 \lg n \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$a = \lg n \quad b = \lg y$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \quad a^2 - ab - 2ab + 2b^2 = a(a-b) - 2b(a-b)$$

$$(a-b)(a-2b) = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg n = \lg y \\ \lg n = 2 \lg y \end{cases} \quad \begin{cases} \lg n = \lg y \\ \lg n = \lg y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = y \\ n = y^2 \end{cases}$$

2) $x^2 - 2ny - 4n - 3y^2 + 12y = 0$

$$x^2 - 2ny - 3y^2 - 4n + 12y = 0$$

$$(x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = -y - 4 \end{cases}$$

$$x^2 - 2ny - 3y^2 =$$

$$= x^2 - 3ny + ny - 3y^2 =$$

$$= x(x-3y) + y(x-3y) =$$

$$= (x+y)(x-3y)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Дано:

$$a b c d e f g h = 3345$$

Найти: кол-во 8-знач. чисел удов. усл.

Решение:

$$1) 3375 = 3^3 \cdot 5^3 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

2) добавим еще 1

$$\begin{array}{r|l} 3345 & 3 \\ 1125 & 3 - \text{разм. на единицу} \\ 345 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3375$$

1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5 - цифры для сот. 8-знач.

1 - повторится 2 раза; 3, 5 - по 3 раза

если поменять 1-и или 3-и или 5-и местами то число не изменится.

мы расположим 8 цифр
и сократим одинаковые по значению
варианты

$$\frac{8!}{2! 3! 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 560 \text{ чисел удов. усл.}$$

на 1 приходим по 2! один вариант
на 3 и 5 по 3! одинак. варианты с разным
расположением цифр, но равные по
значению.

Ответ: 560 - кол-во 8-знач. чисел удов. усл.

№2 Решите уравнение:

$$\cos 11\pi - \cos 3\pi - \sin 11\pi + \sin 3\pi = \sqrt{2} \cos 14\pi$$

$$(\cos 11n - \cos 3n) - (\sin 11n - \sin 3n) = \sqrt{2} \cos 7n;$$

$$\begin{aligned} -2 \sin \frac{11n+3n}{2} \sin \frac{11n-3n}{2} - 2 \sin \frac{11n-3n}{2} \cos \frac{11n+3n}{2} &= \begin{cases} \cos \alpha - \cos \beta = \\ = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = \\ = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \end{cases} \\ = \sqrt{2} (\cos^2 7n - \sin^2 7n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \sin 7n \sin 4n - 2 \sin 4n \cos 7n &= \\ = \sqrt{2} (\cos^2 7n - \sin^2 7n); \end{aligned}$$

$$-2 \sin 4n (\sin 7n + \cos 7n) = \sqrt{2} (\cos^2 7n - \sin^2 7n);$$

$$\sqrt{2} (\cos 7n - \sin 7n) (\cos 7n + \sin 7n) + 2 \sin 4n (\cos 7n + \sin 7n) = 0$$

$$\sqrt{2} (\sin 7n + \cos 7n) (\cos 7n - \sin 7n + \sqrt{2} \sin 4n) = 0$$

$$\cos \alpha - \sin \beta = \cos \alpha - \cos (\frac{\pi}{2} - \beta) = -$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \sin \alpha &= \cos \alpha - \cos (\frac{\pi}{2} - \alpha) = -2 \sin \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} \\ &= -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha - \frac{\pi}{4} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = -\sqrt{2} \sin (\alpha - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} (\sin 7n + \cos 7n) (-\sqrt{2} \sin (7n - \frac{\pi}{4})) + \sqrt{2} \sin 4n = 0$$

$$-2 (\sin 7n + \cos 7n) (\sin (7n - \frac{\pi}{4}) - \sin 4n) = 0$$

$$\begin{cases} \cancel{2 \cdot \sqrt{2}} (\sin 7n + \cos 7n) = 0 \\ \sin (7n - \frac{\pi}{4}) - \sin 4n = 0 \end{cases}$$

$$1) \sin 7n + \cos 7n = 0 \quad | : \cos 7n \neq 0$$

$$\tan 7n + 1 = 0 \quad \tan 7n = -1$$

$$7n = \frac{-\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$n = \frac{-\pi}{28} + \frac{\pi}{7} m$$

$$2) \sin (7n - \frac{\pi}{4}) - \sin 4n = 0$$

$$2 \sin (\frac{7}{2} (7n - \frac{\pi}{4} - 4n)) \cos (\frac{7}{2} (7n - \frac{\pi}{4} + 4n)) = 0$$

$$2 \sin (\frac{3}{2} n - \frac{\pi}{8}) \cos (\frac{11}{2} n - \frac{5\pi}{8}) = 0$$

$$\sin (\frac{3}{2} n - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{3}{2} n - \frac{\pi}{8} = \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \quad - \text{умножим на 2}$$

$$\frac{3}{2} n = \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$n = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} k$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} n=y \\ n=y^2 \\ n=3y \\ n=-y-4 \end{cases} \quad \begin{cases} n=y \\ n=3y \\ 3y=y \\ 2y=0 \\ y \neq 0 \\ n \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n=y-4 \\ -y-4=y \\ 2y=-4 \\ y \neq -2 \\ n \neq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} n=y^2 \\ n=3y \\ y^2=3y \\ y(y-3)=0 \\ y \neq 0 \\ y=3 \end{cases}$$

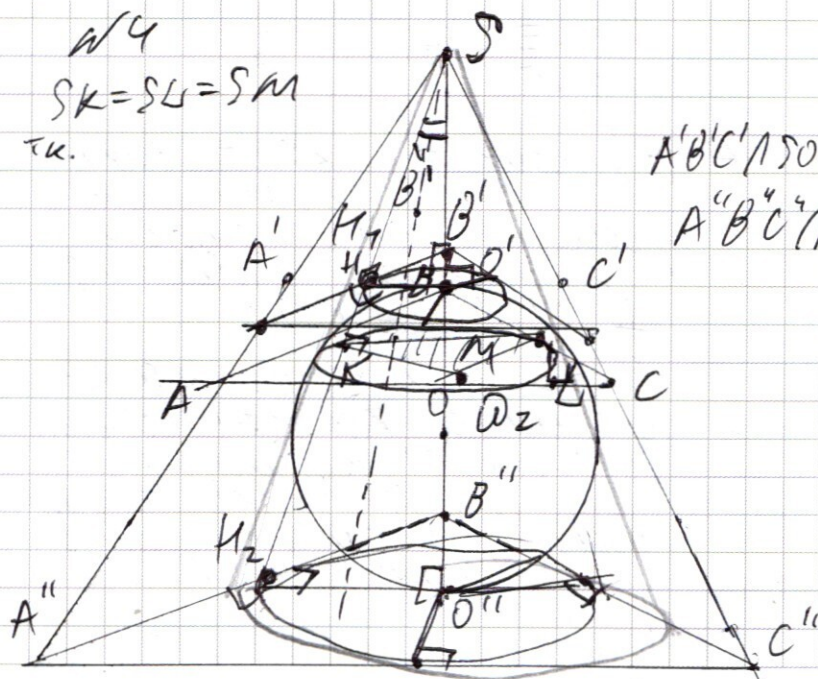
$$\begin{cases} n=y^2 \\ n=-y-4 \end{cases} \quad y^2 = -y-4 = 0; \quad y^2 + y + 4 \neq 0;$$

$$D = 1 - 4 \cdot 4 = -15 \Rightarrow y \in \emptyset \Rightarrow n \in \emptyset$$

$$\begin{cases} n > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Ответ: ~~(0,0)~~ ~~(-2,-2)~~, (9;3) $\in$ OD_3
 Ответ: (9;3) $y=3$ $n=9$
 Ответ: (9;3)

н/ч
 $SK = SL = SM$
 тк.



$$\begin{aligned} A'B'C' \cap SO &= O' \\ A''B''C'' \cap SO &= O'' \end{aligned}$$

Дано:

$\odot(O, r)$
 шар

К₁, L, M - точки
 касания шара
 с гранями 3-х
 гран. угла

$$\begin{aligned} S_{\triangle A'B'C'} &= 1 \\ (\triangle A'B'C') &\perp SO \\ S_{\triangle A''B''C''} &= 4 \\ A''B''C'' &\perp SO \end{aligned}$$

Лайтми: $1\frac{1}{2}$ KSO

2) $\int_{\text{cur}} (\angle ABC - \angle KLM) - ?$
 $\int_{\text{ABC}} - ?$

Тема:

$$(ABC) \equiv (KLM) - \text{unvollständig}$$

1/ gon. nump. $A'\theta' \cap KS = H_1$

$$(\hat{O} \perp (A'B'C') \Rightarrow \hat{O} \perp A'B' \Rightarrow A'B')$$
$$OK \perp (ABS) \Rightarrow \begin{matrix} (ABS) \perp (KOS) \\ (ABS) \perp (KSO) \end{matrix} - \text{Korollar}$$
$$SO \perp (A'B'C') \Rightarrow (KSO) \perp (A'B'C')$$
$$\left. \begin{aligned} (K_5 O) \perp (A B S) &\Rightarrow (K_5 O) \perp (A' B' S) \\ (K_5 O) \perp (A' B' C') \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

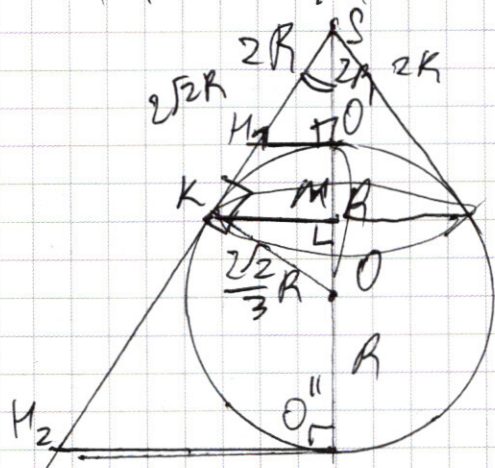
(KCO) - поверхность иверсет. угла $\gamma(KBS)$ и $\gamma(A'B'C')$
- тесное

2) $(A \cap S) \cap (A' \cap C') = A' \cap B'$ - по теореме де Моргана $\Rightarrow$
 $A' \cap B' \perp (K \cap S) \Rightarrow KS \perp A' \cap B' \Rightarrow O'H_1 \perp A' \cap B'$
 $O' = (A' \cap B' \cap C') \cap SO$

3) аридности ($A''B''C'' \parallel A'B'C'$)

$$SO \wedge A'' B'' C'' = 0 \quad //$$
$$\left. \begin{array}{l} (KSO) \perp (A''B''C'') \\ (KSO) \perp (A''B'S) \end{array} \right\} \Rightarrow \{M_2 \perp A''B'' \quad O''M_2 \perp A''B''\}$$
$$O''M_2 \perp A''B''$$

$(A''B''C'') \cap (ABC) = A''B''$ - верно (КСО)-матрица
матр. чина



а) параллельны в смысле
тождества $\perp A'B' \text{ ("} A''B' \text{")}$ $\perp$ $A''B''$

$PK = SL = PM$ (т.к. по условию с кругом (окружностью) касающиеся из точки P все окружности, к сфере касаются по дугам)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \angle A'B'C' &= 1 & (A'B'C') \parallel (A''B''C'') &\text{т.к. } \perp SO \\ \angle A''B''C'' &= 4 & \triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C'' & \text{т.к. } \frac{A'B'}{A''B''} = \\ &= \frac{B'C'}{B''C''} = \frac{A'C'}{A''C''} = k & \text{т.к. } A'B' \parallel A''B'' & \text{и т.д.} \end{aligned}$$

$$\frac{\angle A''B''C''}{\angle A'B'C'} = k^2 = 4 \quad k = 2 - \text{коэффициент подобия}$$

5) $\frac{H_2O''}{H_1O'} = k = 2$ т.к. $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$
(т.к. $KS \perp LS \perp MS$ - кас.)
 H_1O' - радиус вписанной окружности $\triangle A'B'C'$
 H_2O'' - радиус вписанной окружности $\triangle A''B''C''$
 $\triangle H_1O' \sim \triangle H_2O'' \sim \triangle SOK$ (общий угол с верш. O при сер.)

$$\frac{H_2O''}{H_1O'} = \frac{SO''}{SO'} = 2$$

$$SO'' = 2R + SO' = 2SO'$$

$$SO' = 2R = O$$

$$SO' = O'O$$

$$SO = SO' + O'O = 2R + R = 3R$$

$$KO = R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

6) р.н. $M \in SO$ $KM \perp SO$
 $KM \in (ABC)$

$$KS = \sqrt{SO^2 - KO^2} = \sqrt{(3R)^2 - R^2} = R\sqrt{8} \quad \text{по теореме Пифагора}$$

$$KS - \text{высота } \triangle KSM$$

$KM \perp AB$ (по симметрии с $A'B'C'$)

3) $\rho. n. \omega_2 (M, KM)$ — круг из точек касания
линий велик сфере ω_1 из точки S

$\omega_2 \perp SO$ $\Gamma_4 \omega_2$ — осязательный конус с осью ω_2

содержащий так K, L, M

$$KM = \sin(\angle KSO) \cdot KS = \frac{1}{3} \cdot KS = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$$

$$\begin{aligned} H_1 O_1 &= SO' \cdot \cos \angle KSO = SO' \cdot \frac{\cos \angle KSO}{\sin \angle KSO} = SO' \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}}{\frac{1}{3}} \\ &= SO' \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} = SO' \cdot \frac{\sqrt{\frac{8}{9}}}{\frac{1}{3}} = SO' \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cdot SO' \end{aligned}$$

$$SO' = 2R$$

$$H_1 O_1 = 2\sqrt{2} \cdot 2R = 4\sqrt{2} R$$

2) $\frac{KM}{H_1 O_1} = n$ н — коэффициент подобия
т.к. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$$n = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 4\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} H_1 O_1 &= SO' \cdot \tan \angle KSO = 2R \cdot \frac{\sin \angle KSO}{\cos \angle KSO} = 2R \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} \\ &= \frac{2R \cdot \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = \frac{2R}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{KM}{H_1 O_1} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} R}{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3} = n$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} &= n^2 & S_{\triangle ABC} &= n^2 \cdot S_{\triangle A'B'C'} = n^2 \cdot 1 \\ & & &= \frac{4^2}{3^2} \cdot 1 = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

Ответ: $\sin \frac{2}{3}$ и $S_{\text{сеч}} = \frac{16}{9}$

и 5 найдем все знач. n , при которых
система имеет ровно 400
решений

$$\begin{cases} y = 2^n + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 40 + (2^{64} - 1)n \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

