

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3 = 5^4 \cdot 9 \cdot 3$ — это 2 возможных разложения на произведение степеней цифр.

Заметим, что 5⁴ присутствует в каждом разложении. Кол-во способов разместить цифру 5 равно $C_4^4 = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$.

Оставшийся набор из 4х цифр может быть (3, 3, 3, 1) и (9, 3, 1, 1).

а) (3, 3, 3, 1) ←

—	3	—	3	—	3	—	1
—	3	—	1	—	3	—	3
—	3	—	3	—	1	—	3
—	1	—	3	—	3	—	3

Тогда чисел, состоящих из наборов (5, 5, 5, 5) и (3, 3, 3, 1) всего:

$$1 \cdot 4 = 4$$

б) (9, 3, 1, 1) Кол-во способов разместить единицы $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.
Тогда оставшиеся 2 цифры можно разместить 2мя способами
всего $6 \cdot 2 = 12$.

Тогда чисел, состоящих из наборов (5, 5, 5, 5) и (9, 3, 1, 1) всего:

$$12 \cdot 1 = 12$$

Всего чисел: $4 + 12 = 16$.

Ответ: 16

Задача №2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 \end{cases}$$

$$1) \cos 5x - \sin 5x = \cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \left(\cos 5x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \right) = 0$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \cos 2x - 2 \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

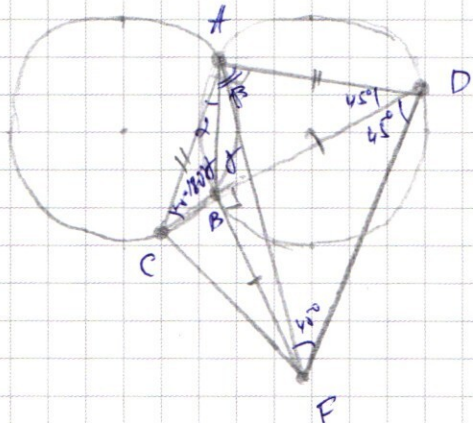
$$\begin{cases} \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, n, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6



a) $\triangle BCF$: $CB^2 + BF^2 = CF^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow CB^2 + BD^2 = CF^2$

$$\alpha + \beta = \frac{d}{2}$$

По Т-е синусов:

CP = 26 sind

$$BD = 26 \sin \beta = 26 \cos \alpha$$

$$CF = \sqrt{26^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = 26$$

5) $AC = 26 \cdot \sin(180 - \gamma) = 26 \cdot \sin \gamma = AD \Rightarrow \triangle ACD - p/\epsilon$
Tuga $\angle ADF = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AC \parallel FD \Rightarrow ACFD - n/y$ ipanayus

$$CF^2 = CB^2 + BD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$$

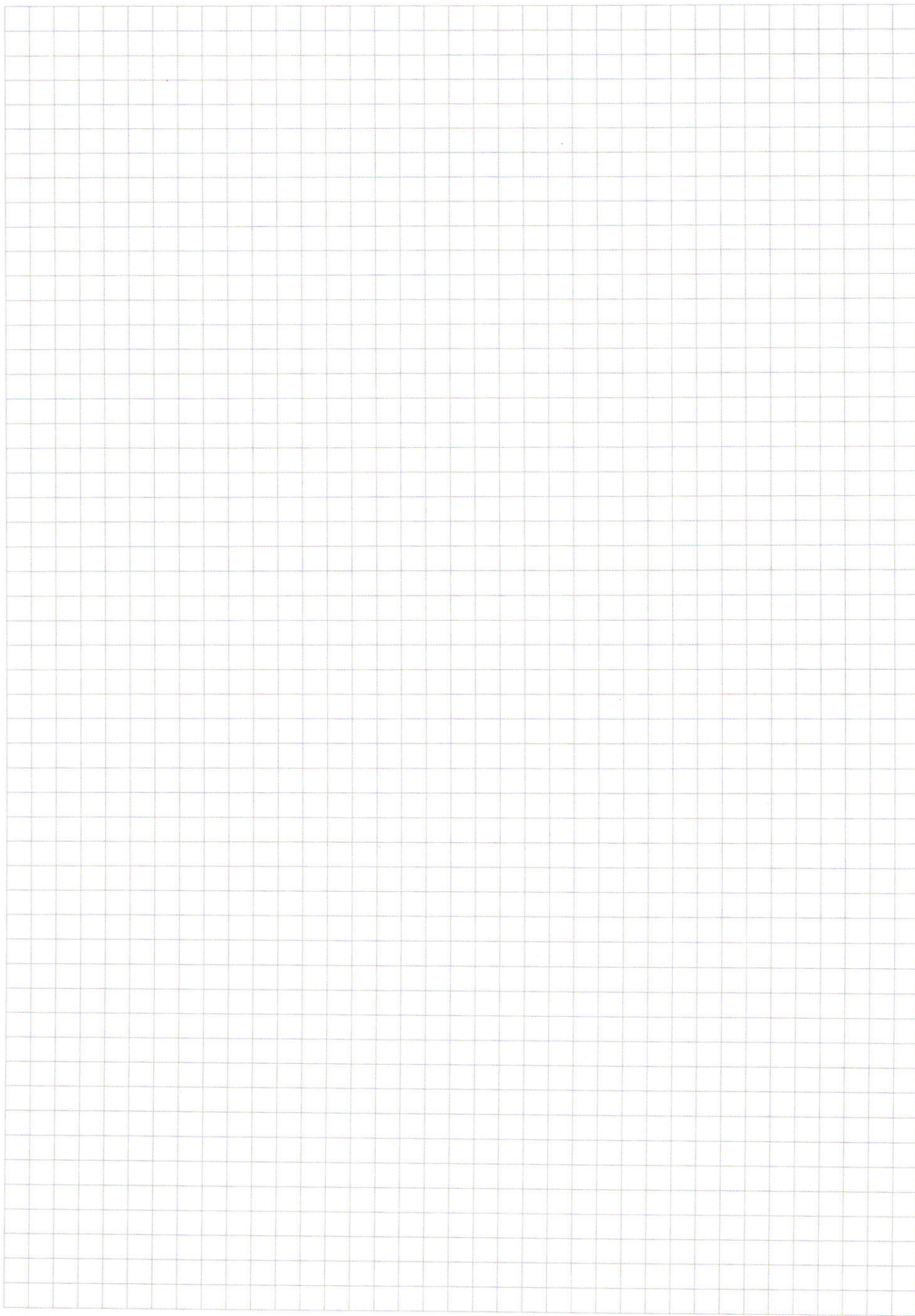
$$EP = \sqrt{2 \cdot 24} = \sqrt{2 \cdot 24}$$

$$U_3 \triangle ACD: \sqrt{2} \cdot AC = \underbrace{CB}_{34} + BD = 34 \Rightarrow AC = \frac{34}{\sqrt{2}}$$

$$S_{ADFC} = \frac{AC + FD}{2} \cdot AD = \frac{\frac{34}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cdot 24}{2} \cdot \frac{34}{\sqrt{2}} = 17^2 + 12 \cdot 34 = 17 \cdot 41$$

$$S_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FD = \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot 24 = 17 \cdot 24$$

$$S_{ACF} = S_{ADFC} - S_{ADF} = 17 \cdot 41 - 17 \cdot 24 = 17 \cdot 17 = 289$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①.

$$\begin{array}{r} 16875 : 5 = 3375 \\ 3375 : 5 = 675 \\ 675 : 5 = 135 \\ 135 : 5 = 27 \\ 27 : 3 = 9 \\ 9 : 3 = 3 \\ 3 : 3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 : 5 = 3375 \\ 3375 : 5 = 675 \\ 675 : 5 = 135 \\ 135 : 5 = 27 \\ 27 : 3 = 9 \\ 9 : 3 = 3 \\ 3 : 3 = 1 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3 = 5^4 \cdot 9 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ \times 5 \\ \hline 84375 \\ \times 5 \\ \hline 421875 \\ \times 5 \\ \hline 2109375 \\ \times 5 \\ \hline 10546875 \\ \times 5 \\ \hline 52734375 \end{array}$$

3). Каз поперек суммы По на цифра 5 всегда есть в числах 5

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

Тогда остальные 4 цифры могут быть

$$3, 3, 3, 1$$

$$9, 3, 1, 1$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

$$6 \cdot 2 = 12$$

$$70 \cdot 12 + 70 \cdot 4 = 70 \cdot 16 = 1120$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{array} = 4$$

②

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x +$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 10x = \cos(7x+3x) = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x = \sin 7x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \cos 7x + \cos(\frac{\pi}{4} + 7x) = 2 \cos(\frac{\pi}{4} + 7x) \cos(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + 7x)$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + 3x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} + 7x) + \cos(\frac{\pi}{4} + 3x) = \cos 10x = 2 \cos 2x \cos(\frac{\pi}{4} + 5x) \cos(\frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$3. \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \\ \frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} \end{cases}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = 2 \sin 5x \cos x$$

$$a - \sqrt{2} ab + b = c - \sqrt{2} cd + d$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\cos 7x - \sin 3x = \cos 7x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

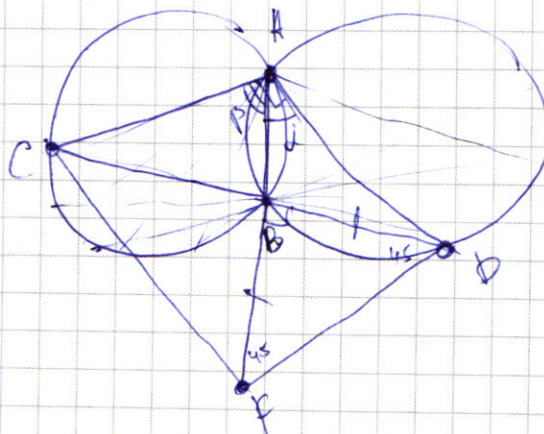
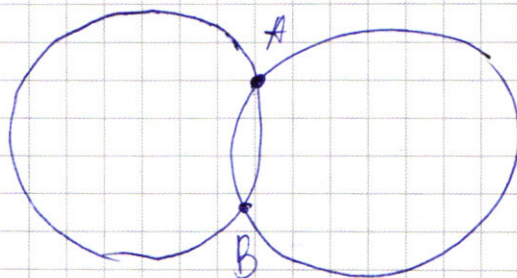
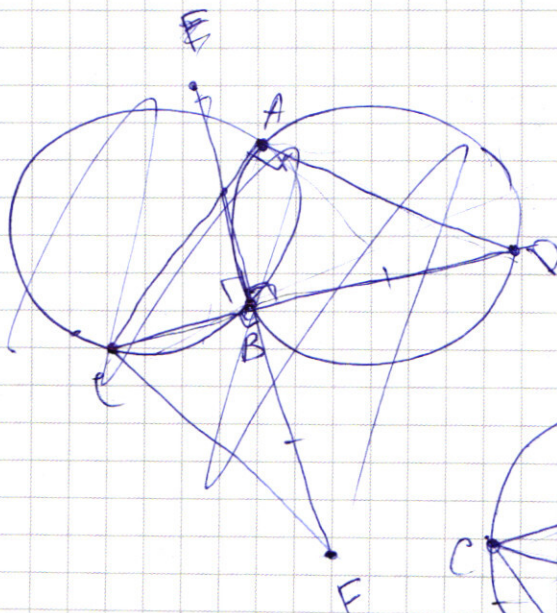
$$\cos 3x - \sin 7x = \cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 7x\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cdot 2 \cos 2x \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$

6.



$$2 \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{4} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x.$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0.$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0.$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0. \end{cases}$$

$$1) \cos 5x - \sin 5x = \cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0.$$

$$\frac{\pi}{4} + 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0.$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \left(\cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \right) = 0.$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\cos 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$2 \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3)

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) = (-x) \lg(-x) + \lg y \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \lg y = (-x) \lg(-xy) = (-x) \lg(-x) \cdot (-x) \lg y$$

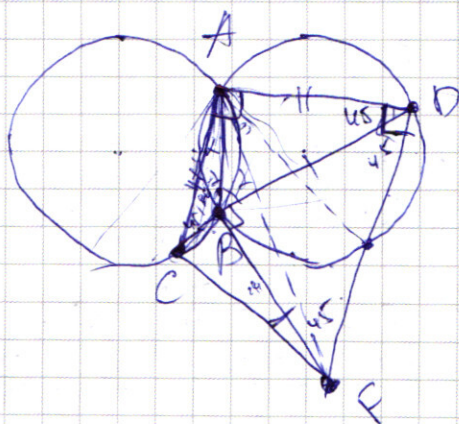
$$\left(\frac{(-x)^2}{y^2}\right)^2 \lg y = (-x) \lg(-x) \cdot (-x) \lg y$$

$$\frac{(-x)^3 \lg y}{y^2 \lg y} = (-x) \lg(-x) = (-x) \frac{\lg(-x)}{\lg y} = (-x) \lg y(-x) \lg y$$

$$\frac{(-x)^2 \lg y}{y^2 \lg y} = (-x) \lg y(-x) = (-x) \frac{\lg(-x)}{\lg y}$$

6)

a)



a)

$$AD = 26 \sin \alpha$$

$$AC = 26 \sin(180^\circ - \alpha) = 26 \sin \alpha$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$$

$$AB = CB + AC = 2 AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2} = AD + BD - 2 AD \cdot BD \cdot \frac{1}{2}$$

$$CB^2 - AC \cdot CB \sqrt{2} = BD^2 - AD \cdot BD \sqrt{2}$$

$$CB^2 - BD^2 = \sqrt{2} AC (CB - BD)$$

$$\begin{aligned} AC + AD &= \sqrt{2} AC \\ AC + AD^2 &= (CB + BD)^2 \\ \sqrt{2} AC^2 &= CB + BD \end{aligned}$$

$$CB = 26 \sin \alpha \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$BD = 26 \sin \beta$$

$$CB^2 + BD^2 = 26^2 \sin^2 \alpha + 26^2 \sin^2 \beta = 26^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 26^2 = CF^2$$

⇓

$$CF = 26$$

б). $AB = 26 \cdot \sin 45^\circ = 13\sqrt{2}$

$$CB^2 + BD^2 = CF^2$$

$$BD = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24$$

$$FD = \sqrt{2 \cdot 24^2} = \sqrt{2} \cdot 24$$

$$AC = \sqrt{2} \cdot 24 = 24\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} AC = CB + BD = 34 \quad AC = \frac{34}{\sqrt{2}}$$

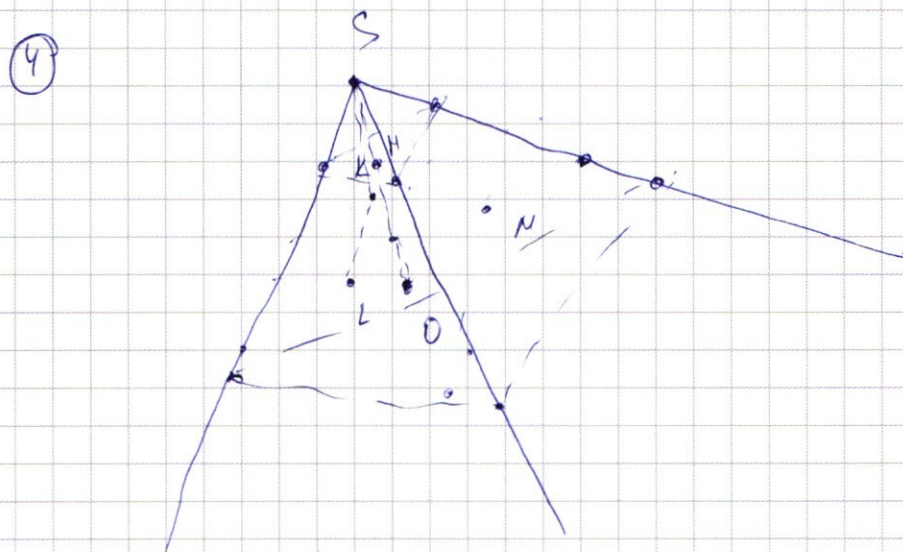
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

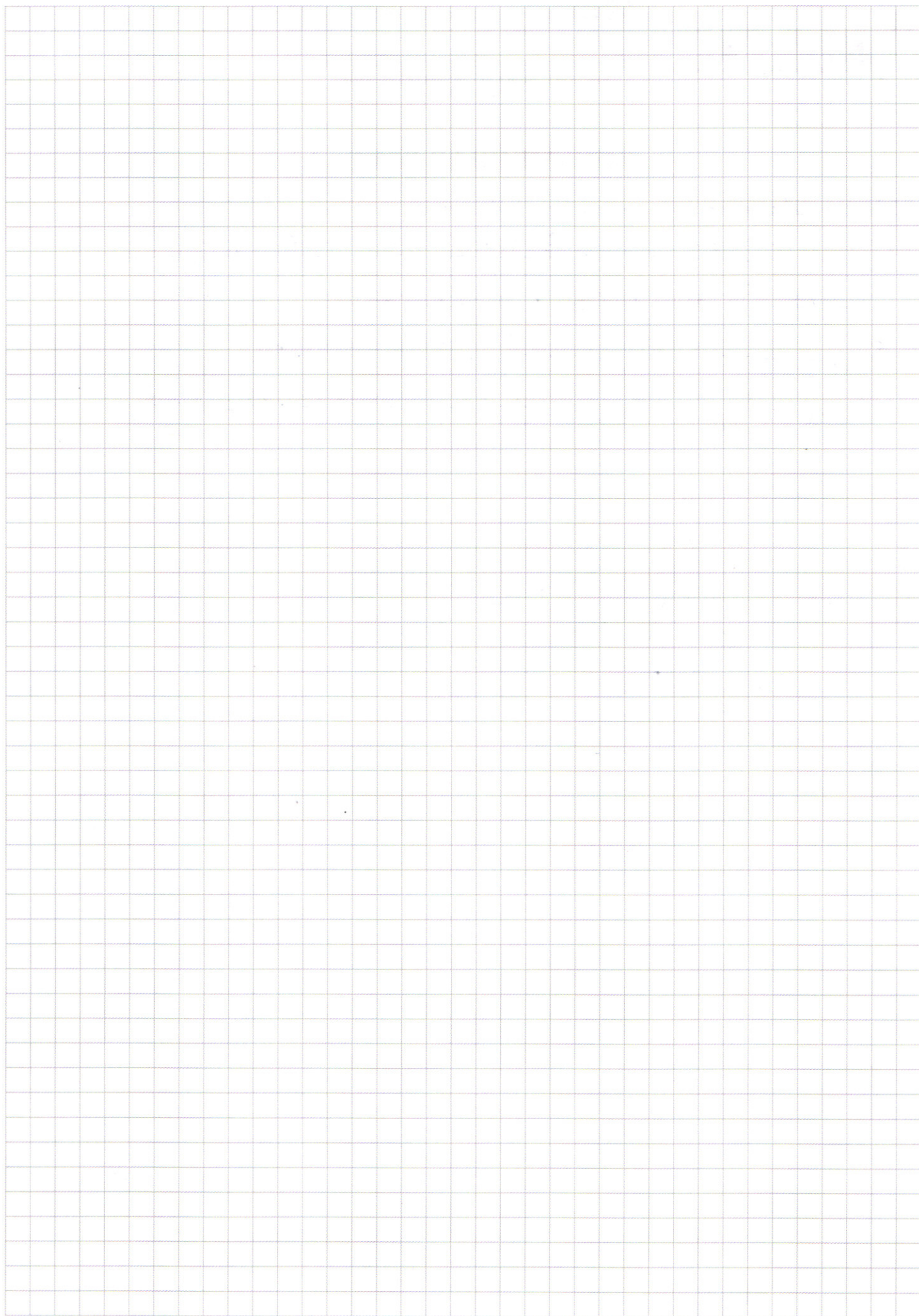
$ADFC$ - ~~трапеция~~ прямоугольная трапеция.

$$S_{\text{HDFC}} = \frac{AC + FD}{2} \cdot AD = \frac{\frac{34}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cdot 24}{2} \cdot \frac{34}{\sqrt{2}} = \left(\frac{17}{\sqrt{2}} + 12\sqrt{2} \right) \cdot \frac{34}{\sqrt{2}} = 17^2 + 12 \cdot 34 = 17(17 + 24) = 17 \cdot 41 \text{ m}$$

$$S_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FD = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot 24 = 17 \cdot 24.$$

$$S_{ACF} = S_{ADFC} - S_{ADF} = 17 \cdot 41 - 17 \cdot 24 = 17 \cdot 17 = 289.$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)