

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K , L , M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{3} \quad \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ} \quad \begin{cases} -x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$1) \quad 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (x+8)^2 - 4 \cdot 2(-x^2 - 4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = \\ &= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2 \\ y_{1,2} &= \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4} \quad ; \quad y_1 = x+4, \quad y_2 = -\frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y = x+4 \\ -4 < x < 0 \end{cases} \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases} \quad (2)$$

$$1) \begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg(y)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ \left(-\frac{x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ \lg\left(-\frac{x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg((-x)^{\lg(-x)}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ \lg y \lg\left(-\frac{x^3}{y^2}\right) = \lg^2(-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ \lg y \lg\left(-x \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2\right) = \lg^2(-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ \lg y (\lg(-x) + 2 \lg(-x) - 2 \lg y) = \lg^2(-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ 3 \lg y \lg(-x) - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ \lg^2(-x) - \lg y \lg(-x) + 2 \lg^2 y - 2 \lg y \lg(-x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ \lg(-x)(\lg(-x) - \lg y) + 2 \lg y (\lg y - \lg(-x)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ -4 < x < 0 \\ (\lg(-x) - \lg y)(\lg(-x) - 2 \lg y) = 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{array}{l} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = 2 \lg y \\ y = x+4 \\ -4 < x < 0 \end{array} \right. \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lg(-x) = \lg(x+4) \\ \lg(-x) = \lg(x+4)^2 \\ y = x+4 \\ -4 < x < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x = x+4 \\ -x = x^2 + 8x + 16 \\ y = x+4 \\ -4 < x < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = -4 \\ x^2 + 9x + 16 = 0 \quad (1) \\ y = x+4 \\ -4 < x < 0 \end{array} \right.$$

$$1) \quad x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 16 = 81 - 64 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2} < -4$$

$$x_2 = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; \quad -4 < \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = -\frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ x = -\frac{9 + \sqrt{17}}{2} \\ y = x+4 \\ -4 < x < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \\ x = -\frac{9 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{array} \right.$$

$$2) \quad \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases}$$

Мы знаем, что второе ур-ие сводится к (*),
поэтому:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ \begin{cases} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = 2 \lg y \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ \begin{cases} -x = -\frac{x}{2} \\ -x = \left(-\frac{x}{2}\right)^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ \begin{cases} x = 0 \text{ - не подходит из-за ДЗ.} \\ \frac{x^2}{4} + x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x = 0 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 0 \text{ - не подходит из-за ДЗ.} \\ x = -4 \end{cases} \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$(-2; 2), (-4; 2), \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$$

Ответ: $(-2; 2), (-4; 2), \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

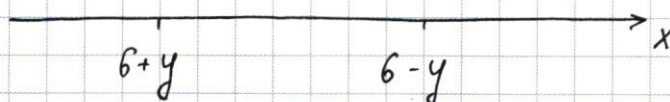
$$\sim 5 \quad \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Заметим, что при $a \leq 0$ решений у системы не более 1. Т.е. мы рассматриваем $a > 0$.

$$1) \quad |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$a) \quad y < 0$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$



$$|x-6-y| \quad - \quad + \quad +$$

$$|x-6+y| \quad - \quad - \quad +$$

$$\begin{cases} x \leq 6+y \\ -x+6+y - x+6-y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6+y < x < 6-y \\ x-6-y - x+6-y = 12 \end{cases}$$

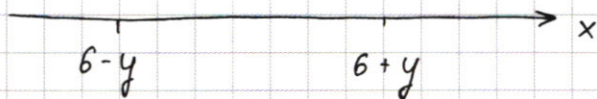
$$\begin{cases} x \geq 6-y \\ x-6-y + x-6+y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -6 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 12 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -6 \\ x = 12 \end{cases}$$

$$b) \quad y \geq 0$$

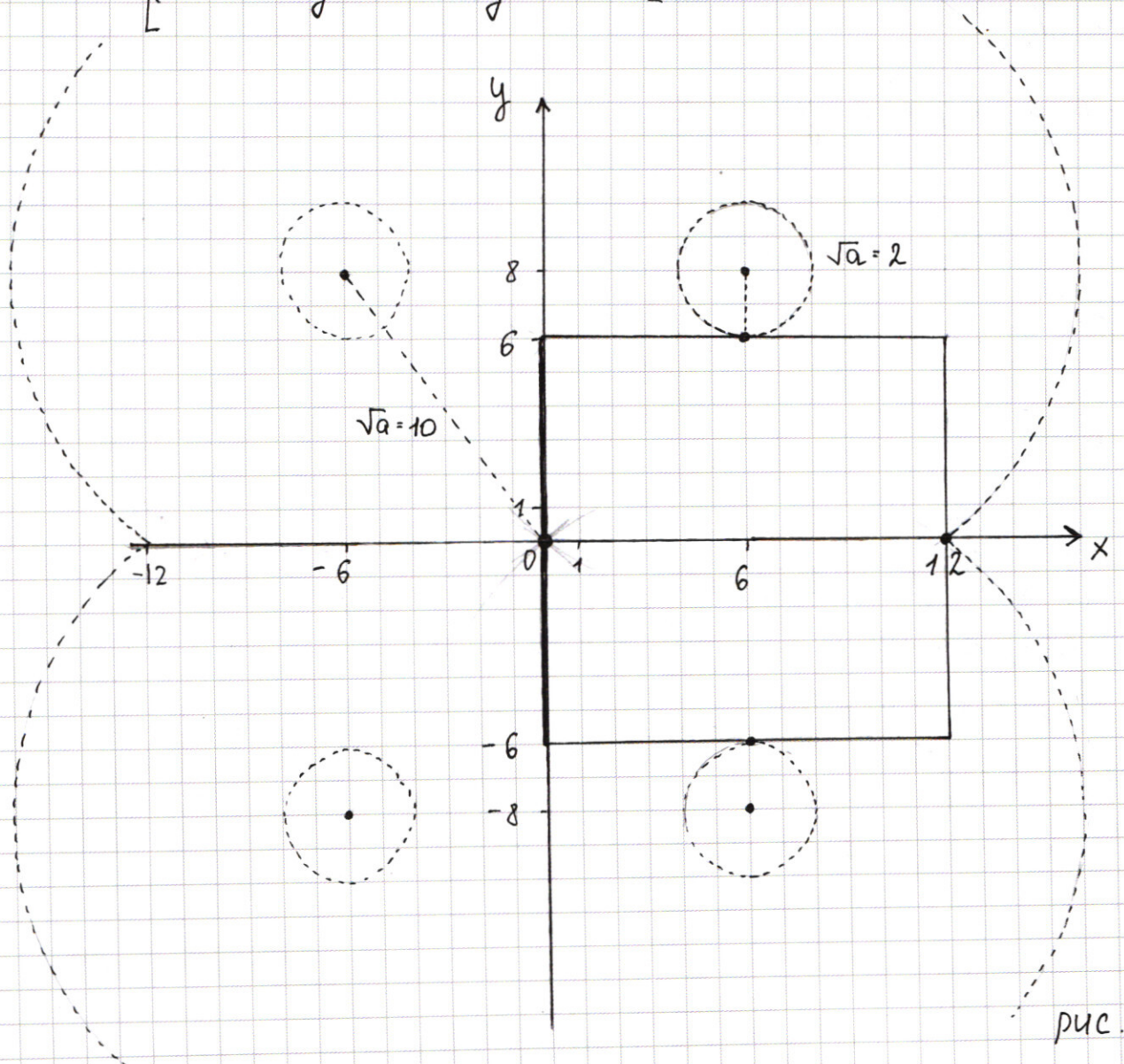


$|x-6-y|$ - - +

$|x-6+y|$ - + +

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 6-y \\ -x+6+y - x+6-y = 12 \\ 6-y < x < 6+y \\ -x+6+y + x-6+y = 12 \\ x \geq 6+y \\ x-6-y + x-6+y = 12 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \leq 6 \\ x = 0 \\ 0 < x < 12 \\ y = 6 \\ y \leq 6 \\ x = 12 \end{array} \right.$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь на этой же м-ши нарисует (2).

$$2) (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

центр окр. (6; 8)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ (x-6)^2 + (y+8)^2 = a \end{cases}$$

центр окр. (6; -8)

$$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ (x+6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

центр окр. (-6; 8)

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = a \end{cases}$$

центр окр. (-6; -8).

Из рис. видно, что при $\sqrt{a} = 2$ окружности в положительной полуплоскости касаются квадрата (1) в точках (6; 6) и (6; -6). При $\sqrt{a} < 2$ пересечений вообще нет. При $\sqrt{a} > 2$ больше 2-ух пересечений ровно до тех пор, пока $\sqrt{a}$ не становится равным 10. Тогда общие точки имеют координаты (0; 0) и (12; 0). При $\sqrt{a} > 10$ пересечений снова нет. Т.е. при $a = 4$, $a = 100$ мы получаем ровно два решения ((6; 6) и (6; -6) для перв., (0; 0) и (12; 0) для вт.)

Ответ: при $a=4$, $a=100$.

56 Дано:

$\text{Окр}(O_1; R), \text{Окр}(O_2; R)$

$R=13$

$\text{Окр}(O_1; R) \cap \text{Окр}(O_2; R) = A, B$

$C \in \text{Окр}(O_1; R), D \in \text{Окр}(O_2; R)$

$B \in CD$

$\angle CAD = 90^\circ$

$BF \perp CD$ (A, B, F)

$BF = BD$

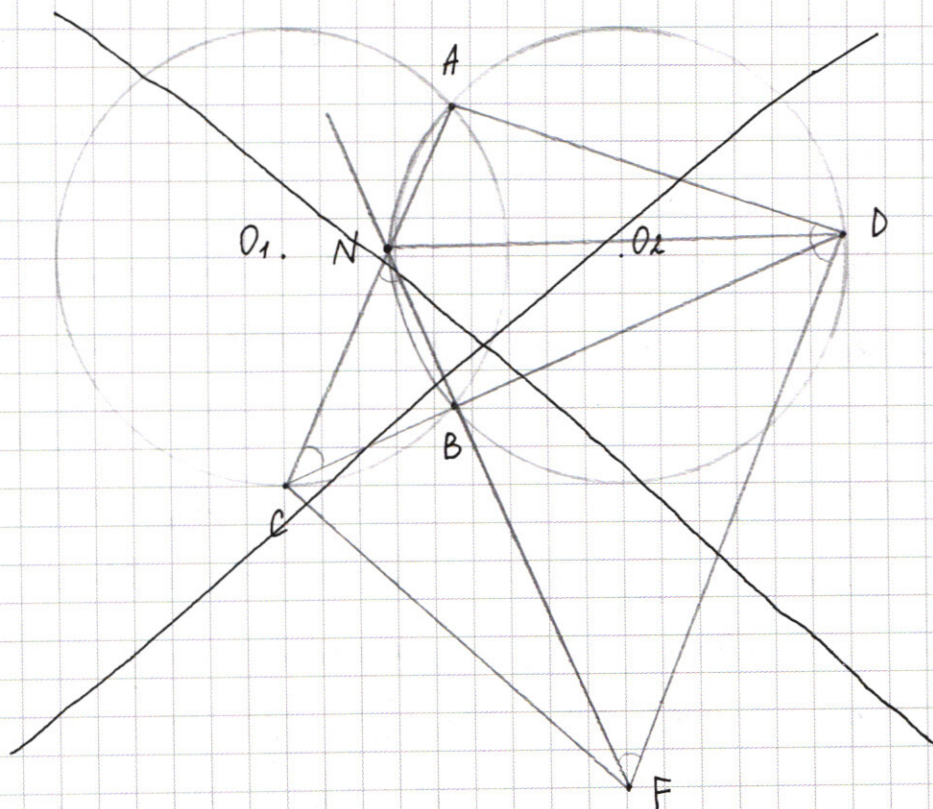
а) Найти CF

б) Найти S_{ACF} , если $BC=10$

Решение:

1) $AC \cap \text{Окр}(O_2; R) = N$ (отличной от A).

Докажем, что BF проходит через N . Пусть $BF \cap \text{Окр}(O_2; R) = N'$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 1) Разложим число 16875 на множители (просто):

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

Цифры ~~3 и 5~~ 5 (4 штуки) обязательно должны присутствовать в искомым восьмизначных числах. Множитель 3 может входить как цифра 3 и как цифра 9. Может присутствовать 1, т.к. она не влияет на произведение.

1) Входят только 5 и 3, (1). Т.к. входят только эти цифры, троек должно быть строго 3, пятерок — строго 4. Всего цифр 7. Т.к. числа 8-значн., то 8-ой, оставшейся цифрой, будет 1.

Итого таких чисел:

$$C_8^4 \cdot C_{8-4}^3 \cdot C_{8-4-3}^1 = A$$

↑ ← разм. тройки

$$A = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8! \cdot 4! \cdot 1!} \cdot 1! = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 0!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 40 \cdot 7 = 280.$$

размещаем пятерки (порядок неважен)

2) Входят только 5, 9 и 3, (1). Заметим, что $3^3 = 9 \cdot 3$, т.е. в этом случае 3 только 1, 9 тоже, и иначе

быть не может. Т.е. из 4 пятерок, 1-ой девятки и 1-ой тройки (всего 6 цифр, оставшиеся 2 - единицы) составляются числа, которых всего:

$$C_8^4 \cdot C_{8-4}^1 \cdot C_{8-4-1}^1 \cdot C_{8-4-1-1}^2 = B$$

$\nearrow$ размещении пятерки $\nearrow$ разм. девятки $\searrow$ разм. единицы
 $\nearrow$ разм. тройки

Порядок в размещении определенных цифр (только пятерок или только троек) неважен, т.к. пятерки (или тройки) друг от друга не отличаются.

$$B = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 42 \cdot 20 = 840$$

Всего чисел $A + B = 280 + 840 = 1120$ (штук)

Ответ: 1120.

$$\sim 2 \quad \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 2 \cdot 5x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \sin^2 5x + 2 \cos 5x \cos 2x - (\sqrt{2} \cos^2 5x + 2 \sin 5x \cos 2x) = 0$$

$$\sin 5x (\sqrt{2} \sin 5x - 2 \cos 2x) - (\sqrt{2} \cos 5x - 2 \cos 2x) \cos 5x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$\left[\cos 5x = \sin 5x \right.$$

$$\left[\operatorname{tg} 5x = 1 \right.$$

$$\left. 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 \right] 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including a system of inequalities, a geometric diagram, and various trigonometric and algebraic derivations.

System of Inequalities:

$$\begin{cases} x - 6 > 0 \\ |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Geometric Diagram: A coordinate system showing a diamond-shaped region (rhombus) centered at (6, 0) with vertices at (0, 6), (12, 6), (6, 12), and (6, 0). The region is shaded and labeled with vertices A, B, C, D. The axes are labeled x and y.

Trigonometric and Algebraic Derivations:

Top right:

$$\begin{aligned} 2 \cos 2x \cos 2y &= \cos 4x + \cos 4y \\ 2 \sin 2x \sin 2y &= \cos 2x - \cos 2y \end{aligned}$$

Bottom right:

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 2y &= 2 \cos x \cos y \\ \cos 2x - \cos 2y &= 2 \sin x \sin y \end{aligned}$$

Left side:

$$\begin{cases} x \leq 6 + y \\ y \geq 6 - x \\ -x + 6 + y - x + 6 - y = 12 \\ 6 + y < x < 6 - y \\ x \geq 6 - y \\ y \geq 6 - x \\ x = 12 \\ y = 12 \end{cases}$$

Bottom left:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 - \cos x}$$

$$2 \sin \frac{x}{2}$$

$$- \sqrt{2} (1 - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x$$

$$(2 - \sqrt{2}) \cos 2x$$

$$- \sqrt{2} (\cos 2x - \cos 5x)$$

$$\frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

$$x^4 - x^2 + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} \sin 10x \cos 4x$$

$$\frac{1}{2}$$

$$h \sqrt{2} x = \frac{1}{2} a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{2} a}{4}$$

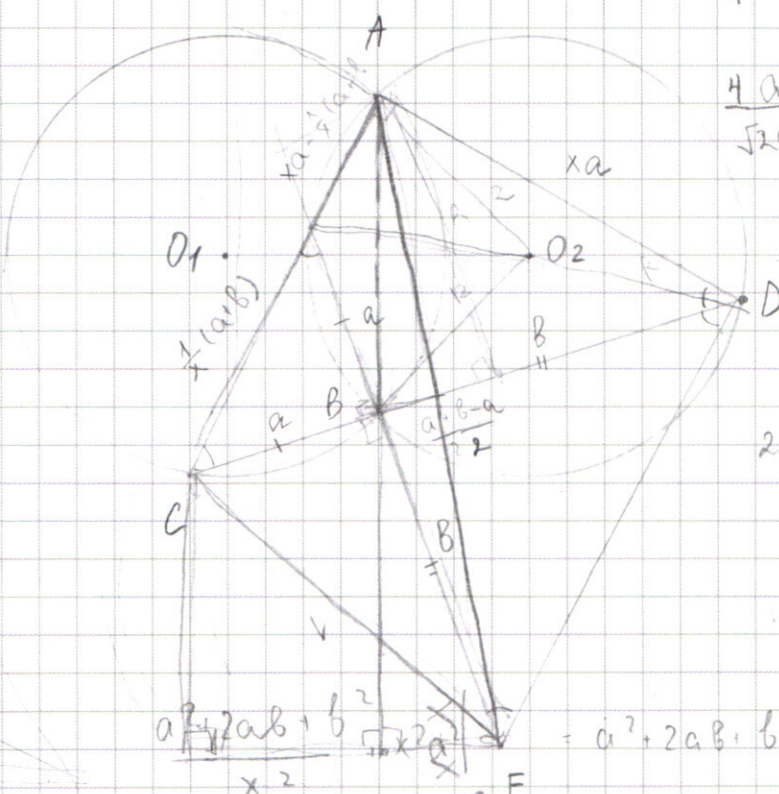
$$\frac{4a}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{a+b}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{a+b}$$

$$a = 10$$

$$20 + 2b = 10\sqrt{2}$$

$$b = 5\sqrt{2} - 10$$



$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{x^2} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\frac{a^2}{(a+b)^2} (x^2 - 1) = \frac{x^4 a^2}{2}$$

$$\frac{a^2}{(a+b)^2} x^4 - x^2 + 1 = 0$$

$$\sqrt{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \sin 2\alpha}}$$

$$\sqrt{1 - \sin 14x} = \sqrt{1 - \sin 6x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \quad 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x - (\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x + \sin 4x \cos x + \sin x \cos 4x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x - (-\sin^2 2x \cos x + \cos^2 2x \cos x - 2 \sin 2x \cos 2x \sin x +$$

$$+ 2 \sin 2x \cos 2x \cos x + \sin x \cos^2 2x - \sin x \sin^2 2x) = 0$$

$$- \sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} \cos^2 x + \cos x (-1 + \cos^2 2x) + \cos x \cos^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x \times$$

$$\times \sin x + 2 \sin 2x \cos 2x \cos x + \sin x \cos^2 2x - \sin x (1 - \cos^2 2x) = 0$$

$$- \sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} \cos^2 x - \cos x + \cos^3 x - \cos x \sin^2 x + \cos^3 x - \cos x \sin^2 x -$$

$$- 2 \sin^2 x \cos x \cos 2x + 2 \sin x \cos^2 x \cos 2x + \sin x - \sin x \sin^2 2x -$$

$$- \sin x + \sin x - \sin x \sin^2 2x = 0$$

$$- \sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} \cos^2 x - \cos x + 2 \cos^3 x - 2 \cos x \sin^2 x (-1 + 2 \cos^2 x) +$$

$$+ 2 \sin x \cos^2 x (-1 + 2 \cos^2 x) + \sin x - \sin x \cdot 4 \sin^2 x \cos^2 x -$$

$$- \sin x \cdot 4 \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$\sin x = a, \quad \cos x = b$$

$$- \sqrt{2} a^2 + \sqrt{2} b^2 - b + 2 b^3 - 2 b a^2 (2 b^2 - 1) + 2 a b^2 (2 b^2 - 1) + a -$$

$$- a \cdot 4 a^2 b^2 - a 4 a^2 b^2 = 0$$

$$- \sqrt{2} a^2 + \sqrt{2} b^2 - b + 2 b^3 - 4 b^3 a^2 + 2 b a^2 + 4 b^4 a - 2 a b^2 + a - 8 a^3 b^2 = 0$$

$$4 b^4 a + 2 b^3 - 4 b^3 a^2 + \sqrt{2} b^2 - 2 b^2 a - 8 a^3 b^2 - b + 2 b a^2 - \sqrt{2} a^2 + a = 0$$

$$4 a b^4 + b^3 (2 - 4 a^2) + b^2 (\sqrt{2} - 2 a - 8 a^3) - b (1 - 2 a^2) - \sqrt{2} a^2 + a = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos x$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$-2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{7x}{2}$$

$$\sin \frac{3x}{2} \cos \frac{7x}{2} - \sqrt{2} \sin 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x$$

$$\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x +$$

$$+ \sin 4x \cos x + \sin x \cos 4x$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} \cos^2 x -$$

4

$$\sin 4x (\cos x - \sin x) +$$

$$+ \cos 4x (\sin x + \cos x)$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi k$$

4

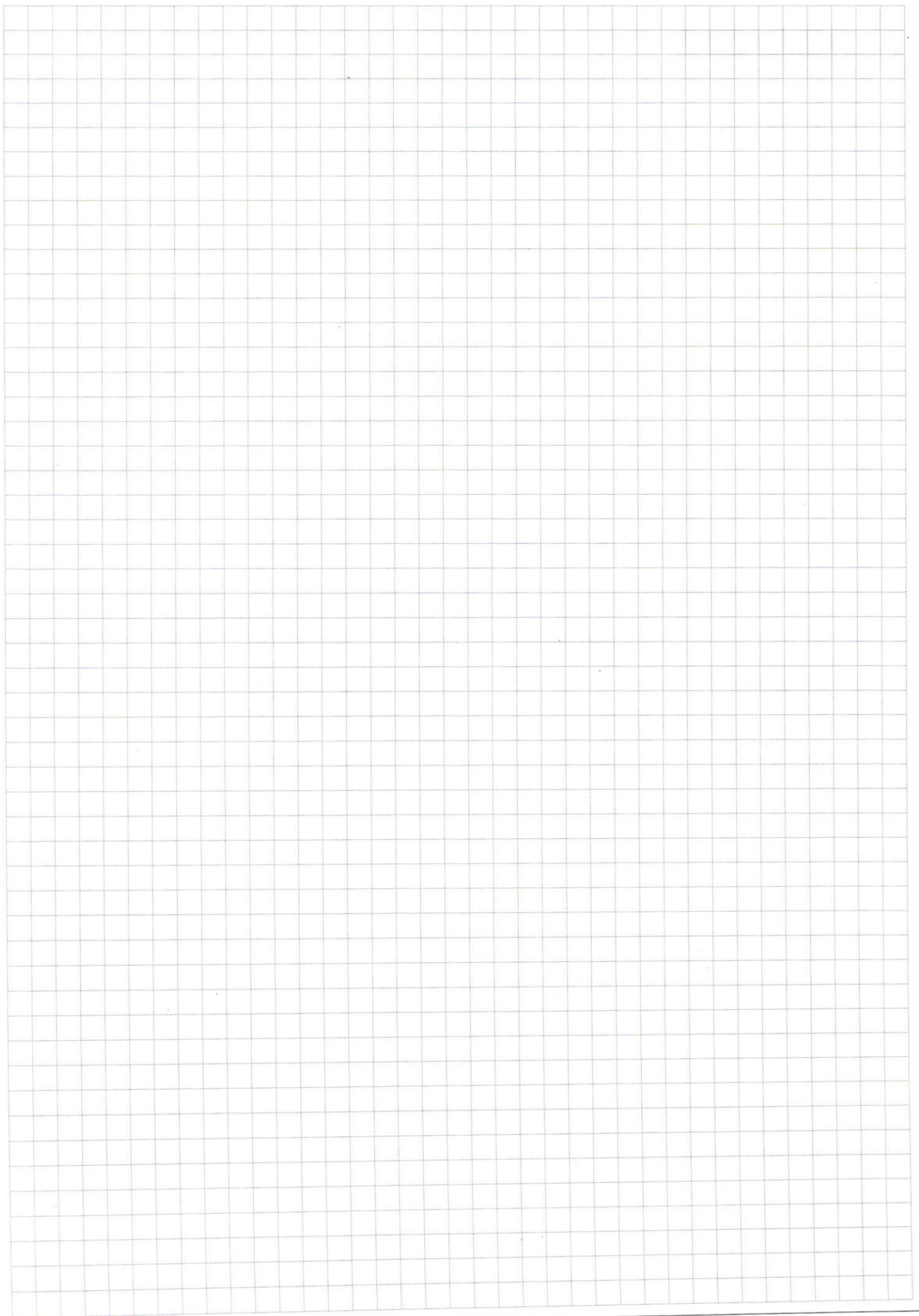
□

$$2\sqrt{2} \cos 2x - 2$$

$$\sqrt{2} (1 + \sin^2 x) \cos 2x - \sin 4x \cos 2x -$$

$$- \cos 4x (1 + \sin^2 x)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x (1 + \sin^2 x - \sin 4x)$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\lg(x+4) \left(\lg(-x) + \lg \frac{x^2}{(x+4)^2} \right) = \lg^2(-x)$$

$$\underbrace{\lg(x+4)}_b \left(\underbrace{\lg(-x)}_a + 2\lg(-x) - 2\lg(x+4) \right) = \lg^2(-x)$$

b

a

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$b(3a + 2b) = a^2$$

$$2b^2 + 3ab - a^2 = 0$$

$$\cancel{17a^2 + 8a^2} = \cancel{17a^2}$$

$$a^2 - 3ab - 2b^2 = 0$$

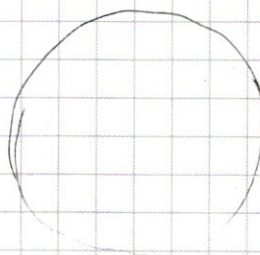
$$D = 9b^2 + 8b^2 =$$

$$a_{1,2} = \frac{+3b \pm \sqrt{17}b}{2}$$

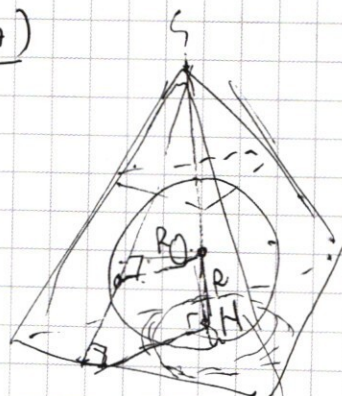
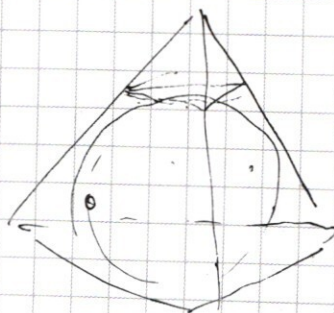
$$1) \quad a = \frac{3b(3 \pm \sqrt{17})}{2}$$

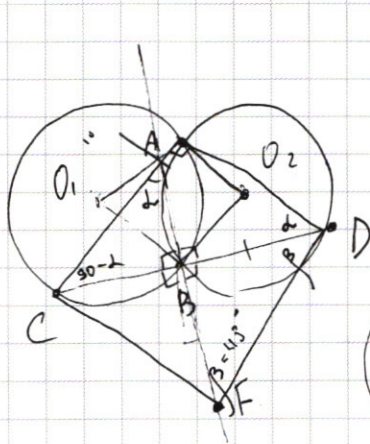
$$\lg(-x) = \frac{\lg(x+4)(3 \pm \sqrt{17})}{2}$$

$$\cancel{x^2} = \cancel{(x+4)^{3 \pm \sqrt{17}}}$$



R





$$\left\{ \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} \right.$$

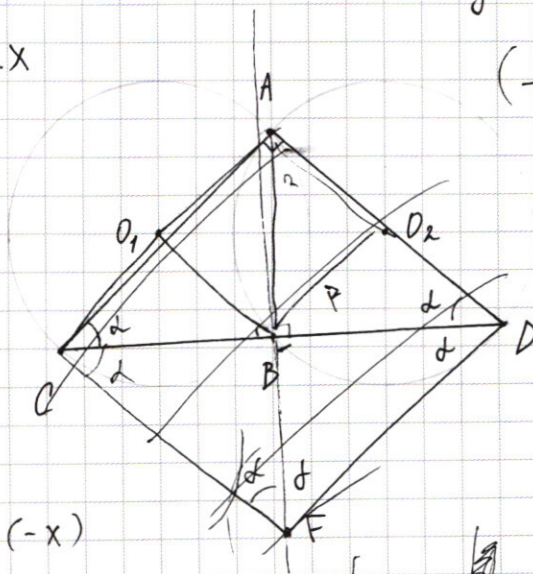
$$\frac{9 \pm 4}{2} = \frac{5}{2}, \frac{1}{2}$$

$$2 \cos$$

$$+ \frac{1}{2} \sin$$

$$2 \sin 5x \sin 2x$$

$$\frac{1}{2} \sin$$



$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} (-x)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{x^3}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\lg y \lg \left(-\frac{x^3}{y^2} \right) = \lg^2(-x)$$

$$\lg y \lg \left(-x \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^2 \right) = \lg^2(-x)$$

$$\lg y (\lg(-x) + 2 \lg \left(-\frac{x}{y} \right)) = \lg^2(-x)$$

$$\lg y (3 \lg(-x) - \lg y) = \lg^2(-x)$$

$$\lg y = \lg(-x)$$

$$y = -x$$

$$x + 4 = -x$$

$$3^x + 3^{8^2} = 3$$

$$2x \pm 1$$

$$x = -2$$

$$y = 2$$

$$4 \cdot 3^{8^2}$$

$$18$$

$$2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

21

—————

16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

1) 4 "5", 3 "3", 1 "1"

—————

$$C_8^3 \cdot C_5^4$$

$$C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = \frac{8! \cdot 4!}{4! \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 280$$

2) 4 "5", 1 "3", 1 "9", 2 "1"

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{4!}$$

$$C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 20 \cdot 42 = 840$$

$$= 20 \cdot 42 = 840$$

$$840 + 280 = 1120$$

~~$\cos 27x + \cos 523x - \sqrt{x} \cos 40x - \sin 7x \cos \sin 3x$~~

~~$2 \sin 25x \cos 25x$~~

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y - 0 & \end{aligned} \right.$$

$$043: -x > 0$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - xy - 8y - x^2 - 4x = 0$$

$$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (x+8)^2 - 8(-x^2 - 4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = \\ &= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2 \\ &\quad 3x \quad \quad 8 \end{aligned}$$

$$y_{1,2} = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4}$$

$$y_1 = x+4, \quad y_2 = -\frac{x}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} y &= x+4 \\ -4 < x < 0 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \end{aligned} \right.$$

$$\lg(-x)(\lg(-x))$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{-x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\lg\left(\frac{-x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg((-x)^{\lg(-x)})$$

$$\lg y \lg\left(-\frac{x^3}{y^2}\right) = \lg^2(-x)$$

$$\lg(x+4) \lg\left(-\frac{x^3}{x^2+8x+16}\right) = \lg^2(-x)$$

$$\left(\frac{x^3}{x^2+8x+16}\right)^2 \cdot (-x)$$