

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в ;
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x - \sqrt{2} \cos 14x = 0$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = 0$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)(2 \sin 4x - \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)) = 0$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0 \quad / : \cos 7x$$

$$\tan 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

$$\sqrt{2} \sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k - \frac{\pi}{8}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$-\frac{11x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi k$$

$$x = -\frac{3\pi}{22} + \frac{2\pi k}{11}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Зап. 5. $\begin{cases} |y-3x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

4 окр.

$$O_1(4; 3)$$

$$O_3(-4; -3)$$

$$R = \sqrt{a}$$

$$O_2(4; -3)$$

$$O_4(-4; 3)$$

$$a > 0$$

Квадрат

$$\textcircled{1} \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2y-6=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq 3-x \\ y=6 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ -2x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ 2y+6=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x=3 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

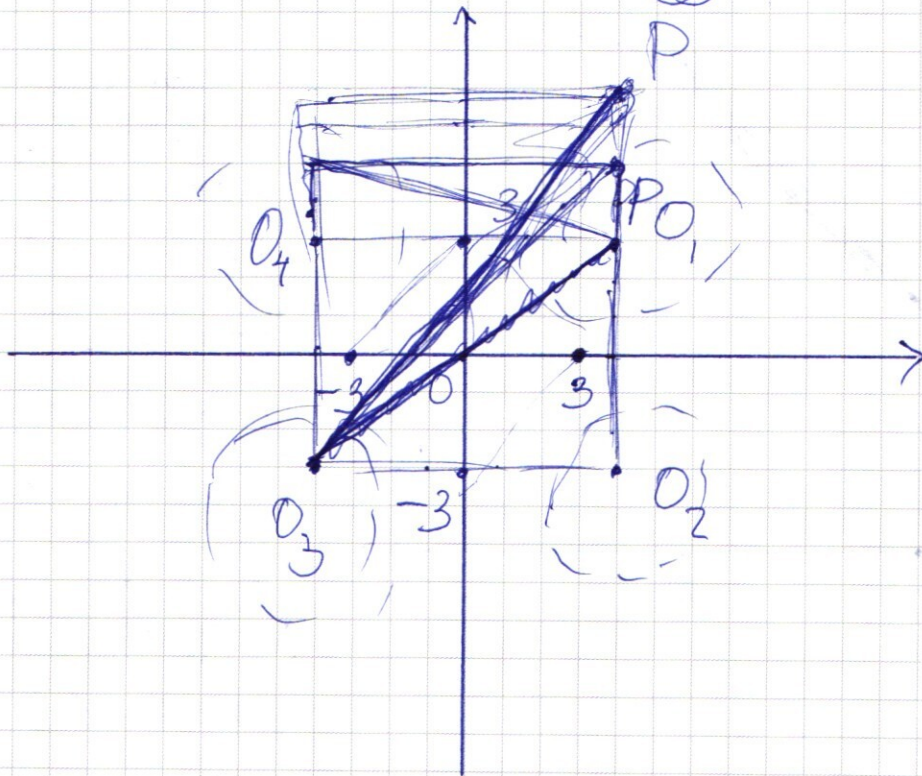
1. $\alpha = 1 \Rightarrow$ система будет иметь 2 решения
2. $\alpha \neq 1$

2. $\angle O_3PO_2$

$$O_3 p^2 = 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$$

$$Q_3 P = \sqrt{145}$$

при $\alpha = 145 \Rightarrow$ система будет иметь 2 решения



Omber: npe $a = 1$; 145

Задача 7

Japanese 7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 265 \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$(y > 2)$$

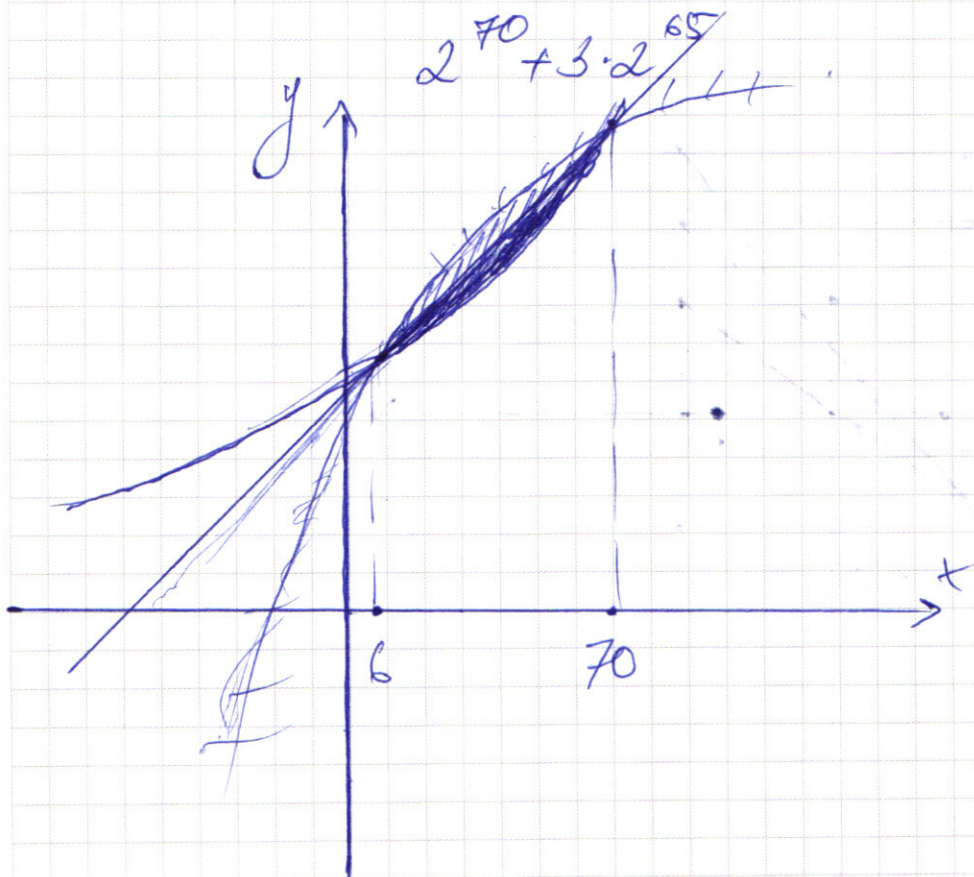
Perkiraan y-p-e : $2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$
 $x = 6$

Проверка: $2^6 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 3 \cdot 2^{65}$
 $111 + 3 \cdot 1^{65} = 111 + 3 \cdot 1^{65}$

$$64 + 3 \cdot 2^{65} = 64 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y = 2^6 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$X = 70$$



Получено все
указанного -
уже сф
привезены

$$x = 7 = 2^7 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$X=8 \Rightarrow 2^8 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$X=g \Rightarrow 2^9 + 3 \cdot 2^{65}$$

u m. g.

$$X = 69 \Rightarrow 2^{69} + 3 \cdot 2^{65}$$

Тарих 63

Задача 3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right) \log x = y^{2 \log x y} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{23}: \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg xy} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg xy} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^5}{x^2 \cdot y^2}} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$\lg \frac{x^3}{y^2} \cdot \lg y = \lg^2 x$$

$$(\lg x^3 - \lg y^2) \cdot \lg y = \lg^2 x$$

$$3 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2 x / (-1)$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg x = \lg y$$

$$x = y$$

$$\lg x = 2 \lg y$$

$$x = y^2$$

$$\boxed{x = y}$$

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-4y^2 + 8y = 0$$

$$4y(2 - y) = 0$$

$$4y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2y$$

$$2 - y = 0$$

$$2 = y \Rightarrow x = 2$$

$$\boxed{x=y^2}$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

$$y = 0$$

$y = \text{ноль}$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

	1	-2	-7	12
1	1	-3	-4	12
2	1	0	-7	
2	1	-4	1	
3	1	1	4	0

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D: 1 + 16 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - \text{ноль}$$

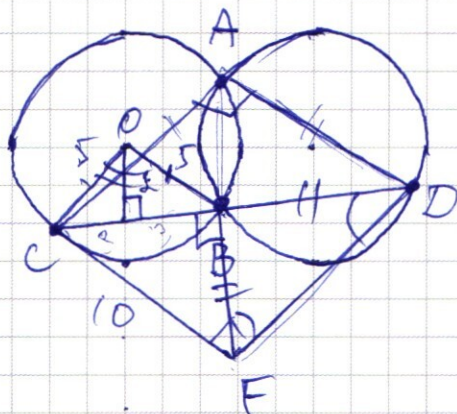
$$(y=3; x=9)$$

$$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2) (9; 3) \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

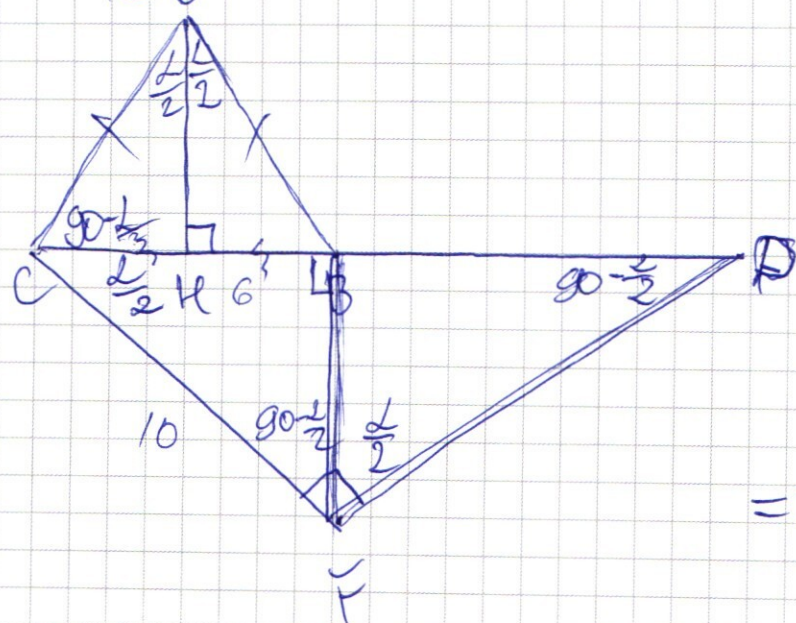
а)



1) $\angle CAD = \angle DFC = 90^\circ$

поскольку $\angle COB = 2$, тогда $\angle BCF = \frac{2}{2}$
т.к. на одной дуге

Вспомогательная



$\triangle COB$ - равноб.
 $\Rightarrow OK$ - медиана,
высота,
биссектриса

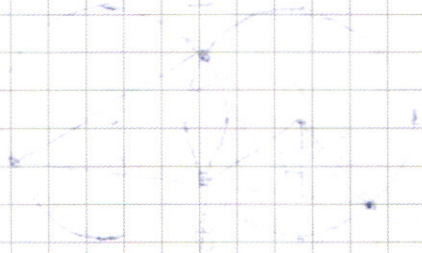
$\triangle COK \sim \triangle CBF$
(по 2-м углам)

$$\Rightarrow \frac{OC}{CF} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{CF} = \frac{1}{2}$$

$$CF = 10$$

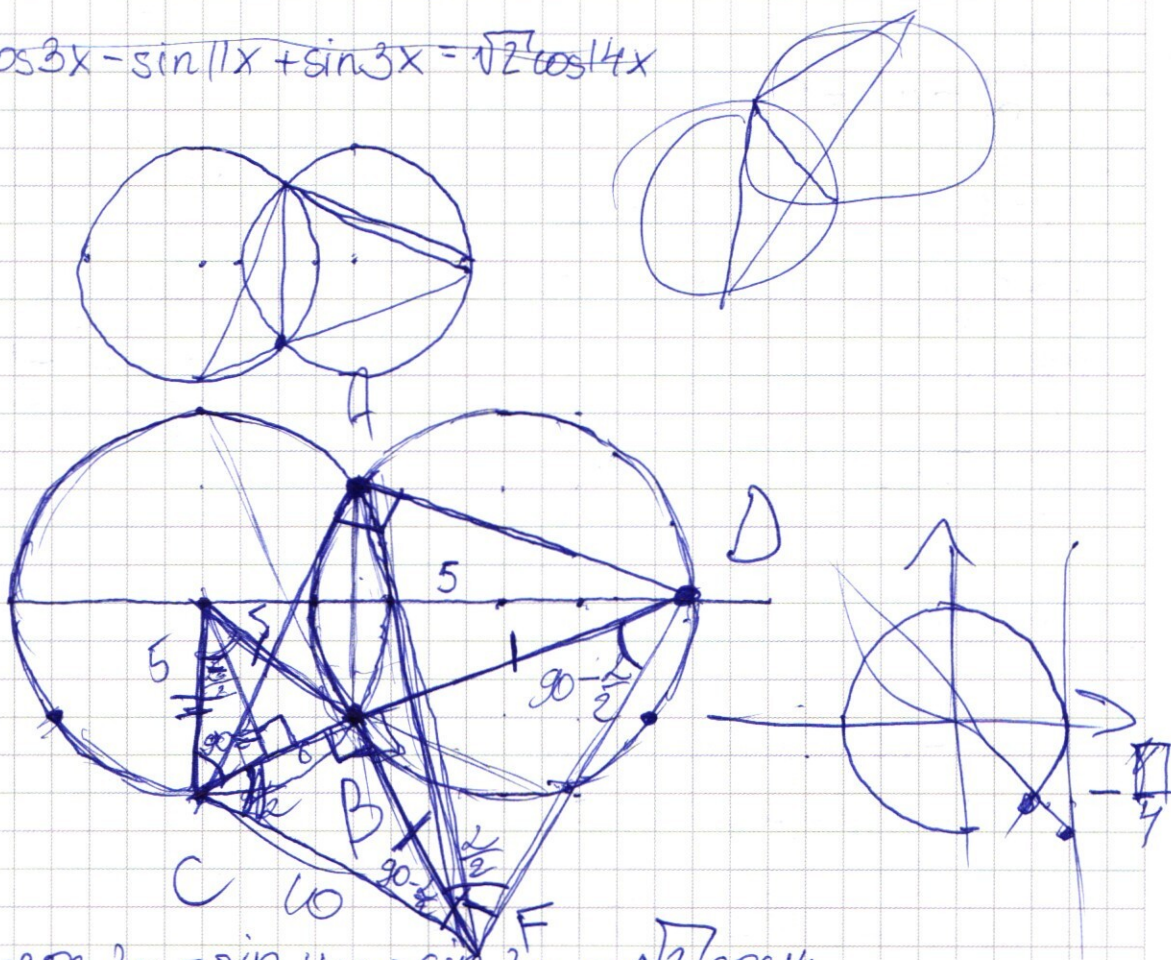
8) $BC = 6$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 7x$$



$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} \cos 4x (\cos 3x - \sin 7x) = 0$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \cdot \cos 7x = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) = 0$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0 \quad | : \cos 7x$$

$$\tan 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

$$\square x=y$$

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-4y^2 + 8y = 0$$

$$4y(2-y) = 0$$

$$4y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0$$

носл. к.

$$2-y = 0$$

$$2=y \Rightarrow x=2$$

$$x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$(y=3 \Rightarrow x=9)$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (9; 3); \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\square x=y^2$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

$$y = 0$$

носл. к.

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

	1	-2	-7	12
1	1	-3	4	
2	1	0	-7	
2	1	-4	1	
3	1	1	-4	0

$$\pm 1$$

$$\pm 2$$

$$\pm 3$$

$$\pm 4$$

$$y=3$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D: 1+16=17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - \text{носл.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

x, y - целые

Решение:
гр-е

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$x = 6$$

Проверка:

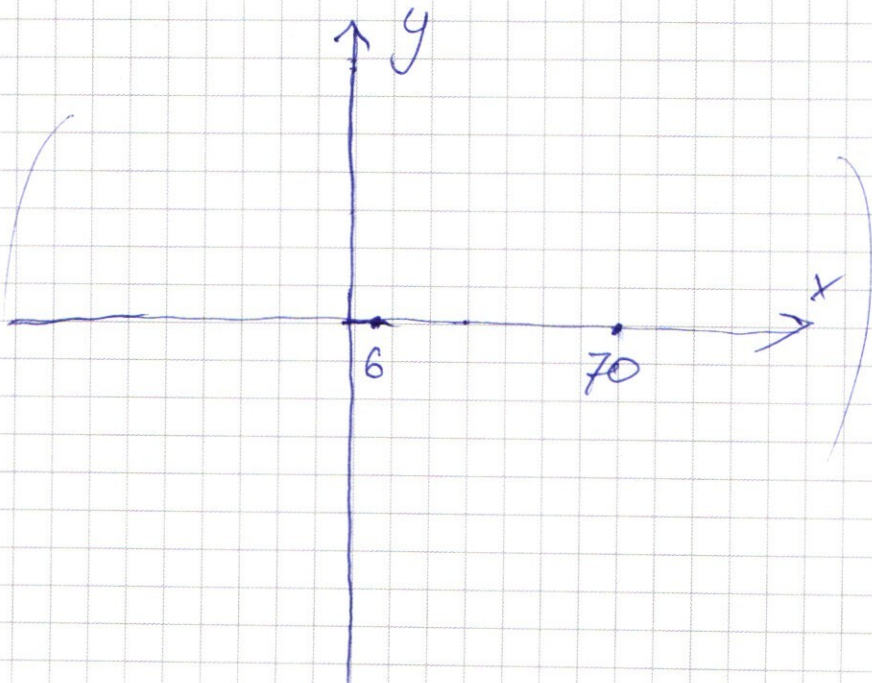
$$2^6 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 3 \cdot 2^{65} - 6$$

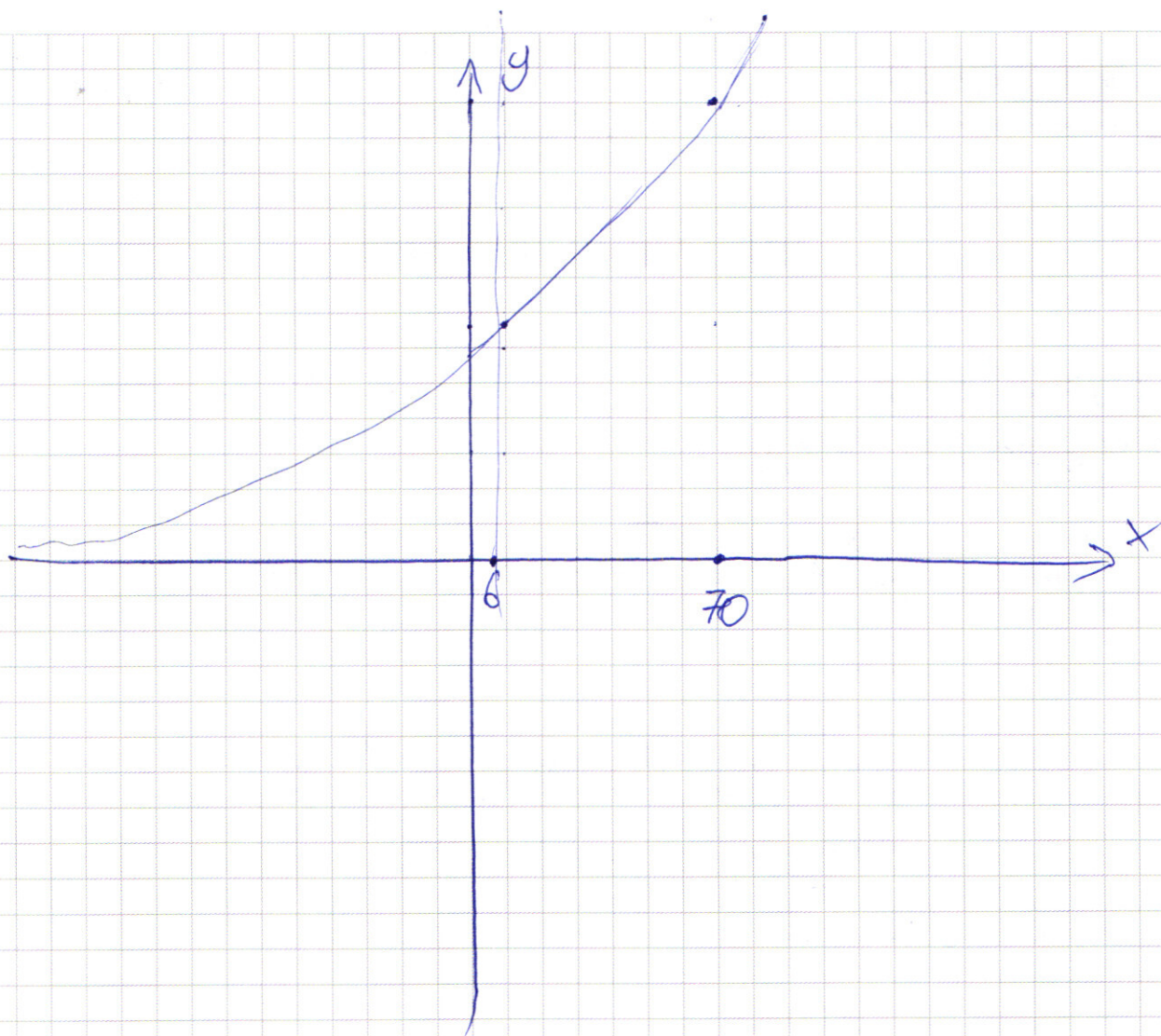
$$64 + 3 \cdot 2^{65} = 64 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y = 2^6 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$x = 70$$

$$2^{70} + 3 \cdot 2^{65}$$





Ответ: все данные значения лежат на кривой

$x =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{4} \begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x=3 \end{cases}$$

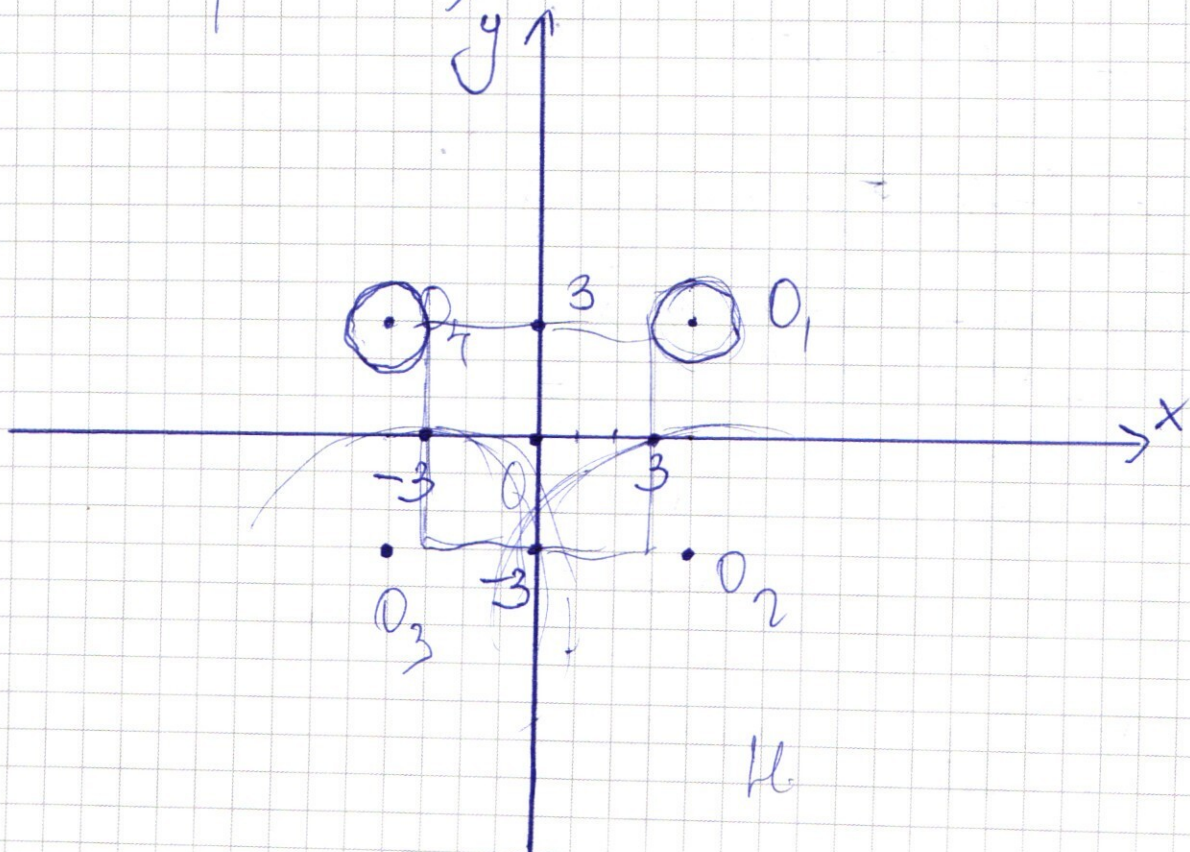
1. $3a=1 \Rightarrow$ система будет иметь 2 решения

2. $\angle O_3PO_2$
 $O_3P^2 = 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$

$$O_3P = \sqrt{145}$$

при $a=145 \Rightarrow$ система имеет 2 решения

Ответ: при $a=1; 145$



Задача 3.

3.1.

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x &= y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right.$$

УРА.

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^5 \lg x = y^2 \lg xy \cdot x \lg x$$

$$y^5 \lg x - 2 \lg xy = x \lg x$$

$$y \lg \frac{x^5}{x^2 \cdot y^2} = x \lg x$$

$$y \lg \frac{x^3}{y^2} = x \lg x$$

$$\lg \frac{x^3}{y^2} \cdot \lg y =$$

$$\lg \frac{x^3}{y^2} \cdot \lg y = \lg^2 x$$

$$(\lg x^3 - \lg y^2) \cdot \lg y = \lg^2 x$$

$$3 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2 x \quad | \cdot (-1)$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg x = \lg y$$

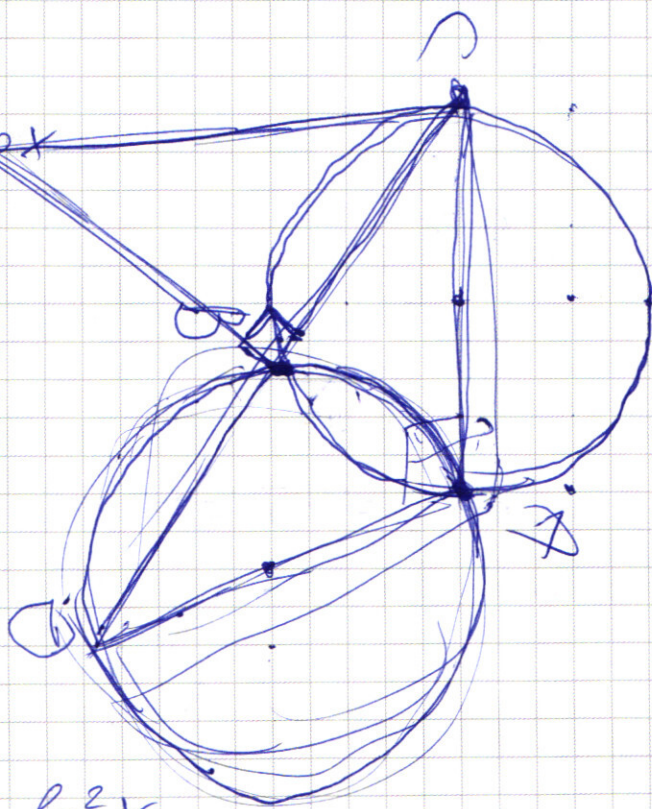
$$x = y$$

$$\lg x = \lg y$$

$$\lg x = 2 \lg y$$

$$x = y^2$$

Поставив



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ ((x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

2 фазы

$$(2|x-4|)^2 + (|y|)^2 = a$$

4 окр.

$$O_1 (4; 3)$$

$$O_2 (4; -3)$$

$$O_3 (-4; -3)$$

$$O_4 (-4; 3)$$

$$R = \sqrt{a}$$

$$a > 0$$

к вариантам.

①

1.

$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2y-6=6 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y=6 \end{cases}$$

②

$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ -2y+6=6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

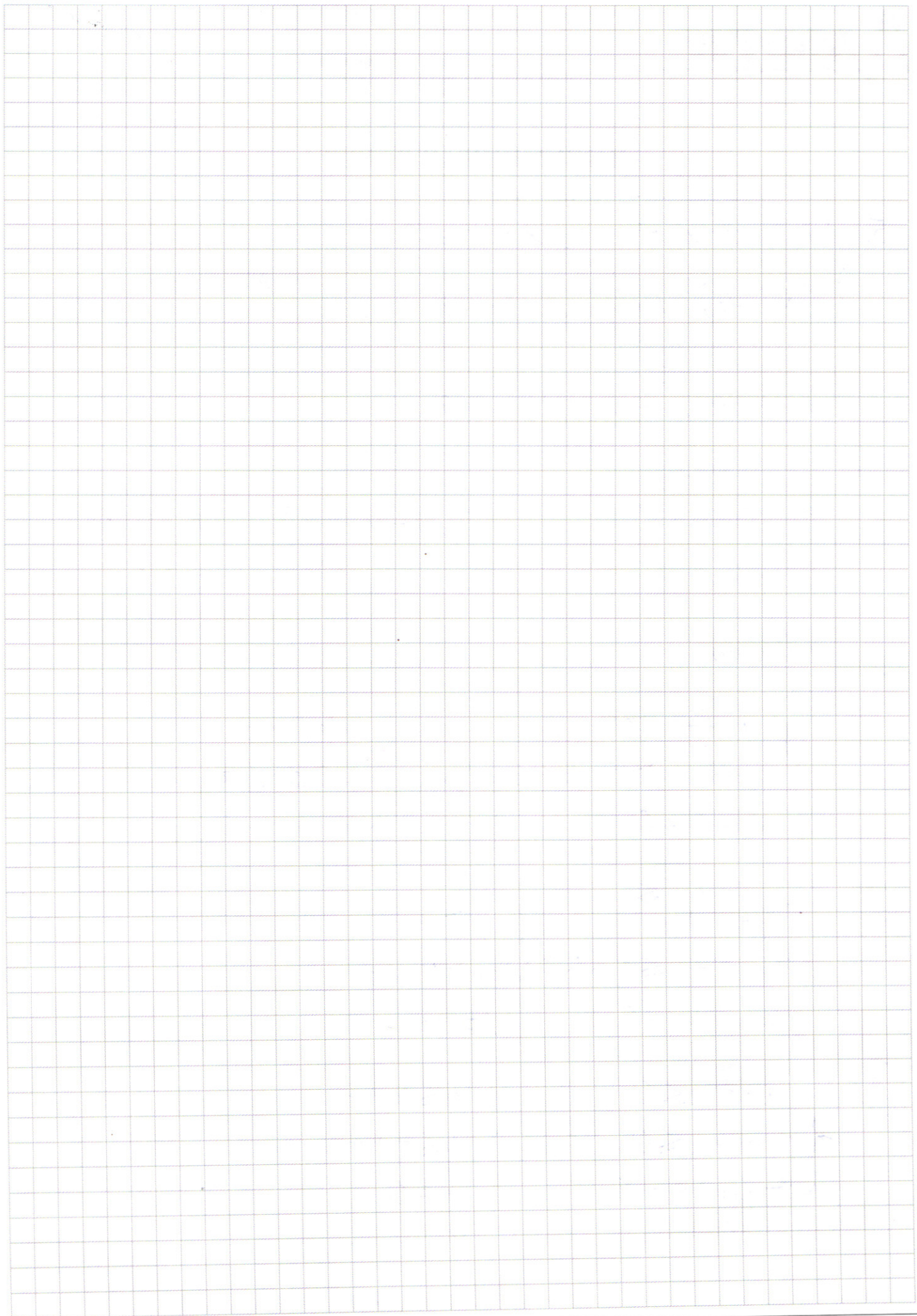
$$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ x=-3 \end{cases}$$

③

$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ -2y+6=6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ y=0 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x = 0$$

$$\sin \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{4} - 7x + \frac{4x}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - 7x - 4x = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k$$

$$-\frac{3x}{2} = \pi k - \frac{\pi}{8} \quad | : -2$$

$$\cancel{3x} = \cancel{-2\pi k} + \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$-\frac{11x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi k \quad | : -2$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

