

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1)

Для начала разложим 3375 на простые множители;
 $3375 = 3^3 \cdot 5^3$ — этому равняется произведение
 цифр 8-зн. числа

Очевидно, не может быть цифр $3^2, 5^2, 5^3, 5 \cdot 3$ и т.д.,
 могут быть только 3, 5 и 9 (и $1 = 3^0 = 5^0$, очевидно)

И.е. возможные варианты „состава“ числа:

— 3 пятёрки, три тройки и две единицы

— 3 пятёрки, 1 тройка, 1 девятка и ост. — единицы

(цифры в числах быть не может)

Эти случаи не имеют пересечений

В первом случае нам подходят $C_8^3 \cdot C_5^3$ чисел

кол-во способов
выбрать разряды из 8
для пятёрок
(порядок не важен) кол-во
способов
для троек

Во втором случае — $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1$

расставим
пятёрки расст.
пост. тройку пост.
девятку

$$\begin{aligned} \text{Общее кол-во: } C_8^3 \cdot (C_5^3 + C_5^1 \cdot C_4^1) &= \frac{8!}{(8-3)! 3!} \cdot \left(\frac{5!}{(5-3)! 3!} + \frac{5!}{(5-1)! 1!} \cdot \frac{4!}{(4-1)! 1!} \right) \\ &= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \left(\frac{4 \cdot 5}{2} + 5 \cdot 4 \right) = 56 \cdot (10 + 20) = 1680 \text{ чисел} \end{aligned}$$

Ответ: 1680

(2)

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

воспользуемся след. тригонометр. тождествами:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

получим:

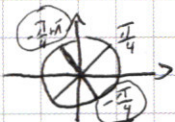
$$-2 \sin\left(\frac{11x+3x}{2}\right) \sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) \cos\left(\frac{11x+3x}{2}\right) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 (\sin(7x) \cdot \sin(4x) + \sin(4x) \cdot \cos(7x)) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-2 \sin(4x) \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & (1) \\ -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) & (2) \end{cases}$$

$$(1): \sin 7x = -\cos 7x \Leftrightarrow 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$



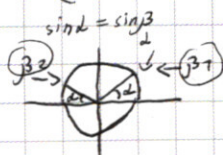
$$\text{т.е. } x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{4} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

(2): воспользуемся тем фактом, что $\sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$
а также тождеством (разность косинусов)

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x = \cos 7x - \cos\left(7x + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \sin\left(\frac{7x+7x+\frac{\pi}{2}}{2}\right) \sin\left(\frac{7x-7x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x = -2 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 4x = 2 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4}$$



$$\sin 4x = -\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{или } \sin 4x = \sin\left(-7x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x = -7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4x = \pi - \left(-7x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 11x = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi m, m = -t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② (продолжение)

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}n \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}m \end{cases}$$

$$m, n \in \mathbb{Z}$$

т.е. в итоге

Ответ; $x = \begin{cases} -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{4} \cdot k \\ -\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}n \\ -\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}m \end{cases}$, где $k, n, m \in \mathbb{Z}$

⑤

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

а-?
ровно 2 рещ.

решим задачу графически.

изобразим на координатной плоскости мн-во точек $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$

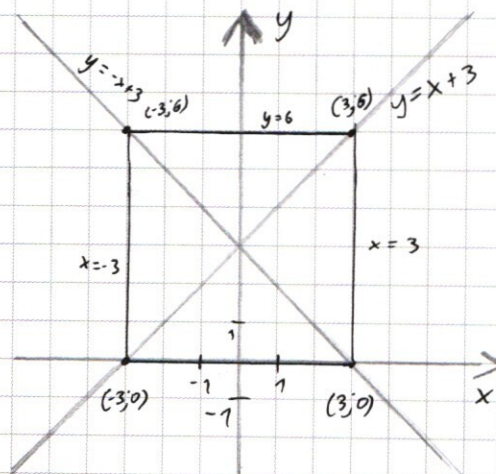
1) $\begin{cases} y-x \geq 3 \\ y+x \geq 3 \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$ получаем $y-3-x + y-3+x = 6$
 $y = 6$

2) $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$ $y-3-x - y+3-x = 6$
 $x = -3$

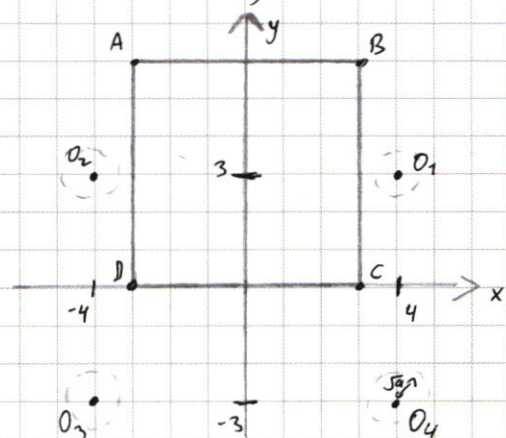
3) $\begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$ $-y+3+x + y-3+x = 6$
 $x = 3$

4) $\begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$ $-y+3+x - y+3-x = 6$
 $y = 0$

т.е. получили квадрат
с центром в $(-1; 0; 3)$



выр-е $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$ задаёт четыре окр-ти с центрами в точках $(4; 3)$ $(-4; 3)$ $(4; -3)$ $(-4; -3)$ и радиусами $\sqrt{a}$ (очевидно, $a \geq 0$)



чтобы два данных мн-ва точек имели ровно два пересечения из соображений симметрии либо окр-ти с центрами в точках O_1 и O_2 имеют по одной общей точке с ABCD, либо окр-ти с центрами в O_3 и O_4 имеют по 1-й общ., (-) с ABCD

Очевидно при $a=1$, т.е. $\sqrt{a}=1$ окр-ти с центрами O_1 и O_2 касаются квадрата в точках $(3; 3)$ и $(-3; 3)$ соответственно, две другие окр-ти общих точек с ABCD не имеют

При $a > 1$ окр-ти O_1 и O_2 имеют по две общ. точки с ABCD вплоть до того момента, когда т. A, D $\in$ (окр-ти $O_1; \sqrt{a}$) и т. B, C $\in$ (окр-ти $O_2; \sqrt{a}$), что происходит при $a = \sqrt{4^2 + 3^2}^2 = 58$

т.е. нас интересует $a > 58$, поэтому $a = \sqrt{1^2 + 3^2}^2 = 10$ (при кот. окр-ти O_3 и O_4 имеют по одной общей точке с ABCD) нам не подходит

Окр-ти O_3 и O_4 будут иметь по одной общ. точке с ABCD при $a > 58$, только в том случае, когда т. A $\in$ окр-ти $(O_4; \sqrt{a})$ т. B $\in$ окр-ти $(O_3; \sqrt{a})$

(т. A наиболее удалена от O_4 и аналогично с B и O_3)

Этот случай достигается при $a = \sqrt{4^2 + 9^2}^2 = 130$

Ответ: $a \in \{1; 130\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

кол-во пар целых (x, y) - ?

найдем точки пересечения графиков $y_1 = (2^{64} - 1)x + 70$ и $y_2 = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$.
Очевидно, они есть и их не более двух. Если подумать, становится ясно, что точек пересечения ровно две, иначе кол-во пар (x, y) будет бесконечным.

$$2^{64} \cdot x - x + 70 - 2^x - 3 \cdot 2^{65} = 0$$

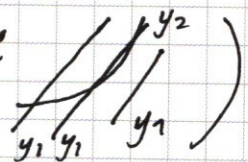
Ось ординат прямая y_1 пересекает в $(0; 70)$, y_2 - в $(0; 3 \cdot 2^{65})$.
Очевидно, при $x < 0$ $y_1 < 0$, $y_2 > 0 \Rightarrow$ пересечения будут при $x > 0$.

Далее, полагая, что x должен быть четным, достаточно легко найти корни (понятно что при $x > 0$ $2^{64} \cdot x$ и $3 \cdot 2^{65}$ будут большими значениями, 70 и x - маленькими) т.е. можно предположить, что при малом x должно вып. $\begin{cases} 2^{64} \cdot x = 3 \cdot 2^{65} \\ x + 2^x = 70 \end{cases}$

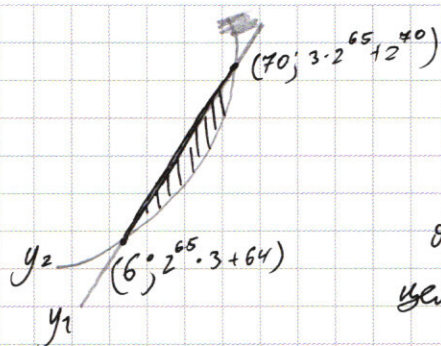
$$\begin{aligned} & \therefore x = 6 \\ & \text{(первая точка пересечения)} \\ & \text{можно проверить } x=2 \text{ и } x=4 \text{ не подг.} \end{aligned}$$

Вторая точка пересечения будет правее, поэтому вполне логично что будет предположить $\begin{cases} 2^{64} \cdot x = 3 \cdot 2^{65} + 2^x \\ x = 70 \end{cases} \oplus$

Пусть и не слишком математично, но точки пересечения найдены (больше двух их быть не может:



это точки $(6; 3 \cdot 2^{65} + 64)$ и $(70; 3 \cdot 2^{65} + 70)$



нам подходят точки из закрашенной области (прямая включена)

очевидно, точек, лежащих на y_1 и имеющих целочисленные координаты, ровно

$$70 - 6 - 1 = 63 \quad (\text{крайние, т.е. точки пересечения})$$

(с y_2 исключаем)

$$(y_1 = 70 + (2^{64} - 1)x \in \mathbb{Z} \text{ при } 4x \in \mathbb{Z})$$

теперь просуммируем все точки, лежащие на прямых $x = a$ при ~~$a \in [7; 69]$~~ $a \in [7; 69]$, находящиеся в закр. области

$$\sum_{i=7}^{69} (70 + (2^{64} - 1)i - 2^i - 3 \cdot 2^{65} - 1) \quad \text{при } i \in \mathbb{Z}$$

(исключаем точки в y_1 , т.к. уже посчитали)
(искл. точки в y_2 , т.к. не удовн. системе)

Ответ: $63 + \sum_{\substack{i=7 \\ \uparrow \\ i \in \mathbb{Z}}}^{69} (69 + (2^{64} - 1)i - 2^i - 3 \cdot 2^{65})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\{x+y \in [-3; 9]\} \quad y-x \in [-3; 9]$
 $\begin{array}{r} 3375 \\ 1125 \\ 375 \\ 125 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{array}$

$\cos 2 + \sin(-2) = \cos 2 + \cos(-2 - \frac{\pi}{2})$
 $= \cos 2 + \cos(-2 - \frac{\pi}{2})$
 $\cos 2 + \cos 2 + \frac{\pi}{2}$
 $2 \cos(2 + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4})$
 $\cos 2 - \sin 2 = 2 \dots (2) \dots$

$\sin 2 + \cos \beta$
 $\frac{\pi}{6}$
 $\frac{\pi}{4}$
 $\frac{\pi}{12}$

$C_8^3 \cdot C_5^3$
 $2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \sin(\alpha+\beta)$
 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$\cos 2 + \sin(\beta + \frac{\pi}{2}) =$
 $= 2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\pi}{4})$

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$
 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \sin(\beta + \frac{\pi}{2})$

$2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{2 \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}$
 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 74x$
 $-2 \cdot \sin(7x) \cdot \sin(4x) - 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 7x$
 $-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 74x$
 $-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$
 $-(\beta - \pi) + \alpha = \frac{\pi}{2}$
 $\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x - \cos 3x - \sin 7x \cos 3x - \sin 3x \cos 7x + \sin 3x$
 $= \sqrt{2} \cos 74x$
 $\cos 3x (\cos 7x - 1 - \sin 7x) + \sin 3x (1 - \cos 7x - \sin 7x) =$
 $= \sqrt{2} \cos 74x$
 $-\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x + \cos(7x + \frac{\pi}{2}) = 2 \cos(7x + \frac{\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{4}$
 $\sin(-4x) = \cos(7x + \frac{\pi}{4})$

$4x = 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi +$
 $3x = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi$

$$\left(\frac{10^5}{10^6}\right)^6 = y^{2(a+b)} \quad 10^{(5a-b)6} = y^{2(a+b)}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg(\lg x) = \lg y \cdot \lg(2 \cdot \lg xy)$$

$$(5\lg y - \lg x) \lg(\lg x) = \lg y (\lg 2 + \lg(\lg xy))$$

$$10^a = x \quad \lg x = a$$

$$x^a = 10^{a^2} \quad \lg y = a$$

$$x^{\lg x} = x^a$$

$$(x-2)^2 (y-2)^2 = 2xy - 8$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^{\lg x}} = y^{(\lg x + \lg y)2}$$

$$e^x$$

$$y > 0$$

$$x \geq 0$$

$$71 - 2^{64} < 0$$

$$2^0 + 3 \cdot 2^{65} > 70$$

$$\lg y = x + 65 \cdot \lg 3$$

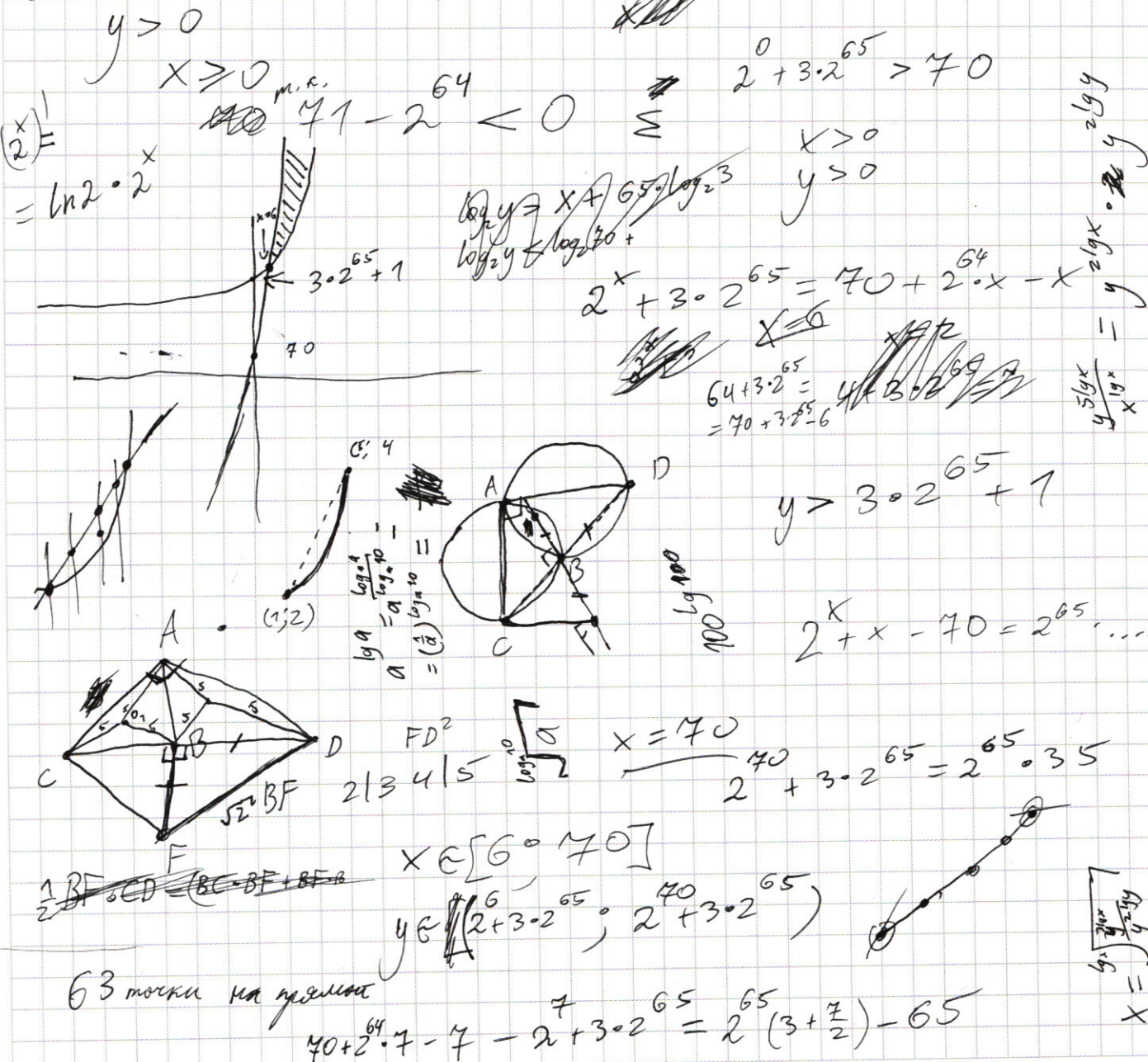
$$\lg_2 y = \lg_2 30 +$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2 \cdot x - x$$

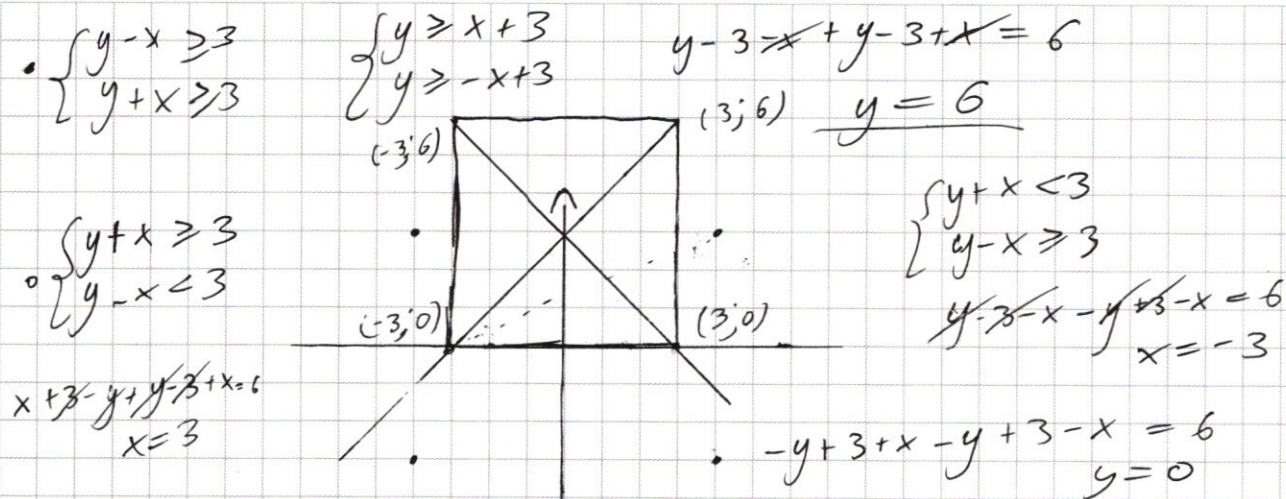
$$64 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 3 \cdot 2^{65} - 6$$

$$y > 3 \cdot 2^{65} + 1$$

$$2^x + x - 70 = 2^{65}, \dots$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~$a=1$~~ $a=1$ $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{58}$

$a > \sqrt{58}$

$a = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}$

$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$

~~$(x-y)^2$~~

$(x-y)^2 + (x-2)^2 - x^2 - 4 - (2y-3)^2 = 0$
 $+9$

$y=0$
 $x=4$

$y > 0$
 $x > 0$

~~$\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y}$~~

$(x-2)^2 - 3(y-2)^2 = 2xy + 4 - 12$

