МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32}-1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Кол-во N 8-значных чисел, произведение цифр которых равно 9261 — ?

Факторизуем число 9261:

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	1

Итого: $9261 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7 = 3^3\cdot7^3$

Возможны два варианта, при которых произведение цифр 8-значного числа $=3^3\cdot7^3=9261$ -

I Число состоит из трех цифр 3, трех цифр 7, двух цифр 1 (т.к. ~~все~~ любые цифры, кроме 1, меняют итоговое произведение цифр нашего числа, уже равное $3^3\cdot7^3=9261$).

Таких вариантов $N_I = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2} = 560$

II Число состоит из трех цифр 7, одной цифры 3, одной цифры 9 (т.к. $9=3^2$), трех цифр 1.

Таких вариантов $N_{II} = \frac{8!}{3!\,3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot3\cdot2} = 1120$

Итоговое $N = N_I + N_{II} = 560 + 1120 = 1680$ чисел.

Ответ: 1680 чисел.

№3. $\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln(y/x^7)} & (1)\\ y^2-xy+8x-2x^2-4y=0 & (2)\end{cases}$ $(x;y)-?$

(2): $y^2-y(x+4)-2x^2+8x=0$ – решим кв. ур-ие отн. y.

$D=\cancel{(x+4)^2}\ (-(x+4))^2-4\cdot 8x+4\cdot 2x^2=$
$=x^2+8x+16-32x+8x^2=9x^2-24x+16=(3x-4)^2$

$y=\left[\begin{array}{l}\frac{x+4-(3x-4)}{2}\\ \frac{x+4+(3x-4)}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{ll}y=-x+4 & \mathrm{I}\\ y=2x & \mathrm{II}\end{array}\right.$

(1): $(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln(y/x^7)}$

ОДЗ log: $\begin{cases}x>0\\ \frac{y}{x^7}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y>0\\ x>0\end{cases}$

Прологарифмируем (ln) левую и правую части ур-ия:

$\ln\left((x^2y^4)^{-\ln x}\right)=\ln\left(y^{\ln(y/x^7)}\right)$

$-\ln x\ \ln(x^2y^4)=\ln\frac{y}{x^7}\cdot\ln y$

$-\ln x(2\ln x+4\ln y)=\ln y(\ln y-7\ln x)$

$\ln^2y-7\ln y\ln x=-2\ln^2x-4\ln y\ln x$

$\ln^2y-3\ln y\ln x+2\ln^2x=0$; $\ln y=a$, $\ln x=b$

$a^2-3ab+2b^2=0$ $D=9b^2-4\cdot 2b^2=b^2\Rightarrow$

$\Rightarrow a=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}(3b-b)\\ \frac{1}{2}(3b+b)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ a=2b\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}\ln y=\ln x & *\\ \ln y=2\ln x & **\end{array}\right.$

$*$: $\ln y=\ln x\Rightarrow y=x$

$*$ и I: $\begin{cases}y=x\\ y=-x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}\Rightarrow (2;2)$

$*$ и II: $\begin{cases}y=x\\ y=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ ОДЗ $\Rightarrow\cancel{(0;0)}$

см. продолжение на стр. №3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение): * и II: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$ ОДЗ: $x>0, y>0$ не удовл. ОДЗ log

**: $\ln y = 2\ln x \Rightarrow y = x^2$

** и I: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=-x+4 \end{cases} \Rightarrow x^2+x-4=0$ $D = 1+16=17$ $x = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$ $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0$ — не уд. ОДЗ $x>0$

$x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ y=-x+4 \end{cases} \Rightarrow y = 4-\frac{\sqrt{17}-1}{2} = 4{,}5-\frac{\sqrt{17}}{2}>0$

$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

** и II: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \text{ — не уд. ОДЗ} \\ x=2 \end{array}\right.$

$x=2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (2;4)$

Итого: $(2;4)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$; $(2;2)$

Ответ: $(2;4), (2;2), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

№5. $\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 \quad (1) \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a \quad (2) \end{cases}$

a — ?: есть равно 2 реш.

(1): $|y-(x-5)|+|y-(-x-5)|=10$

Нули модулей: $y=x-5$ и $y=-x-5$

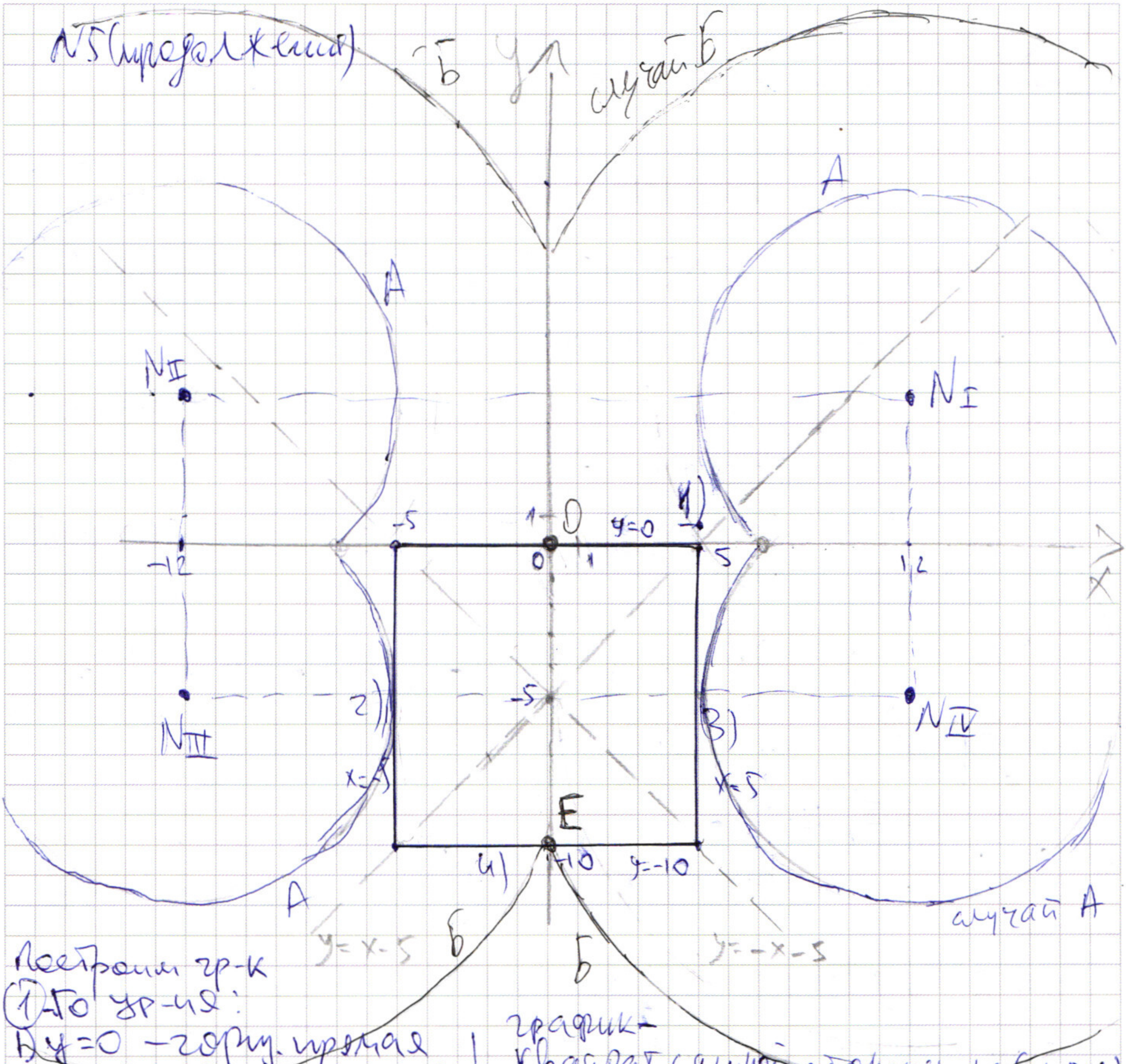
1) $\begin{cases} y>x-5 \\ y>-x-5 \end{cases} \Rightarrow y+x+5+y-x+5=10$
$y=0$ — гориз. прямая

3) $\begin{cases} y<x-5 \\ y>-x-5 \end{cases} \Rightarrow y+x+5-y+x-5=10$
$x=5$

2) $\begin{cases} y>x-5 \\ y<-x-5 \end{cases} \Rightarrow$ ~~y+x+5~~ $y-x+5-x-y-5=10$
$x=-5$ — верт. прямая

4) $\begin{cases} y<x-5 \\ y<-x-5 \end{cases}$
$-x-y-5-y-5+x=10 \Rightarrow \boxed{y=-10}$

№5 (продолжение)



Построим гр-к

① -го ур-ия:

1) $y=0$ – гориз. прямая
2) $x=-5$ – верт. прямая
3) $x=5$ – верт. прямая
4) $y=-10$ – гориз. прямая

$\Rightarrow$ график – квадрат с длиной стороны 10 (см. рис.)

② : $(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$

Если „снять" модули, то получим ур-ие: $(x-12)^2+(y-5)^2=a$ – ур-ие окр-ти с центром в т. $N(12;5)$, $R=\sqrt{a}$, либо точки $(12;5)$ при $a=0$. „Навешивание" $|x|$ дает нам отражение части гр-ка, нах-ся не левее Oy, отн. Oy, при этом изначальная левая часть гр-ка (левее Oy) „стирается".
Навешивание $|y|$ „стирает" нижнюю часть гр-ка (ниже Ox) и отражает верхнюю (~~вы~~ не ниже Ox) отн-но Ox.

[см. прод. на стр. 5]

№5. (продолжение) Будем искать такие a, при кот графики ур-ий (1) и (2) имеют ровно 2 общие точки. Есть 2 таких случая:

А. Фрагменты окр-тей в III и IV четвертях кас-ся квадрата, а фр-ты окр-тей в I и II еще не кас-ся его: ~~$a = $~~ ($N_{III}$; Окр-ть с $R=\sqrt{a}$ кас-ся $x=5$: $\sqrt{a} = |x_{N_{IV}} - 5| = |12-5| = 7 \Rightarrow a = 49$

Б. Фр-ты окр-тей прох через т. $O(0;0)$ и $E(0;-10)$, принадл. квадрату. т. O принадлежит всем 4-ем окр-тям (фр-там), т. E — окр-тям III и IV

$\sqrt{a} = R = \sqrt{12^2+5^2} = 13$ (расст. от т. O до центра окр-ти)

$a = R^2 = 169$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = 49 \\ a = 169 \end{array}\right.$

№6

Дано:

$\omega_1: R=10$

$\omega_2: R=10$

$C \in \omega_1$

$D \in \omega_2$

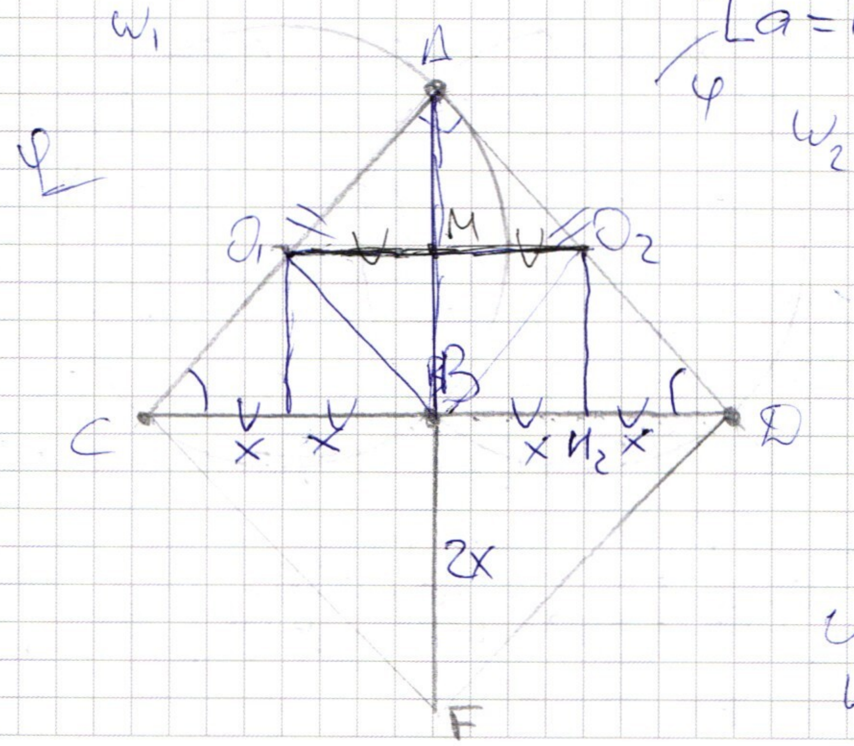
$\angle CAD = 90^\circ$

$B \in CD$

$BF = BD$; а) CF — ?

б) $BC = 12$

$\triangle ACF$: S — ?



См. прод на стр. 6

Решение

1) $\angle BDA = \angle BCA$ – опир-ся на равные дуги AB (в ω_1 и ω_2, их стягивает хорда AB) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ACD$ – р/б-ый $\Rightarrow AC = AD$

Дуги AC и AD равны между собой (4) (их стягивают равные хорды) $\Rightarrow \angle ABC = \angle ABD$

В ΔABC и ΔABD $\angle ADB = \angle ACB$, $\angle ABC = \angle ABD \Rightarrow \angle CAB = \angle DAB \Rightarrow$ AB – бис-са ΔACD, т.к. он – р/б-ый $\Rightarrow$ AB – медиана, высота.

AB – высота $\Rightarrow \angle ABC = \angle ABD = 90^\circ \Rightarrow \underbrace{AC \text{ и } AD}_{\text{хорды}}$ – диаметры; $O_1 \in AC$, $O_2 \in AD$.

$AC = 2R = 20$; $AD = 2R = 20$

ΔBO_2D – р/б-ый, т.к. $O_2B = O_2D$ (R), тогда высота O_2H_2, опущ. на BD, явл-ся медианой в Δ-ке BO_2D. Обозначим BH_2 и DH_2 (равные между собой) за X. Тогда $BD = BF = 2X$

$\Delta O_1BO_2 = \Delta O_1AO_2$ (по 3 сторонам: $BO_2 = BO_1 = O_1A = O_2A$, O_1O_2 – общ.) $\Rightarrow \angle O_1BO_2 = 90^\circ \Rightarrow O_1BO_2A$ – квадрат

Диагонали квадрата равны, делятся в т. перес. пополам и перпендикулярны. $\Rightarrow AM = MO_2$

В ΔAMO_2 (по т. Пифагора): $AO_2^2 = AM^2 + AM^2 = 2AM^2$

$AM^2 = \frac{AO_2^2}{2} = \frac{R^2}{2} = 50 \Rightarrow AM = 5\sqrt{2} = MO_2$

$AB \parallel O_2H_2$, $MO_2 = BH_2 = x$ – расст. между прямыми.

$x = 5\sqrt{2} \Rightarrow BF = 2x = 10\sqrt{2}$

Т.к. BF – перпенд к CD, то найдем DF из прямоуг Δ-а BDF.

по т. Пиф: $BD^2 + BF^2 = FD^2 \Rightarrow FD^2 = 8x^2 \Rightarrow \underline{FD = 2\sqrt{2}\,x = 40}$

см. прод на стр 7

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6 (прод.)

$\triangle BCF = \triangle BDF$ (по двум сторонам и углу между ними: BF-общ, $BD=BC=2x$, $\angle CBF = \angle DBF = 90^\circ$)

$CF = FD = 40$ Ответ: 40

б) $BC = 12$

S_{ACF}-?

$S_{ACF} = \frac{1}{2} BC \cdot AF$

$AF = 2BC \Rightarrow S_{ACF} = BC^2 = 144$

Ответ: 144

N7 $\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$

$N(x;y)$

$x \in Z$

$y \in Z$

Решение

$2^x + 3\cdot 2^{34} > 0 \Rightarrow y > 0$

$y < 76 + 2\cdot(2^{32}-1)x \Rightarrow$

$\Rightarrow 76 + 2\cdot(2^{32}-1)x > 0$

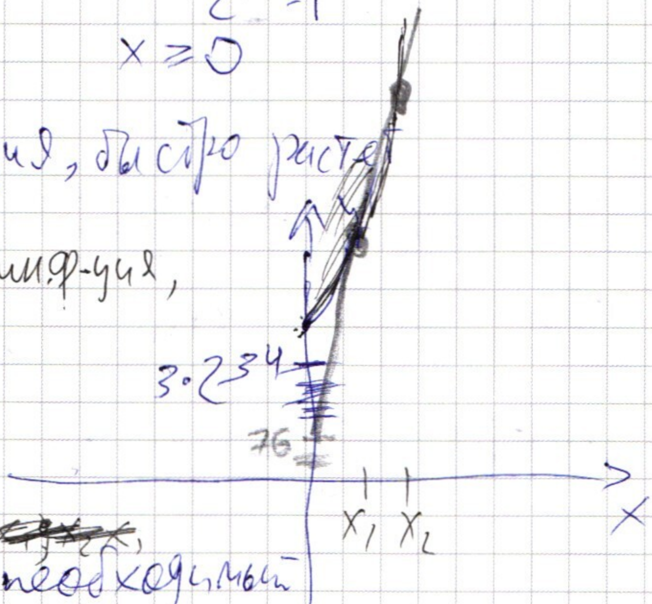
$x > -\frac{38}{2^{32}-1}$, $x \in Z$

$x \geq 0$

$y = 2^x + 3\cdot 2^{34}$ - показ. ф-ция, быстро растет

$y \leq 76 + 2(2^{32}-1)x$ - лин. ф-ция, быстро растет.

Обе ф-ции возраст.



У гр-ков будут 2 точки пересечения. Их абсциссы (x_1, x_2) x_1 и x_2 указывают на необходимый нам промежуток. К-во целых значений x на промеж. $[x_1; x_2]$ - ответ.

N 2. Одну из абсцисс можно подобрать:

$x=6$

$2^6+3\cdot 2^{34}=76+2\cdot(2^{32}-1)6$

$64+3\cdot 2^{34}=64+3\cdot 2^{34}$

$x=6$ – одна из абсцисс

N 2. $\cos 9x-\cos 5x-\sqrt{2}\cos 4x+\sin 9x+\sin 5x=0 \Big| \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 4x=\sin\frac{\pi}{4}\cos 9x+\sin 9x\cos\frac{\pi}{4}+\sin 5x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos 5x$

$\cos 4x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+9x\right)+\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\cancel{\cos 4x}$

$\cancel{\cos 4x=2\sin(7x)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)}$

$\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+9x\right)=\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\cancel{2\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right.\cos}$

$\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right.}$

$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+9x\right)=0$

$2\sin\left(\frac{9x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+9x\right)=0$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+9x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{9x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{9x}{2}\right)$

$\sin\left(\frac{9x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{9x}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{9x}{2}\right)$

$2\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{9x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{9x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{9x}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \,\Big|\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}\cos 4x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin 7x \cos 2x - 2\sin 7x \sin 2x)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos 4x = \sqrt{2}(\sin 7x)(\cos 2x - \sin 2x)$

$\sin 7x = \sin(4x+3x) = \sin 4x\cos 3x + \sin 3x\cos 4x =$

$= \sin 4x(4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos 4x(3\sin x - 4\sin^3 x) =$

$= \underbrace{3\sin\cos 4x - 3\cos x\sin 4x}_{3(\sin(-3x))} + 4\cos^3 x\sin 4x - 4\sin^3 x\cos 4x$

$\cos 4x = \sqrt{2}(4\cos^3 x\sin 4x - 4\sin^3 x\cos 4x - 3\sin 3x)\cdot$
$\cdot(\cos 2x - \sin 2x)$

$(\cos 2x - \sin 2x)(4\cos^3 x\sin 4x - 4\sin^3 x\cos 4x - 3\sin 3x -$
$- \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

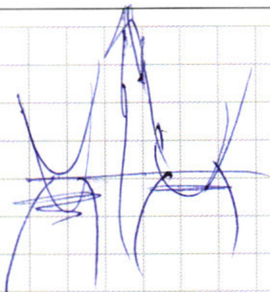
$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2x + \sin 2x) + 3\sin 3x = 4(\cos^2 x\sin 4x\cos x -$
$- \cos 4x\sin x(1-\cos^2 x)$

$y = |x|^2 - 3|x| + 2$

$2;1$

$|y|$



$2^{22} + 3\cdot 2^{34} = 2^{22}(1+3\cdot 2^{12}) -$

N7. $\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$

N $(x;y) - ?$ $x \in \mathbb{Z}$ $y \in \mathbb{Z}$

$\cancel{x = 22}$

$y > 0$

$x = 22$

$76 + 2(2^{32}-1)x > 0$

$32 + 2^{34}\cdot 11$

$76 - 32 = 44$

$76 - 3\cancel{2} = 44 \cdot 2x$

x

$x(2^{32}-1) > -38$

$x(2^{16}+1)(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1) > -38$

$x \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot (2^{16}+1) > -38$ $x \in \mathbb{Z}$

$x \geq 0$

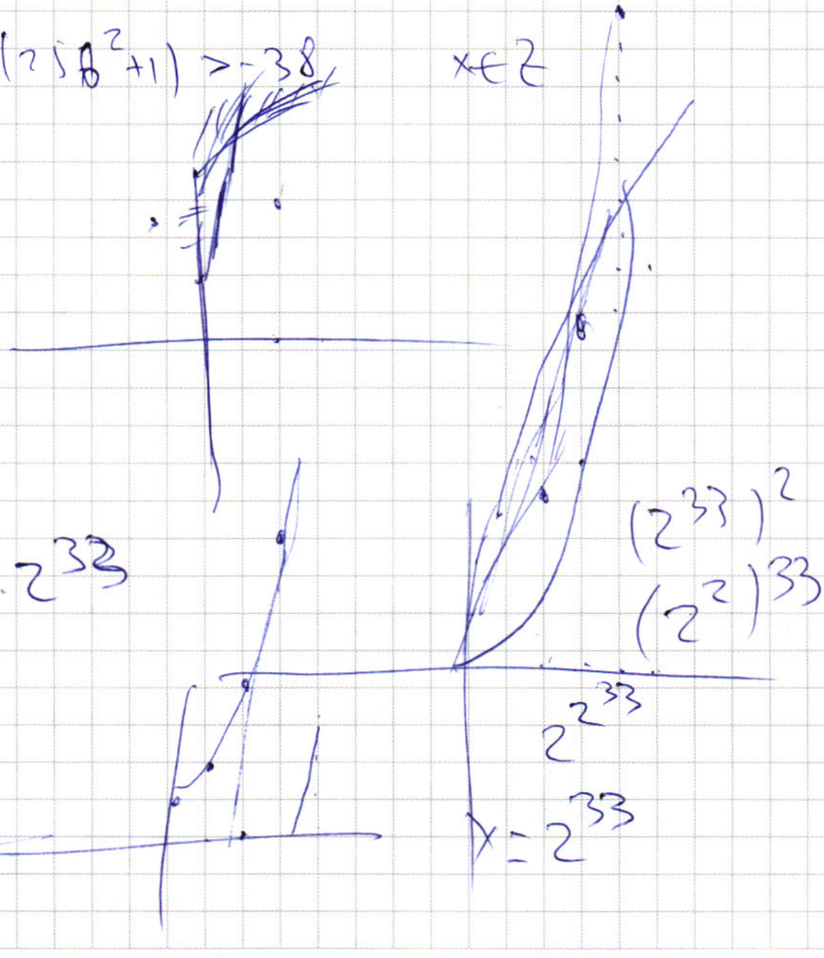
$\begin{cases} y < 76 + 2(2^{32}-1)x \\ -y \leq -2^x - 3\cdot 2^{34} \end{cases}$

$x = 6$

$\cancel{76}$ $76 - 2x + \cancel{x}\cdot 2^{33}$

$2^x + 3\cdot 2^{34}$

$76 - 2x = 2^x$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1. ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$

Варианты: I три 3, три 7, две 1

II три 7, одна 3, одна 9, три 1

I ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔
8 7 6 5 4 3 2 1

3, 3, 3
7, 7, 7
1, 1

$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}^{3}\cdot5\cdot4}{\cancel{3\cdot2\cdot2}} = 16\cdot5\cdot7 = 80\cdot7 = 560$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\frac{\pi}{4} + 9x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - 9x\right)$

$\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3\cdot2}}{\cancel{3\cdot2\cdot3\cdot2}} = 20\cdot7\cdot8 = 160\cdot7 = 700+420 = 1120$

N2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$0 = \cos 9x \sin\frac{\pi}{4} - \cos 5x \cos\frac{\pi}{4} - \cos 4x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 9x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 5x$

$\cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 9x\right) - \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$; $\cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 9x\right) - \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 4x = -2\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\cdot\sin(-7x)\right)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

N3. $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$

$x>0$

$\frac{y}{x^7} > 0 \Leftrightarrow y>0$

$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$

$D = x^2+8x+16+8x^2-32x = 9x^2-24x+16 =$

$= (3x-4)^2$

$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = \left[\begin{array}{l} 2x \\ -x+4 \end{array}\right.$

$\sin\alpha\cos\beta =$

$= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

(1) $-\ln x \cdot \ln x^2y^4 = \ln \frac{y}{x^7} \cdot \ln y$

$-\ln x(2\ln x + 4\ln y) = (\ln y - 7\ln x)\ln y$

$\ln^2 y - 7\ln x \ln y = -2\ln^2 x - 4\ln y \ln x$

$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0$

$\ln y = a$

$\ln x = b$

$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$

$a = \frac{3b \pm b}{2}$

$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$

$a = \left[\begin{array}{l} 2b \\ b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln y = 2\ln x \\ \ln y = \ln x \end{array}\right.$

$\cos 4x = 2\sin 7x \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$

$\sin \frac{\pi}{4} - 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + 2x)) = \cos(\frac{\pi}{4} + 2x)$

$\cos 4x = 2\sin 7x \cos(\frac{\pi}{4} + 2x) = 2\sin 7x \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x)$

$\cos 4x = \sqrt{2}\sin 7x \cos 2x - \sqrt{2}\sin 7x \sin 2x$

$\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 9x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

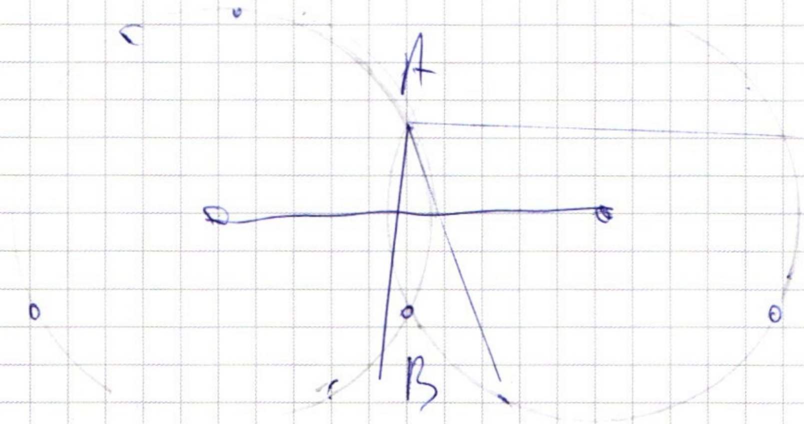
(Нумеровать только чистовики)

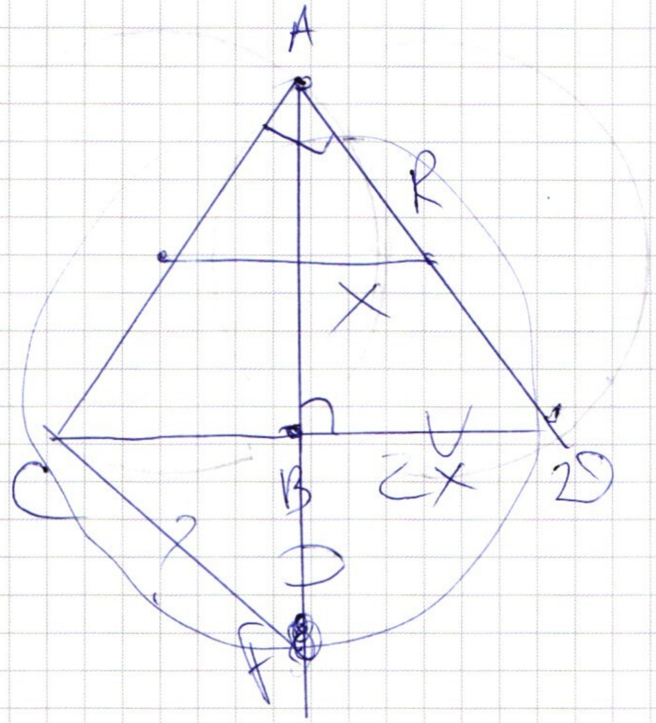
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6.





☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)